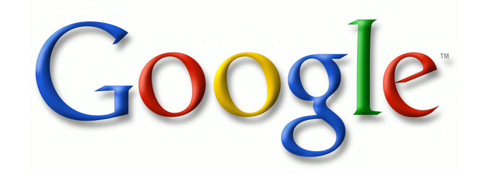
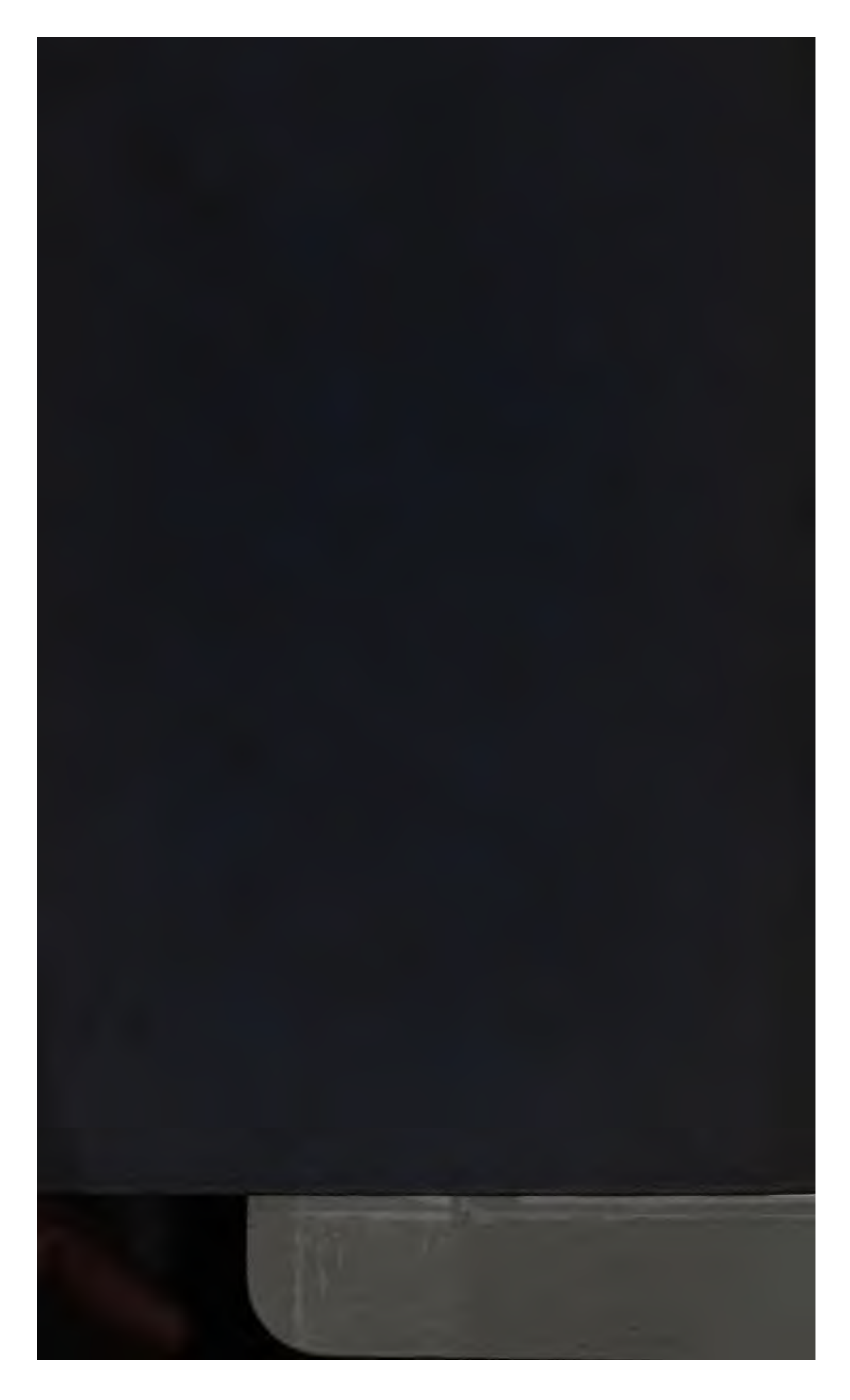
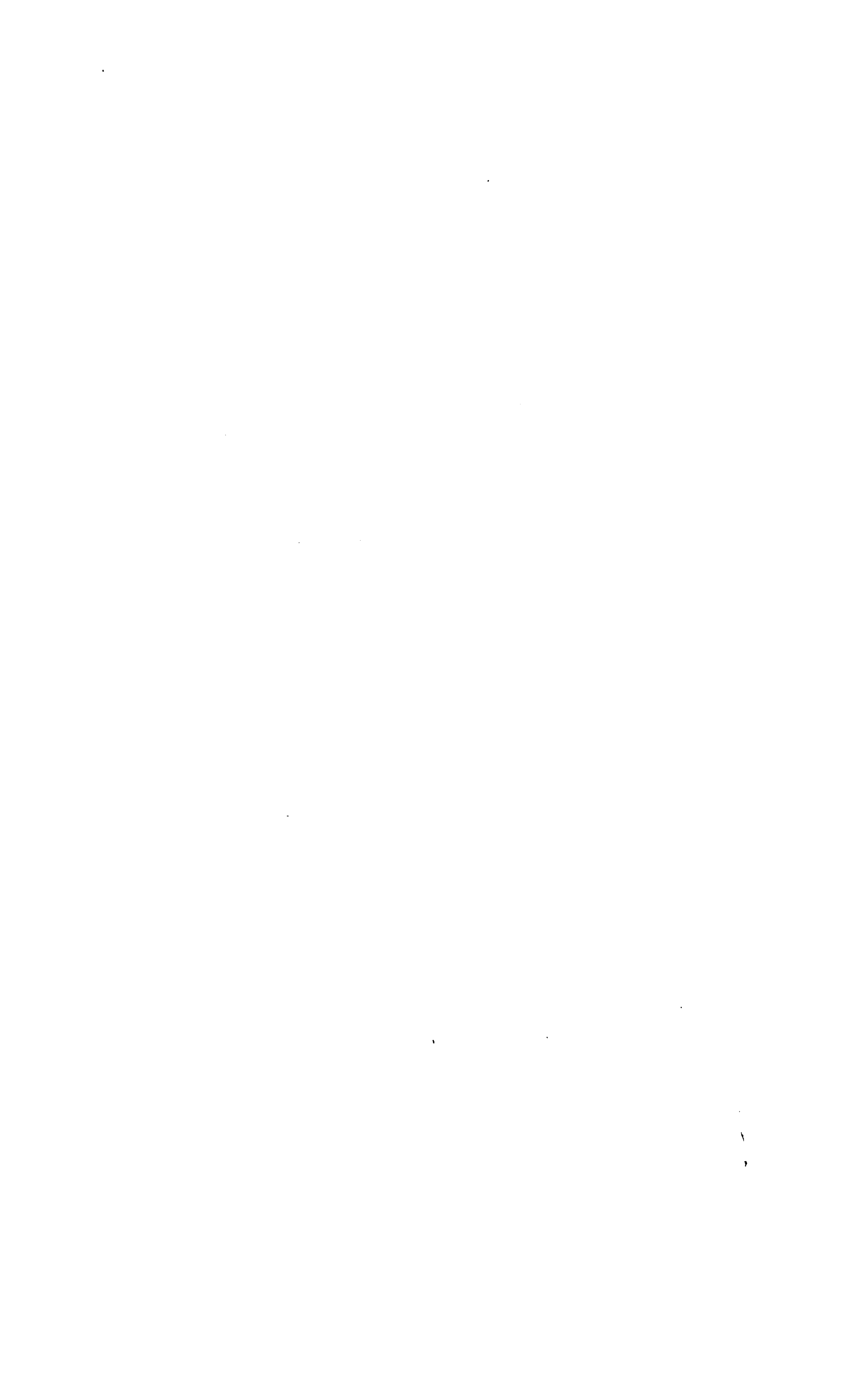









Euler





Leonhard Euler's vollständige Anleitung zur Integralrechnung.

Aus dem Lateinischen ins Deutsche übersetzt

von

Joseph Salomon,

k. k. Professor.

Dritter Band,

welcher die Methode, aus einer gegebenen Relation der Differenzialien eines beliebigen Grades Functionen zweyer oder mehrerer Veränderlichen zu finden, behandelt, nebst einem Anhange über die Variationsrechnung und einem Supplemente.

Wien.

Gedruckt und im Verlage bey Carl Gerold.

1830.

Inhalt des dritten Bandes.

Erster Theil.

Aufsuchung von Functionen zweyer Veränderlichen aus einer gegebenen Relation zwischen den Differenzialien eines jeden Grades.

Erster Abschnitt.

Aufsuchung von Functionen zweyer Veränderlichen aus einer gegebenen Relation der Differenzialien des ersten Grades.

Seite

Zweyter Abschnitt.

Aufsuchung von Functionen zweyer Veränderlichen aus einer gegebenen Relation der Differenzialien des zweyten Grades.

Dritter Abschnitt.

Aufsuchung der Functionen zweyer Veränderlichen aus einer gegebenen Relation zwischen den Differenzialien des dritten und der höhern Grade.

Zweyter Theil.

Functionen von drey veränderlichen Größen aus einer gegebenen Relation der Differenzialien zu bestimmen.

Anhang.

Von der Variationsrechnung.

Zweyter Abschnitt.

Aufsuchung von Functionen zweyer Veränderlichen aus einer gegebenen Relation der Differenzialien des zweyten Grades.

Dritter Abschnitt.

Aufsuchung der Functionen zweyer Veränderlichen aus einer gegebenen Relation zwischen den Differenzialien des dritten und der höhern Grade.

Zweyter Theil.

Functionen von drey veränderlichen Größen aus einer gegebenen Relation der Differenzialien zu bestimmen.

Anhang.

Von der Variationsrechnung.

Kapitel VI.

Kapitel VII.

Supplement.

Zweytes Buch

der

Integralrechnung.

Erster Theil. Erster Abschnitt.

Erster Theil,

oder Auffindung von Functionen zweyer Veränderlichen aus einer gegebenen Relation zwischen den Differenzialien eines jeden Grades.

Erster Abschnitt.

Aufsuchung von Functionen zweyer Veränderlichen aus einer gegebenen Relation der Differenzialien des ersten Grades.

Kapitel I.

Von der Natur der Differenzialgleichungen, durch welche Functionen zweyer Veränderlichen bestimmt werden, im Allgemeinen.

Aufgabe 1.

§. 1. Wenn z irgend eine Function der beyden Veränderlichen x und y bezeichnet, die Natur jener Differenzialgleichung zu bestimmen, durch welche die zwischen den Differenzialien dx, dy und dz Statt findende Relation ausgedrückt wird.

Auflösung.

Sey

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

die Gleichung, welche die Beziehung der Differenzialien dx, dy und dz ausdrückt, und in welcher P, Q und R was immer für Functionen von x, y und z seyn mögen.

Erstlich ist erforderlich, daß diese Gleichung entstanden sey durch die Differenziation irgend einer endlichen Gleichung, nachdem man das Differenziale durch irgend eine Größe dividirt hat. Es wird also einen Multiplicator, z. B. M geben, durch welchen die Formel

$$P dx + Q dy + R dz$$

integrabel gemacht wird; denn, würde kein solcher Factor vorhanden seyn, so wäre die vorgelegte Differenzialgleichung absurd, und hätte durchaus keine Bedeutung. Es kömmt also lediglich darauf an, das Merkmahl anzugeben, durch welches solche absurde und nichtssagende Differenzialgleichungen von den reellen unterschieden werden können. Zu diesem Zwecke betrachten wir die vorgelegte Gleichung

$$P dx + Q dy + R dz = 0$$

als reell. Sey M der Factor, durch welchen sie integrabel gemacht wird, so daß also die Formel

$$MP dx + MQ dy + MR dz$$

wirklich das Differenziale irgend einer Function der drey Veränderlichen x, y und z ist. Setzen wir diese Function $= V$, so wird die Gleichung $V = \text{Const.}$ das vollständige Integrale unserer Gleichung seyn. Mag demnach x oder y oder z als unveränderlich betrachtet werden, so muß jeder der Ausdrücke:

$$MQ dy + MR dz; \quad MR dz + MP dx; \quad MP dx + MQ dy$$

für sich integrabel seyn. Man wird daher der Natur der Differenzialien gemäß erhalten:

$$\left(\frac{d.MQ}{dz}\right) - \left(\frac{d.MR}{dy}\right) = 0;$$
$$\left(\frac{d.MR}{dx}\right) - \left(\frac{d.MP}{dz}\right) = 0;$$
$$\left(\frac{d.MP}{dy}\right) - \left(\frac{d.MQ}{dx}\right) = 0;$$

und hieraus ergeben sich, durch wirkliche Entwickelung, folgende drey Gleichungen:

$$\text{I. } M\left(\frac{dQ}{dz}\right) + Q\left(\frac{dM}{dz}\right) - M\left(\frac{dR}{dy}\right) - R\left(\frac{dM}{dy}\right) = 0$$
$$\text{II. } M\left(\frac{dR}{dx}\right) + R\left(\frac{dM}{dx}\right) - M\left(\frac{dP}{dz}\right) - P\left(\frac{dM}{dz}\right) = 0$$
$$\text{III. } M\left(\frac{dP}{dy}\right) + P\left(\frac{dM}{dy}\right) - M\left(\frac{dQ}{dx}\right) - Q\left(\frac{dM}{dx}\right) = 0.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen durch P, die zweyte durch Q und die dritte durch R, so werden sich in der Summe derselben alle Differenzialien von M aufheben, und die übrigen Glieder durch M dividirt folgende Gleichung darstellen:

$$P\left(\frac{dQ}{dz}\right) - P\left(\frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - Q\left(\frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0,$$

welche das Kennzeichen enthält, durch welches die reellen Differenzialgleichungen von den absurden sich unterscheiden, und so oft zwischen den Größen P, Q, R diese Bedingungsgleichung Statt findet, ist die vorgelegte Differenzialgleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

reell. Übrigens muß hier bemerkt werden, daß ein solcher, in Klammern eingeschlossener Ausdruck $\left(\frac{dQ}{dz}\right)$ den Werth von $\frac{dQ}{dz}$ bezeichne, wenn bey der Differenziation von Q bloß z als veränderlich behandelt wird. Eben dieß gilt auch von den übrigen Ausdrücken, welche also immer auf endliche Ausdrücke zurückgeführt werden.

Zusatz 1.

§. 2. Ist demnach die Differenzialgleichung zwischen drey Veränderlichen

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

gegeben, so hat man vor Allem darauf zu sehen, ob das aufgefundene Kennzeichen Statt findet, oder nicht. Im ersteren Falle ist die Gleichung reell, im letztern aber absurd und bedeutungslos, und die Auflösung irgend eines Problemes kann nie auf eine solche Gleichung führen.

Zusatz 2.

§. 3. Das aufgefundene Kennzeichen läßt sich auch auf folgende Weise darstellen:

$$\left(\frac{PdQ - QdP}{dz}\right) + \left(\frac{QdR - RdQ}{dx}\right) + \left(\frac{RdP - PdR}{dy}\right) = 0,$$

wenn die Klammern nicht auf die endlichen Größen bezogen werden, sondern bloß die Differenziation auf eine bestimmte Veränderliche beschränken.

Zusatz 3.

§. 4. Wenn diese Gleichung, welche den Charakter der Realität besitzt, auf ähnliche Art durch PQR dividirt wird, so wird sie folgende Form annehmen:

$$\left(\frac{d.\,l\frac{Q}{P}}{R\,dz}\right)+\left(\frac{d.\,l\frac{R}{Q}}{P\,dx}\right)+\left(\frac{d.\,l\frac{P}{R}}{Q\,dy}\right)=o,$$

welche man auch so ausdrücken kann:

$$\left(\frac{\frac{dQ}{Q}-\frac{dP}{P}}{R\,dz}\right)+\left(\frac{\frac{dR}{R}-\frac{dQ}{Q}}{P\,dx}\right)+\left(\frac{\frac{dP}{P}-\frac{dR}{R}}{Q\,dy}\right)=o.$$

Anmerkung 1.

§. 5. So wie nun alle Differenzialgleichungen zwischen zwey veränderlichen Größen immer reell sind, und durch dieselben immer eine gewisse Relation zwischen den Veränderlichen selbst bestimmt wird, eben so lernen wir hieraus, daß sich die Sache ganz anders verhalte bey Differenzialgleichungen mit drey veränderlichen Größen, und daß die Gleichungen von der Form

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=o$$

keine bestimmte Relation zwischen den endlichen Größen x, y und z festsetzen, wenn die Größen P, Q, R nicht so beschaffen sind, daß das gefundene Merkmahl Statt findet. Es leuchtet hieraus ein, daß unendlich viele solche Differenzialgleichungen zwischen drey Veränderlichen vorgelegt werden können, welchen durchaus keine endliche Relation entspricht, und die daher keine Bedeutung haben. Es können nämlich nach Belieben solche Gleichungen gebildet werden, die keinem bestimmten Zwecke angemessen sind; denn jedes bestimmte Problem, welches auf eine Differenzialgleichung zwischen drey Veränderlichen führt, muß nothwendig die angegebene Eigenschaft besitzen, weil es sonst durchaus keine Bedeutung hätte. Eine solche nichtssagende Gleichung ist z. B. $z\,dx+x\,dy+y\,dz=o$, und es läßt sich für z keine Function von x und y denken, welche dieser Gleichung Genüge leistet; denn gibt auch unser Merkmahl für dieses Beyspiel den Ausdruck

$$-x-y-z,$$

so zeigt er dennoch, weil er nicht verschwindet, die Absurdität jener Gleichung.

Anmerkung 2.

§. 6. Um das aufgefundene Merkmahl leichter auf alle vorgelegten Fälle anwenden zu können, bestimme man zuerst aus der Gleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

folgende Werthe:

$$\left(\frac{dQ}{dz}\right) - \left(\frac{dR}{dy}\right) = L,$$
$$\left(\frac{dR}{dx}\right) - \left(\frac{dP}{dz}\right) = M,$$
$$\left(\frac{dP}{dy}\right) - \left(\frac{dQ}{dx}\right) = N,$$

so wird unser Kennzeichen in folgendem Ausdrucke enthalten seyn:

$$LP + MQ + NR.$$

Verschwindet dieser Ausdruck, so wird die vorgelegte Gleichung reell seyn, und irgend einer endlichen Gleichung entsprechen; verschwindet aber jener Ausdruck nicht, so wird die vorgelegte Gleichung absurd, und an ihre Integration nicht einmahl zu denken seyn. So wird man in dem oben angeführten Beyspiele erhalten:

$$P = z; \quad Q = x; \quad R = y;$$

also

$$L = -1; \quad M = -1 \quad \text{und} \quad N = -1,$$

und daher zeigt das Kennzeichen $-x-y-z$ die Absurdität an. Nun wollen wir aber auch ein Beyspiel einer reellen Gleichung anführen. Sey

$$dx\,(y^2 + nyz + z^2) - x\,(y + nz)\,dy - xzdz = 0;$$

weil hier

$$P = y^2 + nyz + z^2; \quad Q = -xy - nxz \quad \text{und} \quad R = -xz$$

ist, so wird man erhalten:

$$L = -nx; \quad M = -3z - ny \quad \text{und} \quad N = 3y + 2nz,$$

also

$$LP + MQ + NR =$$
$$= -nx(y^2 + nyz + z^2) + x(y + nz)(3z + ny) - xz(3y + 2nz)$$
$$= x(-ny^2 - n^2yz - nz^2 + 3yz + 3nz^2 + ny^2 + n^2yz - 3yz - 2nz^2) = 0.$$

Da also hier der Bedingungsausdruck verschwindet, so ist diese Differenzialgleichung für reell anzusehen. Eben so wenn die Gleichung

$$2dx\,(y + z) + dy\,(x + 3y + 2z) + dz\,(x + y) = 0$$

gegeben ist, wird, weil

$$P = 2y + 2z;\quad Q = x + 3y + 2z;\quad R = x + y$$

ist;

$$L = 2 - 1 = 1;\quad M = 1 - 2 = -1 \text{ und } N = 2 - 1 = 1,$$

und daher

$$LP + MQ + NR = 2y + 2z - x - 3y - 2z + x + y = 0,$$

folglich wird jene Differenzialgleichung reell seyn.

Aufgabe 2.

§. 7. Wenn eine Differenzialgleichung zwischen den drey Veränderlichen x, y, z gegeben ist, und Realität hat, das Integrale derselben aufzufinden, damit man erkenne, was für eine Function die eine Veränderliche von den übrigen sey.

Auflösung.

Sey gegeben die Differenzialgleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

bey welcher die Größen P, Q, R solche Functionen von x, y, z seyn sollen, daß der früher gefundene Charakter der Realität Genüge leistet; denn wenn diese Gleichung nicht reell wäre, so würde es lächerlich seyn, die Integration derselben zu versuchen. Nehmen wir also an, diese Gleichung sey reell, so wird es zwischen den Größen x, y und z irgend eine Relation geben, welche der vorgelegten Gleichung Genüge leistet; um nun diese aufzufinden, erwäge man, daß, wenn in der Integralgleichung eine der Veränderlichen, z. B. z als unveränderlich angesehen wird, aus dem Differenziale derselben, so bald es $= 0$ gesetzt wird, folgende Gleichung entstehen müsse:

$$Pdx + Qdy = 0.$$

Wird also umgekehrt eine Veränderliche, nämlich z als constant behandelt, so wird die Integration der Differenzialgleichung

$$Pdx + Qdy = 0,$$

welche nur zwey Veränderliche enthält, auf die gesuchte Integralgleichung führen, wenn nur die constante Größe, welche durch die Integration eingeführt wird, den wahren Werth von z erhält. Hieraus

folgern wir nun folgende Regel für die Integration der vorgelegten Gleichung.

Man betrachte eine der Veränderlichen, nämlich z als constant, damit man die Gleichung

$$Pdx + Qdy = 0$$

bloß zwischen zwey Veränderlichen x und y erhalte, dann suche man die vollständige Integralgleichung derselben, welche demnach eine willkürliche Constante C enthalten wird; ferner betrachte man diese Constante C als irgend eine Function von z, sehe nun auch z als veränderlich an, und differenzire die gefundene Integralgleichung von Neuem, so daß nun die drey Größen x, y und z als variabel behandelt werden, und vergleiche die resultirende Differenzialgleichung mit der vorgelegten $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, wo sich zwar die Functionen P und Q von selbst ergeben werden; die Function R aber, verglichen mit jener Größe, welche das Element dz enthält, das Verhältniß bestimmen wird, in welchem die Größe z zur Constanten C steht, und so wird man die gesuchte Integralgleichung erhalten, welche zugleich vollständig seyn wird, da in derselben immer ein gewisser unveränderlicher Theil der Größe C wirklich unserer Willkür überlassen bleibt, indem diese Bestimmung aus dem Differenziale von C selbst abgeleitet werden muß.

Zusatz 1.

§. 8. Es wird also die Integration solcher Differenzialgleichungen mit drey veränderlichen Größen auf die Integration der Differenzialgleichungen mit zwey Veränderlichen zurückgeführt, die also, so oft es möglich ist, nach den im vorigen Buche gelehrten Methoden auszuführen ist.

Zusatz 2.

§. 9. Diese Integration läßt sich also auf dreyerley Art ausführen, je nachdem entweder z oder y oder x als constant betrachtet wird; immer aber muß dieselbe Integralgleichung zum Vorschein kommen, wenn die Differenzialgleichung reell seyn soll.

Zusatz 3.

§. 10. Wenn diese Methode bey einer unmöglichen Differenzialgleichung versucht wird, so wird man jene Constante C nicht so bestim-

men können, daß sie bloß jene Veränderliche enthält, welche für constant angesehen wurde. Auch hieraus ließe sich ein Criterium für die Beurtheilung der Realität ableiten.

Anmerkung.

§. 11. Um nun diese Rechnung in ein helleres Licht zu setzen, wollen wir dieselbe zuerst anzuwenden suchen bey folgender unmöglichen Gleichung:

$$z dx + x dy + y dz = 0.$$

Wird hier z als constant betrachtet, so erhält man

$$z dx + x dy = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{z dx}{x} + dy = 0,$$

und das Integrale hievon ist:

$$z lx + y = C,$$

wobey C eine Function von z bezeichnet. Man differenzire also diese Gleichung, indem man auch z als veränderlich nimmt, und setze $dC = D dz$, wo D auch eine Function von z allein ist, so wird man erhalten:

$$\frac{z dx}{x} + dy + dz lx = D dz \quad \text{oder}$$

$$z dx + x dy + dz (x lx - D x) = 0;$$

es müßte also $x lx - D x = y$ oder $D = lx - \frac{y}{x}$ seyn, was absurd ist; ferner führe man in der reellen Gleichung

$$2 dx (y + z) + dy (x + 3y + 2z) + dz (x + y) = 0$$

die oben erklärte Operation auf folgende Art durch. Man betrachte y als constant, so daß

$$2 dx (y + z) + dz (x + y) = 0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{2 dx}{x + y} + \frac{dz}{y + z} = 0$$

wird, so ist das Integrale dieser Gleichung:

$$2 l (x + y) + l (y + z) = C,$$

wo C auch y enthält. Sey also $dC = D dy$, so gibt die Differenzidtion, wenn nun auch y als veränderlich angesehen wird:

$$\frac{2 dx + 2 dy}{x + y} + \frac{dy + dz}{y + z} = D dy \quad \text{oder}$$

$$2 dx (y + z) + 2 dy (y + z) + dy (x + y) + dz (x + y) =$$
$$= D dy (x + y) (y + z).$$

Durch Vergleichung dieses Ausdrucks mit der oben vorgelegten Form erhält man $D = 0$, also $DC = 0$, und es wird C wirklich constant, so daß das Integrale

$$(x + y)^2 (y + z) = \text{Const.}$$

wird. Wir wollen also einige solche Beyspiele entwickeln.

Beyspiel 1.

§. 12. Man suche das Integrale folgender reellen Differenzialgleichung:

$$dx (y + z) + dy (x + z) + dz (x + y) = 0.$$

Zuerst ist einleuchtend, daß diese Gleichung reell sey, weil

$$P = y + z; \quad L = 1 - 1 = 0$$
$$Q = x + z; \quad M = 1 - 1 = 0$$
$$R = x + y; \quad N = 1 - 1 = 0.$$

Man nehme also z constant, so wird man die Gleichung erhalten:

$$dx (y + z) + dy (x + z) = 0 \quad \text{oder}$$
$$\frac{dx}{x + z} + \frac{dy}{y + z} = 0,$$

und das zugehörige Integrale ist:

$$l (x + z) + l (y + z) = f (z).$$

Man setze also

$$(x + z) (y + z) = Z,$$

wo die Natur der Function Z aus der Differenziation zu bestimmen ist. Es wird aber

$$dx (y + z) + dy (x + z) + dz (x + y + 2z) = dZ,$$

und wenn man von dieser Gleichung die vorgelegte abzieht, so findet man

$$2zdz = dZ \quad \text{oder} \quad Z = z^2 + C;$$

so daß also die vollständige Integralgleichung folgende ist:

$$(x + z) (y + z) = z^2 + C \quad \text{oder}$$
$$xy + xz + yz = C.$$

Diese Gleichung läßt sich zwar aus der vorgelegten

$$ydx + zdx + xdy + zdy + xdz + ydz = 0$$

leicht ableiten, da je zwey Glieder mit einander verbunden, integrabel sind.

Beyspiel 2.

§. 13. Die vollständige Integralgleichung folgender reellen Differenzialgleichung zu finden:

$$dx\,(ay - bz) + dy\,(cz - ax) + dz\,(bx - cy) = 0.$$

Die Realität dieser Gleichung wird auf folgende Art nachgewiesen: Da

$$\begin{aligned} P &= ay - bz, &\text{so wird } L &= 2c \\ Q &= cz - ax, &\text{» »}\ M &= 2b \\ R &= bx - cy, &\text{» »}\ N &= 2a; \end{aligned}$$

folglich ist offenbar

$$LP + MQ + NR = 0.$$

Nun nehme man z constant, so daß

$$\frac{dx}{cz - ax} + \frac{dy}{ay - bz} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{1}{a}\, l\, \frac{ay - bz}{cz - ax} = f\,(z)$$

wird; man setze also

$$\frac{ay - bz}{cz - ax} = Z,$$

so erhält man durch Differenziation:

$$\frac{a\,dx\,(ay - bz) + a\,dy\,(cz - ax) + a\,dz\,(bx - cy)}{(cz - ax)^2} = dZ,$$

und durch Vergleichung dieses Ausdrucks mit der vorgelegten Gleichung wird $dZ = 0$ und $Z = C$, so daß man folgende vollständige Integralgleichung erhält:

$$\frac{ay - bz}{cz - ax} = n \quad \text{oder} \quad ay + nax = (b + nc)\, z.$$

Nimmt man für die Integralgleichung den Ausdruck

$$Ax + By + Cz = 0,$$

so müßten diese Constanten so beschaffen seyn, daß

$$Ac + Bb + Ca = 0$$

wird, und so wird die willkürliche Constante in einer eleganteren Form in Rechnung gebracht.

Zusatz.

§. 14. Diese Gleichung wird also integrabel gemacht, wenn man dieselbe durch $(cz - ax)^2$ dividirt, und aus demselben Grunde

erreicht man eben diesen Zweck durch die Divisoren

$$(ay - bz)^2 \text{ und } (bx - cy)^2.$$

Denn dem Integrale zu Folge haben diese Divisoren ein beständiges Verhältniß zu einander, denn wenn $\frac{ay - bz}{cz - ax} = n$ gesetzt wird, so wird man erhalten:

$$\frac{bx - cy}{cz - ax} = \frac{-b - nc}{a} \text{ und } \frac{bx - cy}{ay - bz} = \frac{-b - nc}{na}.$$

Beyspiel 3.

§. 15. Die vollständige Integralgleichung der reellen Differenzialgleichung

$$dx(y^2 + yz + z^2) + dy(z^2 + xz + x^2) + dz(x^2 + xy + y^2) = 0$$

zu bestimmen.

Die Realität dieser Gleichung erhellt daraus, weil

$$P = y^2 + yz + z^2$$
$$Q = z^2 + xz + x^2$$
$$R = x^2 + xy + y^2$$

also

$$L = 2z + x - x - 2y = 2(z - y)$$
$$M = 2x + y - y - 2z = 2(x - z)$$
$$N = 2y + z - z - 2x = 2(y - x)$$

ist, und daher wird

$$LP + MQ + NR = 2(z^3 - y^3) + 2(x^3 - z^3) + 2(y^3 - x^3) = 0.$$

Um nun das Integrale zu finden, nehme man z als unveränderlich, so wird man erhalten:

$$\frac{dx}{x^2 + xz + z^2} + \frac{dy}{y^2 + yz + z^2} = 0,$$

und das Integrale hiervon ist:

$$\frac{2}{z\sqrt{3}} \text{ arc. tang. } \frac{x\sqrt{3}}{2z + x} + \frac{2}{z\sqrt{3}} \text{ arc. tang. } \frac{y\sqrt{3}}{2z + y} = f(z),$$

welche Gleichung durch Verbindung dieser Kreisbogen übergeht in, folgende:

$$\frac{2}{z\sqrt{3}} \text{ arc. tang. } \frac{(xz + yz + xy)\sqrt{3}}{2z^2 + xz + yz - xy} = f(z).$$

Man setze also

$$\frac{xz + yz + xy}{2z^2 + xz + yz - xy} = Z,$$

differenzire diese Gleichung, indem man alle drey Größen x, y, z als veränderlich ansieht, so wird man erhalten:

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} 2zdx(y^2+yz+z^2)+2zdy(z^2+xz+x^2) \\ -2xdz(z^2+yz+y^2)-2ydz(z^2+xz+x^2) \end{array}\right\}}{(2z^2+xz+yz-xy)^2}=dZ,$$

weil aber der vorgelegten Gleichung zu Folge

$$dx(y^2+yz+z^2)+dy(z^2+xz+x^2)=-dz(x^2+xy+y^2)$$

ist, so wird man durch Substitution finden:

$$\frac{-2zdz(x^2+xy+y^2)-2xdz(z^2+yz+y^2)-2ydz(z^2+xz+x^2)}{(2z^2+xz+yz-xy)^2}=dZ$$

oder

$$\frac{-2dz(x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+x^2y+xy^2+3xyz)}{(2z^2+xz+yz-xy)^2}=dZ,$$

welche Gleichung folgende Form annimmt:

$$\frac{-2dz(x+y+z)(xy+xz+yz)}{(2z^2+xz+yz-xy)^2}=dZ.$$

Weil aber $Z=\frac{xy+xz+yz}{2z^2+xz+yz-xy}$ ist, so wird man erhalten:

$$\frac{-2Z^2dz(x+y+z)}{xy+xz+yz}=dZ, \text{ oder}$$

$$\frac{-dZ}{Z^2}=\frac{2dz(x+y+z)}{xy+xz+yz}.$$

Es muß also nothwendig auch $\frac{xy+xz+yz}{x+y+z}$ bloß eine Function von z seyn, welche wir durch Σ bezeichnen wollen, so daß

$$-\frac{dZ}{Z^2}=\frac{2dz}{\Sigma}$$

wird. Allein die ganze Rechnung ist bloß von der Form der Function Z abhängig, und kann auf folgende Art ausgeführt werden. Da

$$Z=\frac{xy+xz+yz}{2z^2+xz+yz-xy}$$

ist, so wird man finden

$$1+Z=\frac{2z^2+2xz+2yz}{2z^2+xz+yz-xz}, \text{ folglich}$$

$$\frac{1+Z}{Z}=\frac{2z(x+y+z)}{xy+xz+yz}.$$

Mit Hülfe dieses Werthes werden die Größen x und y aus der Differenzialgleichung weggeschafft, und es wird

$$-\frac{dZ}{Z^2} = dz \cdot \frac{z(x+y+z)}{xy+xz+yz} = dz \cdot \frac{1+Z}{Zz},$$

also

$$\frac{-dZ}{Z(1+Z)} = \frac{dz}{z} = \frac{-dZ}{Z} + \frac{dZ}{1+Z},$$

folglich durch Integration

$$lz = l\left(\frac{1+Z}{Z}\right) + la,$$

also

$$\frac{1+Z}{Z} = \frac{z}{a} \text{ und } Z = \frac{a}{z-a},$$

so daß demnach die gesuchte Integralgleichung ist:

$$\frac{a}{z-a} = \frac{xy+xz+yz}{2z^2+xz+yz-xy} \text{ oder}$$

$$xy + xz + yz = a(x+y+z),$$

welche höchst einfache Form sich sogleich aus der Gleichung

$$\frac{2z(x+y+z)}{xy+xz+yz} = \frac{1+Z}{Z} = \frac{z}{a}$$

ergibt.

Zusatz.

§. 16. Da das vollständige Integrale der vorgelegten Gleichung

$$xy + xz + yz = a(x+y+z) \text{ oder}$$

$$\frac{xy+xz+yz}{x+y+z} = \text{Const.}$$

ist, so muß sich hieraus, wie man sieht, durch Differenziation auch die vorgelegte Gleichung selbst ergeben. Es erhellt demnach, daß die vorgelegte Gleichung integrabel gemacht werde, wenn man sie dividirt durch $(x+y+z)^2$ oder auch durch $(xy+xz+yz)^2$.

Anmerkung.

§. 17. Aus diesem Beyspiele ersieht man nun, daß die Bestimmung jener Function, welche durch Integration eingeführt wurde, bedeutenden Schwierigkeiten unterliege, und wir haben hier die Function Z nicht ohne Umschweife gefunden; allein jene Untersuchung hätte sich auch hier weit leichter ausführen lassen, denn da wir

$$\frac{xy + xz + yz}{2z^2 + xz + yz - xy} = Z = f(z)$$

gefunden haben, so hätten wir diesen Ausdruck selbst sogleich in einer schönern Form darstellen können, weil nämlich

$$\frac{1}{Z} = \frac{2z^2 + xz + yz - xy}{xy + xz + yz}$$

ist, so wird man erhalten:

$$1 + \frac{1}{Z} = \frac{2z(x + y + z)}{xy + xz + yz},$$

und daher

$$\frac{xy + xz + yz}{x + y + z} = \frac{2Zz}{1 + Z} = f(z).$$

Verlassen wir also die Function Z und setzen sogleich

$$\frac{xy + xz + yz}{x + y + z} = \Sigma = f(z),$$

so wird, wenn die Differenzialien genommen werden, für sich einleuchten, daß $d\Sigma = 0$, also $\Sigma =$ Const. werde. Diese Aufgabe läßt sich noch leichter auflösen, wenn auch y constant genommen, und das Integrale genommen wird, denn dann kömmt man auf ähnliche Weise auf folgende Gleichung:

$$\frac{xy + xz + yz}{x + y + z} = Y = f(y).$$

Da nun dieser Ausdruck sowohl eine Function von z als von y seyn muß, so ist derselbe nothwendig eine constante Größe, und man erhält deßhalb die vollständige Integralgleichung

$$xy + xz + yz = a(x + y + z).$$

Beyspiel 4.

§. 18. Die vollständige Integralgleichung aufzufinden, welche der reellen Differenzialgleichung

$$dx(x^2 - y^2 + z^2) - z^2dy + zdz(y - x) + \frac{xdz}{z}(y^2 - x^2) = 0$$

zugehört.

Die Realität dieser Gleichung läßt sich auf folgende Art nachweisen:

Wegen $P = x^2 - y^2 + z^2$ wird man erhalten $L = -3z - \frac{2xy}{z}$

» $Q = -z^2$ » » » $M = -3z + \frac{y^2}{z} - \frac{3x^2}{z}$

» $R = z(y-x) + \frac{x}{z}(y^2 - x^2)$ » $N = -2y$,

und daher verschwindet nach gehöriger Rechnung der Ausdruck

$$LP + MQ + NR.$$

Setzen wir nun z constant, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$dx\,(x^2 - y^2 + z^2) - z^2 dy = 0,$$

deren Integration nicht bekannt wäre, wenn wir nicht sehen würden, daß $y = x$ derselben als particuläre Auflösung Genüge leistet. Setzen wir aber $y = x + \frac{z^2}{v}$, so werden wir das vollständige Integrale hieraus entwickeln können, denn es wird

$$dx\left(z^2 - \frac{2xz^2}{v} - \frac{z^4}{v^2}\right) - z^2 dx + \frac{z^4 dv}{v^2} = 0,$$

also

$$dv - \frac{2xv\,dx}{z^2} = dx,$$

welche Gleichung mit $e^{\frac{-x^2}{z^2}}$ multiplicirt, das Integrale

$$e^{\frac{-x^2}{z^2}} v = \int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx + f(z)$$

gibt, wobey zu bemerken ist, daß bey der Integration der Formel $\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx$, die Größe z als constant betrachtet werde, und daß $v = \frac{z^2}{y-x}$ sey, so daß man erhält:

$$\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx = \frac{e^{\frac{-x^2}{z^2}} z^2}{y-x} + Z.$$

Wenn wir nun diese Gleichung differenziren wollen, indem wir auch z als veränderlich ansehen, so biethet sich hier die Schwierigkeit dar, wie man das Differenziale der Größe $\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx$, welches aus der Veränderlichkeit von z entspringt, bestimmen müsse. Man muß sich also aus den ersten Principien erinnern, daß wenn

$$dV = S\,dx + T\,dz$$

ist, die Gleichung Statt finde $\left(\frac{dT}{dx}\right) = \left(\frac{dS}{dz}\right)$, und daher, wenn z constant genommen wird, $T = \int dx \left(\frac{dS}{dz}\right)$.

Nun ist in unserem Falle

$$S = e^{\frac{-x^2}{z^2}} \quad \text{und} \quad V = \int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx,$$

wenn z constant genommen wird, daher ist

$$\left(\frac{dS}{dz}\right) = e^{\frac{-x^2}{z^2}} \frac{2x^2}{z^3},$$

also

$$T = \frac{2}{z^3} \int e^{\frac{-x^2}{z^2}} x^2 dx.$$

Es ist daher das vollständige Differenziale der Größe $\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx$, welches aus der gleichzeitigen Veränderlichkeit von x und z entsteht:

$$e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx + \frac{2dz}{z^3} \int e^{\frac{-x^2}{z^2}} x^2 dx,$$

und diesem muß das Differenziale des andern Theils $\frac{e^{\frac{-x^2}{z^2}} z^2}{y-x} + Z$, nämlich

$$e^{\frac{-x^2}{z^2}} \left(\frac{2zdz}{y-x} - \frac{z^2dy + z^2dx}{(y-x)^2} + \frac{2x^2dz - 2xzdx}{z(y-x)}\right) + dZ$$

gleich seyn. Es macht aber die Integralformel $\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} x^2 dx$, in welcher z als unveränderlich genommen ist, noch Schwierigkeit; sie läßt sich aber auf den erstern Ausdruck $\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx$ zurückführen, wenn man

$$\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} x^2 dx = A e^{\frac{-x^2}{z^2}} x + B \int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx$$

setzt; denn wenn bloß x als veränderlich angesehen wird, erhält man durch Differenziation:

$$x^2 dx = A dx - \frac{2Ax^2dx}{z^2} + B dx,$$

also

$$A = -\tfrac{1}{2}z^2 \quad \text{und} \quad B = -A = \tfrac{1}{2}z^2,$$

so daß

$$\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} x^2 dx = -\tfrac{1}{2} e^{\frac{-x^2}{z^2}} x z^2 + \tfrac{1}{2} z^2 \int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx$$

wird. Da demnach

$$\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx = \frac{e^{\frac{-x^2}{z^2}} z^2}{y-x} + Z$$

ist, so wird man erhalten:

$$\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} x^2 dx = -\tfrac{1}{2} e^{\frac{-x^2}{z^2}} x z^2 + \frac{e^{\frac{-x^2}{z^2}} z^4}{2(y-x)} + \tfrac{1}{2} Z z^2.$$

Nach gehöriger Substitution wird demnach folgende Differenzialgleichung entstehen:

$$e^{\frac{-x^2}{z^2}} \left(dx - \frac{x dz}{z} + \frac{z dz}{y-x} \right) + \frac{Z dz}{z} =$$

$$e^{\frac{-x^2}{z^2}} \left(\frac{2 z dz}{y-x} - \frac{z^2 dy}{(y-x)^2} + \frac{z^2 dx}{(y-x)^2} - \frac{2 x dx}{y-x} + \frac{2 x^2 dz}{z(y-x)} \right) + dZ,$$

welche in folgende Form übergeht:

$$e^{\frac{-x^2}{z^2}} \left(\frac{dx(y+x)}{y-x} - \frac{z^2 dx}{(y-x)^2} + \frac{z^2 dy}{(y-x)^2} - \frac{z dz}{y-x} - \frac{x(y+x) dz}{z(y-x)} \right) = \frac{z dZ - Z dz}{z}$$

oder

$$\frac{e^{\frac{-x^2}{z^2}}}{(y-x)^2} \left[dx(y^2 - x^2 - z^2) + z^2 dy - z dz (y-x) - \frac{x dz}{z}(y^2 - x^2) \right] = \frac{z dZ - Z dz}{z}.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der vorgelegten, so leuchtet ein, daß

$$z dZ - Z dz = 0 \quad \text{oder} \quad Z = nz$$

seyn müsse, so daß also das vollständige Integrale der vorgelegten Gleichung folgendes ist:

$$\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx = \frac{e^{\frac{-x^2}{z^2}} z^2}{y-x} + nz,$$

wenn man nämlich in dem Integralausdrucke $\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx$ die Größe z als constant betrachtet.

Zusatz.

§. 19. Die vorgelegte Gleichung wird also integrabel gemacht, wenn man sie durch $\frac{1}{(y-x)^2} e^{\frac{-x^2}{z^2}}$ multiplicirt, und dann ist das Integrale die gefundene Gleichung selbst.

Anmerkung.

§. 20. Dieses Beyspiel ist vorzüglich merkwürdig, weil wir bey der Auflösung desselben einige Kunstgriffe zu Hülfe nehmen mußten, die wir bey den vorhergehenden nicht nöthig hatten. Allein der Ausdruck $\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx$ scheint das Integrale nicht bestimmt genug darzustellen. Denn wenn in demselben z constant genommen wird, so wird die bey der Integration einzuführende Constante durch nz nicht bestimmt, wenigstens wenn das Gesetz nicht angegeben wird, nach welchem das Integrale $\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx$ genommen werden muß. Ob es also für $x=0$ verschwinden soll, oder auf irgend eine andere Weise zu bestimmen sey? Dieser Zweifel wird aber beseitigt werden, wenn wir die gefundene Gleichung durch z dividiren, so daß der Integralausdruck übergeht in $\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} \frac{dx}{z}$. Da hier $\frac{dx}{z} = d \,.\, \frac{x}{z}$ ist, so ist einleuchtend, daß derselbe irgend eine Function von $\frac{x}{z}$ bezeichne, und, daß wenn $\frac{x}{z} = p$ gesetzt wird, unsere Integralgleichung seyn werde:

$$\int e^{-p^2} dp + \text{Const.} = e^{-p^2} \frac{z}{y-x},$$

und so hat jene Bedingung, nach welcher in dem Integralausdrucke die Größe z als unveränderlich anzusehen war, ferner nicht mehr Statt, sondern das Integrale wird eben so bestimmt, als enthielte die Gleichung bloß zwey veränderliche Größen. Hätten wir diesen Umstand erwogen, so würde das vollständige Differenziale der Formel $\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx$, wegen der Veränderlichkeit von x und z, keine Schwierigkeiten gemacht haben. Denn wenn wir auf die Gleichung

$$\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx = e^{\frac{-x^2}{z^2}} \frac{z^2}{y-x} + f(z)$$

kommen, so müssen wir sie auf folgende Art darstellen:

$$\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} \frac{dx}{z} = \int e^{\frac{-x^2}{z^2}} d.\frac{x}{z} = e^{\frac{-x^2}{z^2}} \frac{z}{y-x} + Z.$$

Da nun hier in dem Integralausdrucke auch z als veränderlich erscheint, so wird man, durch Differenziation desselben, wenn x, y und z sämmtlich als veränderlich genommen werden, erhalten:

$$e^{\frac{-x^2}{z^2}}\left(\frac{dx}{z} - \frac{x\,dz}{z^2}\right) =$$

$$= e^{\frac{-x^2}{z^2}}\left(\frac{dz}{y-x} + \frac{z\,dx - z\,dy}{(y-x)^2} - \frac{2x\,dx}{z(y-x)} + \frac{2x^2\,dz}{z^2(y-x)}\right) + dZ$$

oder

$$e^{\frac{-x^2}{z^2}}\left(\frac{dx(y+x)}{z(y-x)} - \frac{z\,dx}{(y-x)^2} + \frac{z\,dy}{(y-x)^2} - \frac{x\,dz(y+x)}{z^2(y-x)} - \frac{dz}{y-x}\right) = dZ,$$

welche Gleichung sich auf folgende Form bringen läßt:

$$\frac{e^{\frac{-x^2}{z^2}}}{z(y-x)^2}\left[dx(y^2-x^2-z^2)+z^2dy-zdz(y-x)-\frac{xdz}{z}(y^2-x^2)\right]=dZ,$$

woraus erhellt, daß $dZ = o$ und $Z = \text{Const.}$ seyn müsse, und es kömmt die vorhin gefundene Integralgleichung zum Vorschein.

Anmerkung 2.

§. 21. Daßselbe Integrale würde man auch erhalten haben, wenn man statt z eine der beyden andern Veränderlichen x oder y als constant angenommen hätte; wobey im Allgemeinen zu bemerken ist, daß, wenn eine Gleichung von der Form

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = o$$

sich auflösen läßt wenn z constant genommen wird, auch die Auflösung gelingen müsse, welche der drey Veränderlichen man auch als unveränderlich ansehen mag, obgleich dieß bisweilen nicht so leicht in die Augen fällt. Wenn in der vorgelegten Gleichung y als unveränderlich betrachtet wird, so wird man folgende Gleichung aufzulösen haben:

$$dx\,(x^2 + z^2 - y^2) - z\,dz\,(x - y) - \frac{x\,dz}{z}\,(x^2 - y^2) = o,$$

und da diese durch die Multiplication mit z übergeht in die Gleichung:

$$(z\,dx - x\,dz)\,(x^2 + z^2 - y^2) + y\,z^2\,dz = o,$$

so sieht man leicht, daß dieselbe vereinfacht werde, wenn man $x = p$ setzt; denn weil

$$z\,dx - x\,dz = z^2\,dp$$

ist, so wird man dann erhalten:

$$dp\,(p^2 z^2 + z^2 - y^2) + y\,dz = 0.$$

Sey ferner $z = qy$, so wird man finden:

$$dp\,(p^2 q^2 + q^2 - 1) + dq = 0,$$

und da dieser Gleichung die Substitution $q = \frac{1}{p}$ Genüge leistet, setze man $q = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$, und man wird erhalten:

$$dp\left(\frac{2p}{r} + \frac{p^2}{r^2} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{pr} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{dp}{p^2} - \frac{dr}{r^2} = 0$$

oder

$$dp\,(2p^2 r + p^3 + 2r + p) - p\,dr = 0$$

oder

$$dr - \frac{2r\,dp\,(p^2 + 1)}{p} = dp\,(p^2 + 1).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{1}{p^2} e^{-p^2}$ und integrirt dann, so ergibt sich

$$e^{-p^2} \frac{r}{p^2} = \int e^{-p^2} \frac{dp\,(1 + p^2)}{p^2}.$$

Es ist aber

$$\int e^{-p^2} \frac{dp}{p^2} = - e^{-p^2} \frac{1}{p} - 2\int e^{-p^2}\,dp,$$

und daher

$$e^{-p^2}\left(\frac{r}{p^2} + \frac{1}{p}\right) = - \int e^{-p^2}\,dp.$$

Weil nun

$$p = \frac{x}{z} \text{ und } \frac{1}{r} = \frac{z}{y} - \frac{z}{x} = \frac{z\,(x - y)}{xy}$$

ist, so wird man erhalten:

$$r = \frac{xy}{z\,(x - y)},\ \frac{r}{p^2} = \frac{yz}{x\,(x - y)} \text{ und } \frac{r}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{z}{x - y},$$

und daher wird unsere Integralgleichung seyn:

$$\int e^{\frac{-x^2}{z^2}}\,d\,.\,\frac{x}{z} = e^{\frac{-x^2}{z^2}}\,.\,\frac{z}{y - x} + f\,(y).$$

Vergleicht man das Differenziale dieser Gleichung, indem man auch y als veränderlich ansieht, mit der vorgelegten Gleichung, so ergibt sich das obige Integrale $f(y) = \text{Const.}$

Da in diesen Beyspielen die Veränderlichen x, y und z durchaus dieselben Dimensionen haben, so will ich nun die allgemeine Methode, solche Gleichungen zu behandeln, aus einander setzen.

Aufgabe 3.

§. 22. Wenn in der Differenzialgleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz = o$$

die Größen P, Q, R homogene Functionen von x, y und z sind, die also durchaus dieselbe Anzahl von Dimensionen haben, so soll das Integrale derselben, wenn anders dasselbe reell ist, gefunden werden.

Auflösung.

Die Anzahl der Dimensionen, welche die drey Veränderlichen x, y und z in den Functionen P, Q, R bilden, sey n; so wird man, wenn $x = pz$ und $y = qz$ gesetzt wird, erhalten:

$$P = z^n S; \quad Q = z^n T \quad \text{und} \quad R = z^n V;$$

so daß nun S, T, V Functionen von zwey Veränderlichen p und q allein seyn werden. Da nun

$$dx = pdz + zdp \quad \text{und} \quad dy = qdz + zdq$$

ist, so wird unsere Gleichung folgende Form annehmen:

$$dz\,(pS + qT + V) + Szdp + Tzdq = o$$

oder

$$\frac{dz}{z} + \frac{Sdp + Tdq}{pS + qT + V} = o,$$

welche Gleichung nicht reell seyn kann, wenn nicht die, die beyden Veränderlichen p und q enthaltende Differenzialformel $\frac{Sdp + Tdq}{pS + qT + V}$ für sich integrabel ist; dieß wird aber der Fall seyn, wenn folgende Gleichung Statt findet:

$$(qT + V)\left(\frac{dS}{dq}\right) + pT\left(\frac{dS}{dp}\right) - (pS + V)\left(\frac{dT}{dp}\right) - qS\left(\frac{dT}{dq}\right) - S\left(\frac{dV}{dq}\right) + T\left(\frac{dV}{dp}\right) = o.$$

So oft demnach diese Bedingungsgleichung Statt findet, wird unsere Gleichung reell seyn, und folgendes Integrale haben:

$$lz + \int \frac{S dp + T dq}{pS + qT + V} = \text{Const.},$$

und man hat in dieser Integralgleichung nur statt der Größen p und q die angenommenen Werthe $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ wieder herzustellen.

Zusatz 1.

§. 23. So ist in unserem ersten Beyspiele (§. 12)

$P = y + z$; $Q = x + z$; $R = x + y$; also wird

$S = q + 1$; $T = p + 1$; $V = p + q$ und

$$\frac{dz}{z} + \frac{(q+1)\,dp + (p+1)\,dq}{2pq + 2p + 2q} = 0$$

seyn, und daher ist das Integrale

$$lz + \tfrac{1}{2} l(pq + p + q) = \tfrac{1}{2} l(xy + xz + yz) = C,$$

oder

$$xy + xz + yz = C.$$

Zusatz 2.

§. 24. In dem zweyten Beyspiele (§. 13) ist

$$P = ay - bz;\quad Q = cz - ax;\quad R = bx - cy;$$

daher

$$S = aq - b;\quad T = c - ap;\quad V = bp - cq;$$

also

$$\frac{dz}{z} + \frac{(aq - b)\,dp + (c - ap)\,dq}{0} = 0,$$

und daher

$$(aq - b)\,dp + (c - ap)\,dq = 0,$$

und durch Integration

$$l\,.\,\frac{aq - b}{c - ap} = l\,.\,\frac{ay - bz}{cz - ax} = C.$$

Zusatz 3.

§. 25. Im dritten Beyspiele (§. 14) wird

$S = q^2 + q + 1$; $T = p^2 + p + 1$ und $V = p^2 + pq + q^2$,

und daher ist

$$\frac{dz}{z} + \frac{dp\,(q^2 + q + 1) + dq\,(p^2 + p + 1)}{p^2q + pq^2 + p^2 + 3pq + q^2 + p + q} = 0,$$

wo der Nenner $= (p + q + 1)(pq + p + q)$ ist, und daher läßt sich dieser Bruch in folgende zwey Brüche zerlegen:

$$\frac{-dp - dq}{p + q + 1} + \frac{dp\,(q + 1) + dq\,(p + 1)}{pq + p + q}.$$

Hieraus ergibt sich demnach, wenn man von den Logarithmen auf Zahlen übergeht, nachstehendes Integrale:

$$\frac{z\,(pq + p + q)}{p + q + 1} = \frac{xy + xz + yz}{x + y + z} = C.$$

Zusatz 4.

§. 26. Im vierten Beyspiele (§. 18) wird

$S = p^2 - q^2 + 1;\ T = -1;\ V = q - p + p\,(q^2 - p^2),$ und daher

$$\frac{dz}{z} + \frac{dp\,(p^2 - q^2 + 1) - dq}{0} = 0,$$

also

$$dq = dp\,(p^2 - q^2 + 1).$$

Da also $q = p$ Genüge leistet, so setze man $q = p + \frac{1}{r}$, und man wird erhalten

$$dr - 2pr\,dp = dp,$$

und durch Integration:

$$e^{-p^2} r = \int e^{-p^2} dp = e^{-p^2} \cdot \frac{1}{q - p};$$

so daß das Integrale nun wird:

$$e^{-\frac{x^2}{z^2}} \cdot \frac{z}{y - x} = \int e^{-\frac{x^2}{z^2}} d\,.\,\frac{x}{z} + \text{Const.}$$

Anmerkung.

§. 27. Da also die Differenzialgleichungen zwischen drey Veränderlichen keine besonderen Schwierigkeiten darbiethen, indem ihre Auflösung, wenn sie anders reell sind, immer auf Differenzialgleichungen zweyer Veränderlichen zurückgeleitet werden kann, so will ich diesen Gegenstand nicht weiter verfolgen. Denn was jene Differenzialgleichungen dreyer Veränderlichen betrifft, in welchen die Differenzialien

selbst in höhern Potenzen erscheinen, wie z. B. in der Gleichung

$$Pdx^2 + Qdy^2 + Rdz^2 + 2Sdxdy + 2Tdxdz + 2Vdydz = 0,$$

so kann man im Allgemeinen annehmen, daß sie immer absurd seyen, wenn sie sich nicht durch das Ausziehen der Wurzel auf die Form

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

zurückführen lassen. Denn wie auch die Integralgleichung beschaffen seyn möchte, so könnte denn doch der Werth von z aus ihr so bestimmt werden, daß z als eine Function der Veränderlichen x und y erscheint, und daher wäre

$$dz = pdx + qdy,$$

und diese Veränderlichen x und y würden auf keine Weise von einander abhängen. Dieser Werth $pdx + qdy$ statt dz in der Differenzialgleichung substituirt, müßte also dergestalt Genüge leisten, daß alle Glieder sich gegenseitig tilgten, was aber nicht geschehen könnte, wenn bey der Auflösung der Gleichung der Werth von dz sich so darstellte, daß die Differenzialien dx und dy unter dem Wurzelzeichen erschienen. Da also die Auflösung jener beyspielsweise angeführten Gleichung den Werth

$$dz = \frac{-Tdx - Vdy \pm \sqrt{[(T^2 - PR)\,dx^2 + 2(TV - RS)\,dxdy + (V^2 - QR)\,dy^2]}}{R}$$

gibt, so kann jene Gleichung nicht reell seyn, wenn man die Wurzel nicht ausziehen kann, d. h. wenn sich die Gleichung selbst nicht in Factoren von der Form

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

auflösen läßt. Wenn aber dieß auch der Fall ist, und diese Factoren gleich Null gesetzt werden, so wird die Gleichung demungeachtet nicht reell seyn, wenn nicht das oben angeführte Criterium Statt findet. Hieraus leuchtet nun ein, daß derley Gleichungen, welche vier oder noch mehrere Veränderliche enthalten, ebenfalls nicht mehr Schwierigkeiten haben.

Aufgabe 4.

§. 28. Sey V irgend eine Function der beyden Veränderlichen x und y, in der Integralformel $\int V dx$ aber sey die Größe y als constant behandelt worden; man bestimme das Differenziale des Ausdruckes

$\int V dx$, **wenn außer x auch y als variabel angesehen wird.**

Auflösung.

Man setze jene Integralformel $\int V dx = Z$, so wird Z auch eine Function der zwey Veränderlichen x und y seyn, obgleich bey der Integration y constant genommen wurde. Es ist aber einleuchtend, daß, wenn umgekehrt bey der Differenziation y constant genommen wird, $dZ = V dx$ seyn werde. Wenn man daher auch y als veränderlich betrachtet, so wird das Differenziale der Gleichung $Z = \int V dx$ folgende Form haben:

$$dZ = V dx + Q dy,$$

und es handelt sich nur noch um die Bestimmung der Größe Q.

Weil nun aber die Formel $V dx + Q dy$ das vollständige Differenziale ist, so muß nothwendig $\left(\frac{dV}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ seyn, und daher

$$dx\left(\frac{dQ}{dx}\right) = dx\left(\frac{dV}{dy}\right);$$

aber es ist $dx\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ das Differenziale von Q selbst, wenn y als unveränderlich angesehen wird; und demnach wird man Q finden, wenn man die Formel $dx\left(\frac{dV}{dy}\right)$ so integrirt, daß man y als constant betrachtet, oder man wird erhalten:

$$Q = \int dx \left(\frac{dV}{dy}\right).$$

Deßhalb wird das Differenziale der Gleichung $Z = \int V dx$, welches aus der gleichzeitigen Veränderlichkeit von x und y entspringt, nachstehendes seyn:

$$dZ = V dx + dy \int dx \left(\frac{dV}{dy}\right).$$

Zusatz 1.

§. 29. Weil V eine Function von x und y ist, wenn

$$dV = R dx + S dy$$

gesetzt wird, so wird $S = \left(\frac{dV}{dy}\right)$ seyn, und daher wird

$$dZ = d . \int V dx = V dx + dy \int S dx$$

seyn, und hier ist bey der Integration der Formel $\int S\,dx$ gerade so, wie bey der Integration der Formel $\int V\,dx$, bloß die Größe x als Veränderliche zu nehmen.

Zusatz 2.

§. 30. Wenn V eine homogene Function von x und y ist, und die Anzahl der Dimensionen $= n$ genommen wird, und man setzt

$$dV = R\,dx + S\,dy,$$

so wird man erhalten:

$$Rx + Sy = nV,$$

also

$$S = \frac{nV}{y} - \frac{Rx}{y},$$

und daher

$$\int S\,dx = \frac{n}{y}\int V\,dx - \frac{1}{y}\int Rx\,dx.$$

Weil aber y constant ist, so wird $R\,dx = dV$, daher

$$\int Rx\,dx = \int x\,dV = Vx - \int V\,dx,$$

also

$$\int S\,dx = \frac{n+1}{y}\int V\,dx - \frac{Vx}{y} \text{ und}$$

$$dZ = d\,.\int V\,dx = V\,dx - \frac{Vx\,dy}{y} + \frac{(n+1)\,dy}{y}\int V\,dx.$$

Zusatz 3.

§. 31. Dasselbe Resultat findet man leichter durch die Betrachtung, daß die Function $Z = \int V\,dx$ eine homogene Function von $n+1$ Dimensionen seyn wird; setzt man daher

$$dZ = V\,dx + Q\,dy,$$

so wird

$$Vx + Qy = (n+1)\,Z,$$

also

$$Q = \frac{(n+1)\,Z}{y} - \frac{Vx}{y},$$

wie vorher.

Anmerkung.

§. 32. Obschon ich dieses Problem bereits früher, und zwar in dem vorhergehenden Buche behandelt habe, so hielte ich es dennoch

für zweckmäßig, dasselbe hier einer sorgfältigen Betrachtung zu würdigen, wenn auch dieses Buch den Functionen zweyer oder mehrerer Veränderlichen gewidmet ist. Der Hauptgegenstand aber beruht nicht auf solchen Differenzialgleichungen, wie ich sie in diesem Kapitel integriren gelehrt habe, denn das wäre bald abgemacht; allein da die Differenziation einer Function zweyer Veränderlichen x und y zwey Formeln $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dV}{dy}\right)$ gibt, wobey V eine solche Function bezeichnet, so werden wir hier vorzugsweise solche Aufgaben betrachten, bey welchen eine solche Function V aus irgend einer gegebenen Relation zwischen diesen zwey Ausdrücken $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dV}{dy}\right)$ zu bestimmen ist. Diese Relation aber wird durch eine Gleichung zwischen jenen Formeln und den beyden Veränderlichen x und y ausgedrückt, in welcher auch die gesuchte Function V selbst erscheinen kann; also durch eine Gleichung, auf deren Natur sich die Eintheilung dieser Abhandlung gründen wird. Das allgemeine Problem, mit dessen Auflösung dieser Abschnitt sich beschäftiget, ist nämlich von der Art, daß jene Function V der beyden Veränderlichen x und y gesucht wird, welche irgend einer zwischen den Größen x, y, V, $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dV}{dy}\right)$ vorgelegten Gleichung Genüge leistet. Wenn in dieser Gleichung nur eine der beyden Differenzialformeln $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ oder $\left(\frac{dV}{dy}\right)$ erscheint, so hat die Auflösung keine Schwierigkeit, und wird auf den Fall der Differenzialgleichungen, die bloß zwey Veränderliche enthalten, zurückgeführt. Sind aber jene Formeln beyde zugleich in der vorgelegten Gleichung vorhanden, so ist das Problem weit schwieriger, und kann oft nicht einmahl aufgelöst werden; obgleich man die Auflösung der Differenzialgleichungen, die nur zwey Veränderliche enthalten, zugibt; denn bey dieser Rechnung wird das Problem immer für aufgelöst gehalten, so oft man die Auflösung auf die Integration von Differenzialgleichungen zwischen zwey Veränderlichen zurückleiten kann. Da also der Ausdruck $\left(\frac{dV}{dy}\right)$ in der vorgelegten Gleichung eine Function bezeichnet, in welcher die Größen x, y, V und $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ auf irgend eine Weise verbunden erscheinen, so werden wir die folgende Abhandlung eintheilen nach der Natur dieser Function; je nachdem diese einfacher ist,

und entweder nur die einzige Formel $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ oder außer ihr noch eine von den übrigen oder auch zwey solche Formen oder sogar alle enthält. Denn wenn wir diese Ordnung beobachten, so wird sehr leicht einleuchten, wie viel man noch leisten könne, und wie viel noch zu wünschen übrig bleibt. Nebstdem aber werden einige Hülfssätze rücksichtlich der Transformation zweyer Differenzialformeln in andere veränderliche zu erörtern seyn.

Eintheilung dieses Abschnittes.

Um nun die Theile, welche in diesem Abschnitte behandelt werden müssen, leichter übersehen zu können, so seyen, weil diese Probleme sich auf Functionen zweyer Veränderlichen beziehen, x und z diese beyden Variablen, und z eine Function derselben, die aus irgend einer gegebenen Relation der Differenzialien zu bestimmen ist, so daß zwischen x, y und z eine endliche Gleichung gesucht wird. Wir wollen aber $dz = p\,dx + q\,dy$ setzen, so daß nach unserer angenommenen Bezeichnungsart $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$, also p und q Differenzialformeln sind, welche in der vorgelegten Relation erscheinen. Im Allgemeinen wird demnach jene Relation durch irgend eine Gleichung zwischen den Größen p, q, x, y und z ausgedrückt werden, und dieser Abschnitt würde mit größter Vollkommenheit behandelt werden können, wenn eine Methode bekannt wäre, aus irgend einer zwischen diesen Größen p, q, x, y und z gegebenen Gleichung, eine Gleichung zwischen x, y und z abzuleiten. Da man aber im Allgemeinen diesen Zweck nicht einmahl für Functionen einer einzigen Veränderlichen erreichen kann, so ist dieß um so weniger hier zu erwarten, und wir werden uns daher auf die Entwickelung jener Fälle beschränken müssen, welche einer Auflösung fähig sind. Die Auflösung gelingt aber erstlich, wenn in der vorgelegten Gleichung eine der Differenzialformeln p oder q ganz fehlt, so daß entweder zwischen p, x, y und z oder zwischen q, x, y und z eine Gleichung gegeben ist. Ferner lassen sich jene Gleichungen bequem auflösen, welche bloß die beyden Differenzialformeln p und q enthalten, so daß eine derselben irgend eine Function der andern seyn muß. Hierauf werden also jene Gleichungen folgen, welche außer p und q noch eine der endlichen Größen x

y oder z enthalten. Wir wollen nun sehen, welche Fälle hiervon
auflösen lassen. Die Ordnung fordert ferner, daß wir dann über-
n auf Gleichungen, welche außer den beyden Differenzialformeln
nd q noch zwey der endlichen Größen, nämlich entweder x und y
x und z oder y und z enthalten. Endlich wollen wir von der Auflö-
jener Gleichungen handeln, welche alle Größen p, q, x, y und z
eich enthalten, und zum Schlusse die Kunstgriffe der Transfor-
ion auseinandersetzen.

Kapitel II.

Von der Auflösung der Gleichungen, in welchen eine der beyden Differenzialformeln auf irgend eine Weise durch endliche Größen gegeben ist.

Aufgabe 4.

§. 33. Eine Function z zweyer Veränderlichen x und y von der Beschaffenheit zu finden, daß die Differenzialformel $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ einer unveränderlichen Größe a gleich werde.

Auflösung.

Setzt man also $dz = p\,dx + q\,dy$, so wird eine Function z von der Beschaffenheit gesucht, daß $p = a$ oder $dz = a\,dx + q\,dy$ wird. Um nun diesen Zweck zu erreichen, betrachte man y als unveränderlich, so wird $dz = a\,dx$, und durch Integration

$$z = ax + \text{Const.}$$

werden, wobey zu bemerken ist, daß diese Constante irgend eine Function von y bezeichnen könne. Um also die Auflösung allgemein darzustellen, wird

$$z = ax + f(y)$$

seyn, wobey $f(y)$ irgend eine Function von y bezeichnet, die keinesweges an und für sich bestimmt ist, sondern ganz von unserer Willkür abhängt. Dieß zeigt auch umgekehrt die Differenziation, denn wenn man das Differenziale der Function $f(y)$ durch $dy\,f'(y)$ bezeichnet, so wird man auch

$$dz = a\,dx + dy\,f'(y)$$

erhalten, und daher $\left(\frac{dz}{dx}\right) = a$, gerade wie es die Aufgabe verlangt; hieraus leuchtet nun ein, daß in diesem Falle die andere Differenzialformel $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ bloß eine Function von y bezeichne, indem $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ ist.

Zusatz 1.

§. 34. Wenn daher eine solche Function z zweyer Veränderlichen x und y gesucht wird, so daß $\left(\frac{dz}{dx}\right) = a$ wird, so erhält man $z = ax + f(y)$, und die andere Differenzialformel $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ bezeichnet nothwendig bloß eine Function von y.

Zusatz 2.

§. 35. Wird eine Function von der Art gesucht, daß $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$ ist, so wird dieselbe nothwendig nur eine Function von y seyn, oder sie wird die Veränderliche x gar nicht enthalten können; denn da jene Function durch die Änderung von x keine Änderung erleiden darf, so kann offenbar die Größe x auf die Bestimmung derselben auch keinen Einfluß äußern.

Zusatz 3.

§. 36. Es geht hieraus ferner hervor, daß die Differenzialgleichung $dz = adx + qdy$ nur dann reell seyn könne, wenn q bloß eine Function von y bezeichnet. Dieß zeigt auch das oben erklärte Kennzeichen, denn wenn man die Gleichung auf die Form

$$adx + qdy - dz = 0$$

zurückführt, so wird man wegen $P = a$, $Q = q$ und $R = -1$ erhalten:

$$L = \left(\frac{dq}{dz}\right); \quad M = 0 \quad \text{und} \quad N = -\left(\frac{dq}{dx}\right);$$

und die Realität der Gleichung erfordert daher die Existenz der Relation

$$a\left(\frac{dq}{dz}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right) = 0.$$

Der Voraussetzung gemäß aber ist q von z unabhängig, und daher wird $\left(\frac{dq}{dx}\right) = 0$ seyn, weil $\left(\frac{dq}{dz}\right) = 0$ ist, und daher ist auch q von x unabhängig.

Anmerkung 1.

§. 37. Aus dem Angeführten erhellt nun hinreichend, daß diese Operation, durch welche wir die Function z bestimmt haben, in der That eine Integration sey, durch welche wie bey den gewöhnlichen

Operationen etwas Unbestimmtes eingeführt wird. Hier erschien nämlich eine willkürliche Function von y, deren Natur durchaus nicht bestimmt wird; und man kann sich dieselbe auch so vorstellen, daß, wenn man die Abscissen irgend einer Curve durch y bezeichnet, die Ordinaten derselben eine solche Function von y darstellen. Es ist übrigens nicht nöthig, daß diese Curve regulär und in irgend einer Gleichung enthalten sey, sondern jede mit freyer Hand beschriebene Curve, wenn sie auch noch so irregulär und aus mehreren Theilen verschiedener Curven bestände, würde dieselben Dienste leisten. Solche irreguläre Functionen kann man discontinuirliche nennen, oder Functionen ohne Continuität; hierbey ist vorzüglich der Umstand merkwürdig, daß, während die Integrationen der erstern Art keine andere als stetige Functionen zulassen, hier auch discontinuirliche Functionen der Rechnung unterworfen werden; und mehrere ausgezeichnete Geometer waren der Meinung, daß dieß den Principien des Calculs sogar widerstreite. Allein die vorzügliche Eigenschaft der Integrationen, welche in diesem zweyten Buche zu lehren sind, besteht darin, daß sie auch discontinuirliche Functionen enthalten können; und es scheint mir daher, daß durch diese gleichsam neue Rechnung die Gränzen der Analyse sehr erweitert werden.

Anmerkung 2.

§. 38. So wie bey den gemeinen Integrationen die eingeführte willkürliche Constante immer aus der Natur der Aufgabe, deren Auflösung auf dieselbe geleitet hat, bestimmt wird, eben so wird auch hier die Beschaffenheit der Aufgabe, welche durch eine solche Integration aufgelöst wird, immer die Natur der durch Integration eingeführten willkürlichen Function bestimmen. Wenn irgend eine Figur einer gespannten Saite gegeben wird, und man läßt dieselbe plötzlich los, so daß sie Schwingungen macht, so ist man im Stande, die Figur, welche dann die Saite annehmen wird, nach den Principien der Mechanik jedes Mahl zu bestimmen, und eben dieß ist auch der Fall bey einer solchen Integration, durch welche irgend eine willkürliche Constante eingeführt wird, welche man aber dann so bestimmen muß, daß für den Anfang der Bewegung die angenommene Figur der Saite selbst wieder zum Vorschein komme; und da die Auflösung allgemein seyn soll, damit dieselbe jeder anfänglichen Figur entspreche, so muß sie sich nothwendig auch auf jene Fälle erstrecken, in welchen anfangs die

Figur der Saite ganz irregulär ist, und keineswegs den Charakter der Continuität besitzt; was durchaus unmöglich wäre, wenn nicht durch die Integration eine solche völlig willkürliche Function eingeführt würde, welche man auch für irreguläre Figuren modificiren könnte. Solche willkürliche Functionen werde ich, wie ich es hier gethan habe, durch das Symbol $f(y)$ ausdrücken, und man wird sich in Acht nehmen müssen, den Buchstaben f für eine Größe zu halten. Eben so wird bey den folgenden Untersuchungen der Ausdruck $S(x+y)$ eine willkürliche Function der Größe $x+y$ bezeichnen, und dort, wo mehrere solche Functionen in der Rechnung erscheinen werden, will ich außer den Buchstaben f den Charakteren φ, ψ, θ ꝛc. eine ähnliche Bedeutung beygelegt wissen.

Aufgabe 5.

§. 39. Eine Function z der beyden Veränderlichen x und y von der Art zu bestimmen, daß die Differenzialformel $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ einer gegebenen Function von x gleich werde, welche wir durch X bezeichnen wollen, so daß also $p = X$ werde.

Auflösung.

Setzt man $dz = p\,dx + q\,dy$, so wird, weil $p = X$ ist:

$$dz = X\,dx + q\,dy$$

werden. Weil nun der Theil $X\,dx$ dieses Differenzials gegeben ist, so nehme man, um das Integrale zu finden, y constant, so wird man wegen $dz = X\,dx$ durch Integration erhalten:

$$z = \int X\,dx + \text{Const.},$$

und da diese Constante nun auch die Größe y, auf irgend eine Weise verbunden, enthalten kann, so wird man für dieselbe irgend eine willkürliche Function von y annehmen dürfen, und das gesuchte Integrale wird seyn:

$$z = \int X\,dx + f(y),$$

durch dessen Differenziation $dz = X\,dx + dy\,f'(y)$ erhalten wird, so daß $q = f'(y)$ und $\left(\frac{dz}{dx}\right) = X$ wird, also gerade so, wie verlangt wurde.

Zusatz 1.

§. 40. Das der Gleichung $\left(\frac{dz}{dx}\right) = X$, wobey z eine Function von x und y bezeichnet, entsprechende Integrale ist also

$$z = \int X dx + f(y),$$

wo demnach die Integralformel $\int X dx$ eine bekannte Function von x bezeichnet, weil X gegeben ist; in wie fern nämlich die durch diese Integration eingeführte Constante durch die willkürliche Function $f(y)$ dargestellt werden kann.

Zusatz 2.

§. 41. Hieraus folgt nun, daß die Differenzialgleichung

$$dz = X dx + q dy$$

nur dann reell seyn könne, wenn q eine Function von y ist; dieß muß man sich aber mit der Einschränkung so denken, wenn q die Größe z nicht enthält, welchen Fall wir hier nicht in Betrachtuug ziehen.

Anmerkung.

§. 42. Denn wenn q auch von z abhängen könnte, so wird die Gleichung $dz = X dx + q dy$ reell seyn, wenn q irgend einer Function der beyden Veränderlichen $z - \int X dx$ und y seyn wird, was sehr leicht in die Augen fällt, wenn man $z - \int X dx = u$ setzt, so daß nun q als Function der beyden Größen u und y erscheinen wird; denn dann enthält die Differenzialgleichung, welche $du = q dy$ wird, bloß die zwey Veränderlichen u und y, und ist demnach zuverläßig reell. Wie auch das Integrale derselben immer beschaffen seyn mag, so wird man daraus immer u einer gewissen Function von y gleich finden, und daher wird

$$u = z - \int X dx = f(y),$$

gerade wie vorhin.

So oft demnach $\left(\frac{dz}{dx}\right) = X$ seyn soll, so wird, selbst den Fall nicht ausgenommen, in welchem q etwa die Größe z enthält, das Integrale seyn:

$$z = \int X dx + f(y),$$

und es kann niemals eine andere Auflösung Statt finden.

Dieses Integrale wird also ein vollständiges seyn, weil es eine

willkürliche Function enthält, ein Umstand, der als das sicherste Kennzeichen eines vollständigen Integrales anzusehen ist.

Soll also das Integrale hier ein vollständiges seyn, so wird erfordert, daß nicht sowohl irgend eine willkürliche Constante, sondern vielmehr eine willkürliche veränderliche Function in demselben erscheine. Wenn man z. B. für $\left(\frac{dz}{dx}\right) = ax^2$ die Gleichung

$$z = \tfrac{1}{3}ax^3 + A + By + Cy^2 + \ldots$$

als das Integrale nehmen wollte, so wäre dieses nur ein particuläres Integrale, obgleich es mehrere willkürliche Constanten A, B, C, ... und vielleicht unendlich viele enthält; denn das wahre vollständige Integrale

$$z = \tfrac{1}{3}ax^3 + f(y)$$

ist bey weitem allgemeiner, was man sich wohl zu merken hat, um die folgenden Untersuchungen richtig zu verstehen.

Es werden aber auch Fälle vorkommen, in welchen wir in Ermangelung einer Methode für die Bestimmung des vollständigen Integrales uns mit particulären Integralien begnügen müssen, und wenn diese auch sogar unendlich viele willkürliche Constanten enthalten sollten, so sind sie demungeachtet bloß für particuläre Auflösungen zu halten. Diese Bemerkung müssen wir bey den folgenden Untersuchungen unverrückt im Auge behalten, damit wir uns rücksichtlich der particulären und vollständigen Integrale niemals täuschen.

Aufgabe 6.

§. 43. Soll z eine solche Function der beyden Veränderlichen x und y seyn, daß die Differenzialformel $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ irgend einer gegebenen Function von x und y gleich wird; so ist im Allgemeinen die Natur der gesuchten Function z zu bestimmen.

Auflösung.

Sey V jene gegebene Function der Größen x und y, welcher die Differenzialformel $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ gleich seyn soll, und es wird verlangt, daß $p = V$ werde, wenn $dz = pdx + qdy$ gesetzt wird. Um nun die Form der Function z zu finden, betrachte man y als unveränderlich, und man wird $dz = Vdx$ erhalten. Man integrire

also $\int V\,dx$, indem man bloß x als veränderlich ansieht, weil y constant genommen wird, so daß in dieser Formel die einzige Veränderliche x erscheint, weßhalb ihre Integration keiner weiteren Schwierigkeit unterworfen ist; nur muß man hierbey bemerken, daß die durch Integration eingeführte Constante die andere Größe y wie immer enthalten könne; und so wird man für die gesuchte Function z folgenden Ausdruck finden:

$$z = \int V\,dx + f\,(y),$$

wobey das Integrale $\int V\,dx$ so genommen ist, als wäre die Größe y constant und bloß x veränderlich. Allein $f\,(y)$ bezeichnet irgend eine willkürliche Function von y, wobey selbst die discontinuirlichen Formen nicht ausgeschlossen sind, die durch keine analytischen Ausdrücke dargestellt werden können; und eben wegen dieser willkürlichen Function ist die Integration als eine vollständige anzusehen.

Zusatz 1.

§. 44. Da V eine gegebene Function von x und y ist, so wird die Integralformel $\int V\,dx$ auch eine bekannte und bestimmte Function eben dieser Größen x und y seyn; denn das Willkürliche, welches durch die Integration in die Rechnung verwebt wurde, ist in dem zweyten Theile $f\,(y)$ enthalten.

Zusatz 2.

§. 45. Hierdurch bestimmt sich auch der andere Theil $q\,dy$ des Differenziales dz, welcher aus der Veränderlichkeit der Größe y entspringt, denn nach §. 28 ist das Differenziale des Ausdruckes $\int V\,dx$, welches entsteht, wenn man x und y zugleich als variabel betrachtet:

$$V\,dx + dy \int dx \left(\frac{dV}{dy}\right),$$

und wenn man das Differenziale der Function $f\,(y)$ durch $dy\,f'\,(y)$ bezeichnet, so wird man erhalten:

$$dz = V\,dx + dy \int dx \left(\frac{dV}{dy}\right) + dy\,f'\,(y).$$

Zusatz 3.

§. 46. Da wir also $dz = p\,dx + q\,dy$ gesetzt haben, und $p = V$ ist, so wird man haben:

$$q = \int dx \left(\frac{dV}{dy}\right) + f'\,(y),$$

wobey, weil V eine gegebene Function von x und y ist, auch $\left(\frac{dV}{dy}\right)$ eine bekannte Function seyn wird, und bey der Integration von $\int dx \left(\frac{dV}{dy}\right)$ ist bloß x als veränderlich anzusehen.

Beyspiel 1.

§. 47. Man suche eine solche Function z von x und y, daß $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ werde.

Weil $V = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ist, so wird $\int V dx = \sqrt{x^2 + y^2}$ seyn, und daher erhalten wir $z = \sqrt{x^2 + y^2} + f(y)$.

Es ist demnach

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + f'(y),$$

wie auch aus der gegebenen Regel hervorgeht.

Denn man wird erhalten:

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und daher, wenn y constant genommen wird:

$$\int dx \left(\frac{dV}{dy}\right) = -y\int \frac{x\,dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Beyspiel 2.

§. 48. Man suche eine solche Function z von x und y, daß $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}}$ wird.

Da $V = \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}}$ ist, so wird seyn:

$$\int V dx = y \text{ arc. sin. } \frac{x}{y},$$

und daher

$$z = y \text{ arc. sin. } \frac{x}{y} + f(y).$$

Das Differenziale dieser Gleichung, welches aus der Variabilität von y entsteht, wird, weil

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{-x^2}{(y^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ist, seyn:

$$\int dx \left(\frac{dV}{dy}\right) = -\int \frac{x^2 dx}{(y^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{y^2 - x^2}} - y^2 \int \frac{dx}{(y^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und daher

$$\int dx \left(\frac{dV}{dy}\right) = \text{arc. sin.} \frac{x}{y} - \frac{x}{\sqrt{y^2 - x^2}} \quad \text{und}$$

$$q = \text{arc. sin.} \frac{x}{y} - \frac{x}{\sqrt{y^2 - x^2}} + f'(y).$$

Dasselbe Resultat findet man durch die Differenziation des für z gefundenen Ausdruckes:

$$dz = dy \text{ arc. sin.} \frac{x}{y} + \frac{y\,dx - x\,dy}{\sqrt{y^2 - x^2}} + dy f'(y),$$

und hieraus geht für $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ derselbe Werth hervor.

Beyspiel 3.

§. 49. Man suche eine solche Function z von x und y, daß $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2 - x^2}}$ werde.

Weil $V = \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2 - x^2}}$ ist, so wird man erhalten:

$$\int V dx = a \text{ arc. sin.} \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

und daher ist die gesuchte Form der Function z folgende:

$$z = a \text{ arc. sin.} \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}} + f(y).$$

Weil ferner

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{ay}{(a^2 - y^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ist, so wird man finden:

$$\int dx \left(\frac{dV}{dy}\right) = ay \int \frac{dx}{(a^2 - y^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ay}{a^2 - y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2 - x^2}},$$

und daher ist

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = q = \frac{axy}{(a^2 - y^2)\sqrt{a^2 - y^2 - x^2}} + f'(y).$$

Derselbe Ausdruck wird auch durch die Differenziation von z selbst gefunden.

Anmerkung 1.

§. 50. Bey dieser Rechnung bleibt dennoch eine gewisse Unbestimmtheit zurück, welche auf den Werth der Größe q übergeht. Denn da der Werth von $z = \int V\,dx + f(y)$ bestimmt ist, wenn das Integrale $\int V\,dx$ in Bezug auf x so genommen wird, daß es für einen gegebenen Werth von x selbst einen bekannten Werth erhält; so kann auch in dem vollständigen Differenziale desselben keine Unbestimmtheit liegen, sondern es muß nothwendig der Werth von q eben so gut wie der Werth von p als bestimmte Größe daraus hervorgehen; indessen bleibt denn doch die Integralformel $\int dx \left(\frac{dV}{dy}\right)$ unbestimmt, und es scheint, daß man eine von der ersteren unabhängige willkürliche Größe einführen müsse. Um nun eine solche Unbestimmtheit, wie die angeführte, zu vermeiden, muß man die Bedingung, durch welche das Integrale $\int V\,dx$ bestimmt wird, berücksichtigen; und eben diese Bedingung darf dann bey der Integration der Formel $\int dx \left(\frac{dV}{dy}\right)$ nicht außer Acht gelassen werden. Denn setzen wir, das Integrale $\int V\,dx$ werde so genommen, daß es für $x = a$ verschwindet, und man setzt den bestimmten Werth desselben $\int V\,dx = S$, so wird dieser Ausdruck wenigstens den Factor $a - x$ oder $a^n - x^n$ enthalten; und da hierin die Größe y nicht erscheint, so wird auch $\left(\frac{dS}{dy}\right)$ denselben Factor enthalten, und daher wird $\left(\frac{dS}{dy}\right)$ für $x = a$ verschwinden. Es ist aber $\left(\frac{dS}{dy}\right) = \int dx \left(\frac{dV}{dy}\right)$, und hieraus geht hervor, daß, wenn das Integrale $\int V\,dx$ so genommen wird, daß es für $x = a$ verschwindet, auch das andere Integrale $\int dx \left(\frac{dV}{dy}\right)$ so genommen werden müsse, daß es für $x = a$ verschwindet. Bey den beyden letzten angeführten Beyspielen sind beyde Integrationen so ausgeführt, daß die Integrale für $x = 0$ verschwinden; bey dem ersten Beyspiele aber wurde auf eine solche Regel keine Rücksicht genommen, allein wenn wir nach derselben Vorschrift verfahren, so werden wir finden:

$$\int V\,dx = \sqrt{x^2 + y^2} - y \quad \text{und}$$

$$\int dx \left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1,$$

woraus sich dieselbe Auflösung ergibt, weil dort $-y$ in $f(y)$, und hier -1 in $f'(y)$ enthalten ist. Übrigens ist es aber ganz gleichgültig, nach welchem Gesetze die erstere Integration ausgeführt wird, wenn wir uns nur bey der letztern Integration an eben dieses Gesetz halten.

Anmerkung 2.

§. 51. Das Princip dieser Bestimmung beruht auf folgendem, eben so eleganten als merkwürdigen Theoreme:

Wenn S eine solche Function von den zwey Veränderlichen x und y ist, daß sie für $x = a$ verschwindet, und es ist

$$dS = Pdx + Qdy,$$

so wird dann auch die Größe Q für $x = a$ verschwinden.

Hieraus ergibt sich zugleich, daß, wenn S für $y = b$ verschwindet, auch $P = 0$ werde, wenn $y = b$ gesetzt wird. Es ist hier jedoch wohl zu merken, daß die für die ähnliche Bestimmung der beyden Integralformeln $\int V dx$ und $\int dx \left(\frac{dV}{dy}\right)$ gegebenen Vorschriften nur gültig seyen, wenn der, der Größe x beyzulegende Werth a eine unveränderliche Größe ist. Das obige Theorem verliert auch seine Gültigkeit, wenn z. B. die Function S für $x = y$ verschwindet; denn es folgt hieraus keineswegs, daß in eben diesem Falle auch die Größe Q verschwinden werde. Denn obgleich die Function S den Factor $x - y$ oder $x^n - y^n$ enthält, so folgt hieraus nicht, daß auch der Ausdruck $\left(\frac{dS}{dy}\right)$ oder Q eben diesen Factor haben werde, wie dieß der Fall ist, wenn $x - a$ oder $x^n - a^n$ als Factor erscheint. Ich habe aber bereits erinnert, daß es nicht nöthig ist, daß wirklich ein solcher Factor vorhanden sey, wenn dieser Ausdruck nur gleichsam als Potenz in der Function S vorkommt. Wäre z. B.

$$S = a - x + y - \sqrt{a^2 - x^2 + y^2},$$

so verschwindet diese Function für $x = a$ ebenfalls, obgleich sie weder den Ausdruck $x - a$ noch $x^n - a^n$ als Factor enthält; zugleich aber verschwindet auch $\left(\frac{dS}{dy}\right) = 1 - \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 + y^2}}$, für $x = a$.

Bey einer solchen Rechnung, deren wir uns bey jenen Aufgaben bedienen, wo das Integrale der Formel $\int V\,dx$ dargestellt werden muß, betrachten wir also dasselbe immer aus zwey Theilen zusammengesetzt, von denen der unbestimmte durch die Function $f(y)$ angezeigt, der andere aber, den wir eigentlich durch $\int V\,dx$ ausdrücken, dadurch bestimmt wird, daß er für $x = a$ verschwinden soll; und so verhält es sich immer, welche constante Größe auch für a genommen wird, wenn nur auf den andern unbestimmten Theil stets die gehörige Rücksicht genommen wird.

Aufgabe 7.

§. 52. Wenn z durch die beyden Veränderlichen x und y so bestimmt werden soll, daß der Differenzialausdruck $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ irgend einer gegebenen Function von y und z, die wir durch V bezeichnen wollen, gleich wird, so soll man im Allgemeinen die Natur der Function z durch x und y bestimmen.

Auflösung.

Da $p = V$ seyn soll, wenn $dz = p\,dx + q\,dy$ gesetzt wird, so wird, wenn wir y als constant annehmen, $dz = V\,dx$ werden. Weil nun hier V eine gegebene Function von y und z ist, und y als unveränderlich angesehen wird, so wird die Gleichung $\frac{dz}{V} = dx$ integrabel seyn, und die vollständige Integration gibt:

$$\int \frac{dz}{V} = x + f(y).$$

Durch diese Gleichung wird die Relation zwischen den drey Veränderlichen x, y und z im Allgemeinen so ausgedrückt, daß aus derselben z durch x und y bestimmt, und die Natur der Function z angegeben werden kann.

Wenn wir hieraus auch den andern Theil des Differenziales, nämlich $q\,dy$ oder die Function $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ aufsuchen wollen, so nehmen wir an, das Integrale $\int \frac{dz}{V}$, wo y als constant angesehen wird, werde so genommen, daß es für $z = c$ verschwinde, und wir werden, indem wir die Größe $\int \frac{dz}{V}$ wieder so differenziren, daß auch

y als veränderlich angesehen wird, erhalten:

$$d.\int \frac{dz}{V} = \frac{dz}{V} + dy \int dz \left(\frac{d.(1:V)}{dy}\right) \text{ oder}$$

$$d.\int \frac{dz}{V} = \frac{dz}{V} - dy \int \frac{dz}{V^2} \left(\frac{dV}{dy}\right),$$

wo in dem Integrale $\int \frac{dz}{V^2} \left(\frac{dV}{dy}\right)$ die Größe y wieder als unveränderlich betrachtet wird, und dieses Integrale muß so bestimmt werden, daß es für $z = c$ verschwindet. Da ferner das Differenziale der gefundenen Gleichung

$$\frac{dz}{V} - dy \int \frac{dz}{V^2} \left(\frac{dV}{dy}\right) = dx + dy f'(y),$$

ist, so werden wir für die vorgelegte Form erhalten:

$$dz = V dx + dy \left[V \int \frac{dz}{V^2} \left(\frac{dV}{dy}\right) + V f'(y)\right],$$

woraus der Werth von q erhellt.

Zusatz 1.

§. 53. In dieser Aufgabe läßt sich sehr leicht bestimmen, was die Größe x für eine Function von den beyden übrigen Veränderlichen y und z seyn werde, indem

$$x = \int \frac{dz}{V} - f(y)$$

ist, wenn nämlich V durch y und z gegeben ist. Eben so verhält es sich, wenn entweder z durch x und y, oder y durch x und z bestimmt wird.

Zusatz 2.

§. 54. Da die Relation zwischen den drey Veränderlichen x, y und z so bestimmt ist, daß $\left(\frac{dz}{dx}\right) = V =$ einer gegebenen Function von y und z wird, so wird wegen $dx = \frac{dz}{V}$, wenn y constant genommen wird, x eine solche Function von y und z seyn, daß $\left(\frac{dx}{dz}\right) = \frac{1}{V}$, und daher $\left(\frac{dz}{dx}\right) . \left(\frac{dx}{dz}\right) = 1$ wird.

Anmerkung.

§. 55. Übrigens mag im Allgemeinen was immer für eine Relation zwischen den drey Veränderlichen x, y und z vorgelegt werden,

aus welcher jede derselben durch die beyden übrigen bestimmt und gleichsam als Function derselben betrachtet werden kann; so wird immer die Gleichung

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dz}\right) = 1$$

Statt finden. Denn setzen wir, daß durch Differenziation der Gleichung, welche jene Relation ausdrückt, erhalten werde:

$$P dx + Q dy + R dz = 0;$$

so ist einleuchtend, daß, wenn y constant genommen wird,

$$P dx + R dz = 0,$$

und demnach sowohl $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{-P}{R}$, als auch $\left(\frac{dx}{dz}\right) = \frac{-R}{P}$ seyn werde. Auf ähnliche Art aber wird man erhalten:

$$\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{-Q}{P};\ \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-P}{Q};\ \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{-Q}{R};\ \left(\frac{dy}{dz}\right) = \frac{-R}{Q};$$

woraus unser Satz erhellet, obgleich zwischen mehr als drey Veränderlichen diese Relation Statt findet. Übrigens ist dieser Fall von den vorhergehenden verschieden, weil hier die Natur der Function z, in wiefern sie aus den beyden übrigen Veränderlichen x und y gebildet wird, nicht in einer entwickelten Form erscheint, sondern erst durch Auflösung der gefundenen Gleichung bestimmt werden muß; und es wird gut seyn, einige Beyspiele hierüber anzuführen.

Beyspiel 1.

§. 56. Man suche eine solche Function z von x und y, daß die Gleichung

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{y}{z}$$

Statt findet.

Da also

$$dz = \frac{y\,dx}{z} + q\,dy$$

ist, so wird man, wenn y als constant betrachtet wird, finden:

$$z\,dz = y\,dx \text{ und } \tfrac{1}{2}z^2 = xy + f(y).$$

Um nun q zu finden, differenzire man allgemein die Gleichung

$$z\,dz = y\,dx + x\,dy + dy\,f'(y),$$

so wird man erhalten:

$$q = \frac{x}{z} + \frac{1}{z} f'(y),$$

welche Gleichung auch nach der gegebenen Vorschrift gefunden wird. Denn weil $V = \frac{y}{z}$ ist, so wird $\int \frac{dz}{V} = \frac{z^2}{2y}$ seyn, wenn das Integrale so genommen wird, daß es für $z = 0$ verschwindet; dann aber wird man, weil $\left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{1}{z}$ ist, erhalten:

$$\int \frac{dz}{V^2}\left(\frac{dV}{dy}\right) = \int \frac{z\,dz}{y^2} = \frac{z^2}{2y^2},$$

wo bey der Integration dasselbe Gesetz beobachtet wurde.

Daher wird

$$dz = \frac{y\,dx}{z} + \frac{y\,dy}{z}\left(\frac{z^2}{2y^2} + f'(y)\right) \text{ und}$$

$$q = \frac{z}{2y} + \frac{y}{z} f'(y);$$

welcher Ausdruck mit dem vorhergehenden übereinstimmt, denn man erhält durch Vergleichung

$$x + f'(y) = \frac{z^2}{2y} + y f'(y),$$

und daher ist, wie vorhin, die Größe x dem Ausdrucke $\frac{z^2}{2y}$ nebst einer Function von y gleich. Dieß bemerke man nur, weil wir hier der vollkommenen Übereinstimmung halber $y \cdot f(y)$ statt $f(y)$ hätten schreiben sollen.

Beyspiel 2.

§. 57. Man suche eine solche Function z der beyden Veränderlichen x und y, daß die Gleichung

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{\sqrt{y^2 - z^2}}{z}$$

Statt findet.

Da also

$$dz = \frac{dx\sqrt{y^2 - z^2}}{z} + q\,dy$$

ist, so wird, wenn man y als unveränderlich ansieht:

$$dx = \frac{z\,dz}{\sqrt{y^2 - z^2}},$$

d durch Integration

$$x = y - \sqrt{y^2 - z^2} - f(y).$$

Man erhält demnach umgekehrt durch Differenziation

$$dx = dy - \frac{y\,dy - z\,dz}{\sqrt{y^2 - z^2}} - dy\,f'(y), \text{ oder}$$

$$dz = \frac{dx\sqrt{y^2 - z^2}}{z} + dy\left[\frac{y}{z} - \frac{\sqrt{y^2 - z^2}}{z}(1 - f'(y))\right].$$

Nach der gegebenen Regel aber ist, weil $V = \frac{\sqrt{y^2 - z^2}}{z}$ ist:

$$\int \frac{dz}{V} = y - \sqrt{y^2 - z^2},$$

nn das Integrale so genommen wird, daß es für $z = o$ verschwindet.
an ist aber

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{y}{z\sqrt{y^2 - z^2}} \text{ und } \frac{1}{V^2}\left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{yz}{(y^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

o

$$\int \frac{dz}{V^2}\left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{y}{\sqrt{y^2 - z^2}} - 1,$$

nn das Integrale nach demselben Gesetze genommen wird.

Deßhalb erhält man

$$= \frac{\sqrt{y^2 - z^2}}{z}\left[\frac{y}{\sqrt{y^2 - z^2}} - 1 + f'(y)\right] = \frac{y}{z} - \frac{\sqrt{y^2 - z^2}}{z}[1 - f'(y)],$$

:ade wie vorhin.

Aufgabe 8.

§. 58. Wenn z durch die beyden Veränderlichen und y so bestimmt werden soll, daß die Differenalformel $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ irgend einer gegebenen Funcon von x und z, die wir durch V bezeichnen wollen, eich werde; so soll im Allgemeinen die Natur der nction z durch x und y bestimmt werden.

Auflösung.

Man setze $dz = p\,dx + q\,dy$, und weil $p = V$ ist, so nehme n die Größe y als unveränderlich an, so wird man

$$dz - V\,dx = o$$

erhalten, welche Gleichung bloß die zwey Veränderlichen x und z enthält, die mit Hülfe irgend eines Multiplicators, der $= M$ seyn mag, integrabel gemacht werden wird, so daß $M dz - MV dx$ das wirkliche Differenziale irgend einer Function von x und z ist, welche Function $= S$ seyn soll, und die Größe y nicht enthält. Unsere Integralgleichung wird demnach seyn $S = f(y)$, und hieraus erhellt die Natur der Function z, wie sie auch immer durch x und y ausgedrückt wird. Differenziiren wir nun diese Gleichung, indem wir außer x und z auch y als veränderlich betrachten, so werden wir finden:

$$dS = M dz - MV dx = dy f'(y), \text{ oder}$$

$$dz = V dx + \frac{dy}{M} f'(y),$$

so daß also $q = \frac{1}{M} f'(y)$ wird.

Zusatz 1.

§. 59. Der die Formel $dz - V dx$ integrabel machende Multiplicator M wird die Größe y auch nicht enthalten, weil die gegebene Function V dieselbe nicht enthält. Wenn aber dieser Multiplicator gefunden ist, so ergibt sich sogleich der Werth von $q = \frac{1}{M} f'(y)$.

Zusatz 2.

§. 60. Wenn das Integrale S der Differenzialformel $M dz - MV dx$ eine Function von x und z seyn sollte, so werden wir für die Auflösung des Problemes $S = f(y)$ erhalten; und hieraus erhellt, daß die Constante, welche man etwa der Größe S beyfügen wollte, schon in der willkürlichen Function $f(y)$ enthalten sey.

Beyspiel 1.

§. 61. Man suche eine solche Function z von x und y, daß $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{nz}{x}$ werde.

Wird $dz = \frac{nz dx}{x} + q dy$ gesetzt, und y constant genommen, so erhält man

$$dz - \frac{nz dx}{x} = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{1}{z}$, so wird sie integrabel,

so daß der Multiplicator $M = \frac{1}{z}$ ist, und demnach das Integrale

$$S = lz - lx^n.$$

Unsere gesuchte Integralgleichung wird also $l\frac{z}{x^n} = f(y)$ seyn, und daher wird auch $\frac{z}{x^n}$ irgend einer Function von y gleich seyn, so daß man erhält

$$z = x^n f(y).$$

Beyspiel 2.

§. 62. Man suche eine solche Function z der beyden Veränderlichen x und y, daß die Differenzialformel $\left(\frac{dz}{dx}\right) = nx - z$ werde.

Setzt man

$$dz = (nx - z)\,dx + q\,dy,$$

so wird man, wenn y constant genommen wird, erhalten:

$$dz + z\,dx - nx\,dx = 0,$$

welche Gleichung mit Hülfe des Multiplicators $M = e^x$ folgendes Integrale gibt:

$$S = e^x z - n\int e^x x\,dx = e^x z - ne^x x + ne^x;$$

und die Gleichung, welche die gesuchte Relation zwischen x, y und z ausdrückt, ist daher

$$e^x z - ne^x x + ne^x = f(y) \quad \text{oder}$$
$$z = n(x - 1) + e^{-x} f(y),$$

dann aber wird man erhalten:

$$q = \left(\frac{dz}{dy}\right) = e^{-x} f'(y).$$

Beyspiel 3.

§. 63. Es werde eine solche Function z der beyden Veränderlichen x und y gesucht, daß die Differenzialformel $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{xz}{x^2 + z^2}$ wird.

Man setze also

$$dz = \frac{xz\,dx}{x^2 + z^2} + q\,dy,$$

betrachte y als unveränderlich, und suche das Integrale folgender

Differenzialgleichung

$$dz - \frac{xz\,dx}{x^2 + z^2} = 0,$$

und diese Gleichung wird integrabel gemacht mit Hülfe irgend eines Divisors, welchen man findet, indem man wegen der Homogeneität x und z statt der Differenzialien dx und dz schreibt, so daß dieser Divisor folgender ist:

$$z - \frac{x^2 z}{x^2 + z^2} = \frac{z^3}{x^2 + z^2},$$

und daher der Multiplicator $M = \frac{x^2 + z^2}{z^3}$. Man wird daher erhalten:

$$dS = \frac{(x^2 + z^2)\,dz}{z^3} - \frac{x\,dx}{z^2}, \text{ also}$$

$$S = \frac{-x^2}{2z^2} + lz,$$

folglich wird die gesuchte Gleichung seyn:

$$lz - \frac{x^2}{2z^2} = f(y) \text{ und } q = \frac{z^3}{x^2 + z^2} f'(y).$$

Da nun $u = f(y)$ wird, wenn $lz - \frac{x^2}{2z^2} = u$ gesetzt wird, so läßt sich hieraus auch umgekehrt schließen, daß $y = f(u)$ seyn werde.

Aufgabe 9.

§. 64. Wenn z durch die beyden Veränderlichen x und y so bestimmt werden soll, daß die Differenzialformel $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ gleich wird irgend einer gegebenen Function, welche alle drey Veränderlichen x, y und z enthält, und die wir = V setzen wollen, so ist im Allgemeinen die Natur der Function z durch x und y auszudrücken.

Auflösung.

Weil $dz = V\,dx + q\,dy$ ist, so wird, wenn wir y als unveränderlich ansehen, $dz = V\,dx$ werden. Diese Gleichung enthält also nur die zwey Veränderlichen x und z, in der Function V aber erscheint noch die Größe y; es wird demnach einen Multiplicator M geben, der diese Gleichung integrabel macht, so daß

$$M dz - MV dx = dS$$

wird, und daher wird die Integralgleichung, welche die zwischen x, y und z Statt findende Relation ausdrückt, folgende seyn:

$$S = f(y),$$

wobey S eine bestimmte Function von x, y und z seyn wird; und es kann sich ereignen, daß auch der Factor M alle diese drey Veränderlichen enthält. Es ist aber zweckmäßig, der Function S, welche wir durch Integration gefunden haben, einen bestimmten Werth beyzulegen, weil der unbestimmte Theil in der willkürlichen Function f (y) enthalten ist. Setzen wir also, S werde so genommen, daß es für $x = a$ und $z = c$ verschwinde.

Wenn wir daher den andern Theil, $q\,dy$, der vorgelegten Differenzialgleichung finden wollen, so werden wir die Function S differenziren, wobey auch y veränderlich genommen wird, und es sey,

$$dS = M dz - MV dx + Q dy = dy\, f'(y).$$

Da nun hier

$$\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dM}{dy}\right) \quad \text{oder} \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = -\left(\frac{d.MV}{dy}\right),$$

so wird man, wenn y wieder constant genommen wird, erhalten:

$$dQ = dz\left(\frac{dQ}{dz}\right) + dx\left(\frac{dQ}{dx}\right) = dz\left(\frac{dM}{dy}\right) - dx\left(\frac{d.MV}{dy}\right),$$

welche Formel offenbar integrabel ist. Es muß aber Q nach demselben Gesetze genommen werden, nach welchem wir S bestimmt haben; so nämlich, daß es für $x = a$ und $z = c$ verschwindet. Hat man diese Größe Q gefunden, so wird man, weil

$$dz = V dx - \frac{Q dy}{M} + \frac{dy}{M} f'(y) \text{ ist, erhalten:}$$

$$q = \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{-Q + f'(y)}{M}.$$

Diese Bestimmung stützt sich daher auf den Grundsatz, daß, wenn S eine solche Function von x, y und z bezeichnet, welche für $x = a$ und $z = c$ verschwindet, auch die Differenzialformel $\left(\frac{dS}{dy}\right)$ in demselben Falle gleich o wird.

Zusatz 1.

§. 65. Die Auflösung dieses Problemes wird demnach auf die Integration der Differenzialgleichung

$$dz - V dx = 0$$

zurückgeführt, in welcher die Größe y als constant angesehen wird, obgleich die Function V alle drey Größen x, y und z enthält. Es wird demnach auch einen Multiplicator M geben, der diese Gleichung integrabel macht, so daß

$$M dz - MV dx = dS$$

wird, wobey S irgend eine bestimmte Function von x, y und z bezeichnet.

Zusatz 2.

§. 66. Hat man aber diesen Multiplicator M gefunden, und mittelst desselben das Integrale S, so wird die Größe z durch die beyden Veränderlichen x und y so bestimmt werden, daß $S = f(y)$ wird, wobey $f(y)$ irgend eine stetige oder discontinuirliche Function von y bezeichnet; und wegen dieser charakteristischen Eigenschaft wird die Integration als vollständig angesehen werden können.

Zusatz 3.

§. 67. Hat man auf diese Weise die Relation zwischen z, x, y bestimmt, und man differenzirt dieselbe so, daß alle drey Größen x, y und z als veränderlich angesehen werden, so wird man erhalten:

$$dz = V dx + \left(\frac{f'(y) - Q}{M}\right) dy,$$

wo die Größe Q aus ihrem Differenziale

$$dQ = dz \left(\frac{d.M}{dy}\right) - dx \left(\frac{d.MV}{dy}\right)$$

bestimmt werden muß; indem man y constant nimmt, und die Integration so modificirt, daß wenn S für $x = a$ und $z = c$ verschwindet, in demselben Falle auch $Q = 0$ werde.

Anmerkung.

§. 68. Wir werden also hier auf das schöne Theorem geleitet:

Daß wenn S eine solche Function von x, y und z ist, welche für $x = a$ nnd $z = c$ selbst $= 0$ wird, dann auch unter derselben Voraussetzung die Formel $\left(\frac{dS}{dy}\right)$ verschwinden werde.

So z. B. wenn

$$S = Ax^2 + Bxyz + Cz^2 - Da^2 - Bacy - Cc^2$$

ist, so findet man:

$$\left(\frac{dS}{dy}\right) = Bxz - Bac,$$

beyde Ausdrücke verschwinden, wenn man $x = a$ und $z = c$ setzt. Nachdem wir mehrere solche Beyspiele entwickelt haben, so ist die Wahrheit dieses Theoremes so einleuchtend, daß man keine förmliche Demonstration verlangen wird. Übrigens kann eine solche Function, wenn man die Größen, welche bloß y enthalten, von den übrigen immer absondert, so entwickelt werden, daß sie unter folgender Form erscheint:

$$S = PY + QY' + RY'' + \ldots,$$

wobey der Voraussetzung gemäß die Größen P, Q, R, ... bloß Functionen von x und y sind, und zwar solche Functionen, die sämmtlich für $x = a$ und $z = c$ einzeln verschwinden. Es ist daher nun einleuchtend, daß

$$\left(\frac{dS}{dy}\right) = P \cdot \frac{dY}{dy} + Q \cdot \frac{dY'}{dy} + R \cdot \frac{dY''}{dy} + \ldots$$

seyn werde, welche Formel offenbar unter eben diesen Bedingungen verschwindet. Wie nun auch die Function S, welcher diese charakteristische Eigenschaft zukömmt, aus irrationalen und transcendenten Größen zusammengesetzt seyn mag, so wird man sie doch immer unter jener Form darstellen können, und obgleich dieselbe ins Unendliche fortschreitet, so behält dennoch diese Demonstration ihre volle Gültigkeit.

Beyspiel 1.

§. 69. Man suche eine solche Function z zweyer Veränderlichen x und y, daß die Differenzialformel $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{xz}{ay}$ werde.

Setzen wir also $dz = \frac{xzdx}{ay} + qdy$, so finden wir, wenn y constant genommen wird, die Gleichung

$$dz - \frac{xzdx}{ay} = 0,$$

so daß $V = \frac{xz}{ay}$ wird, und es wird der Multiplicator $M = \frac{1}{z}$ seyn;

also wird

$$S = l\frac{z}{c} - \frac{x^2 - a^2}{2ay},$$

und die vollständige Integralgleichung, durch welche die Function z bestimmt wird, wird seyn:

$$l\frac{z}{c} + \frac{a^2 - x^2}{2ay} = f(y).$$

Um ferner die Größe q zu finden, wird man $dQ = o$ und $Q = o$ erhalten; weil $M = \frac{1}{z}$ und $MV = \frac{x}{ay}$ ist, also wird $q = zf'(y)$. Eben dieser Werth wird aber durch Differenziation der gefundenen Gleichung erhalten, denn sie gibt

$$\frac{dz}{z} - \frac{xdx}{ay} = dyf'(y), \text{ und daher}$$

$$dz = \frac{xzdx}{ay} + zdyf'(y),$$

so daß $q = zf'(y)$ wird.

Beyspiel 2.

§. 70. Man suche eine solche Function z der beyden Veränderlichen x und y, daß $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{y}{x+z}$ wird.

Da $V = \frac{y}{x+z}$ ist, so wird man, wenn y als unveränderlich angesehen wird, folgende Gleichung erhalten:

$$dz - \frac{ydx}{x+z} = o.$$

Um nun den Multiplicator für diese Gleichung zu finden, multiplicire man dieselbe durch $(x+z)$, so daß man erhält:

$$xdz + zdz - ydx = o, \text{ oder}$$

$$dx - \frac{xdz}{y} = \frac{zdz}{y},$$

und diese Gleichung wird durch den Factor $e^{-\frac{z}{y}}$ integrabel gemacht; denn man findet

$$e^{-\frac{z}{y}}x = \int e^{-\frac{z}{y}}\frac{zdz}{y} = -e^{-\frac{z}{y}}z + \int e^{-\frac{z}{y}}dz,$$

und daher

$$e^{-\frac{z}{y}}x = -e^{-\frac{z}{y}}z - ye^{-\frac{z}{y}} + C.$$

Der Multiplicator wird demnach seyn:

$$M = (x+z) \cdot \left(-\frac{1}{y}\right) \cdot e^{-\frac{z}{y}} = -\frac{(x+z)}{y} e^{-\frac{z}{y}} \text{ und}$$

$$S = e^{-\frac{z}{y}} (x+z+y) - e^{-\frac{c}{y}} (a+c+y),$$

folglich ist die vollständige Integralgleichung

$$e^{-\frac{z}{y}} (x+z+y) - e^{-\frac{c}{y}} (a+c+y) = f(y).$$

Da ferner $MV = -e^{-\frac{z}{y}}$ ist, so wird man erhalten:

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = e^{-\frac{z}{y}} \left[\frac{x+z}{y^2} - \frac{z(x+z)}{y^3}\right] = e^{-\frac{z}{y}} (x+z) \left(\frac{1}{y^2} - \frac{z}{y^3}\right)$$

und

$$\left(\frac{d \cdot MV}{dy}\right) = -e^{-\frac{z}{y}} \cdot \frac{z}{y^2},$$

und daher

$$dQ = e^{-\frac{z}{y}} \left[dz\,(x+z)\left(\frac{1}{y^2} - \frac{z}{y^3}\right) + \frac{z\,dx}{y^2}\right],$$

wenn y constant genommen wird; man wird demnach durch Integration erhalten:

$$Q = e^{-\frac{z}{y}} \left[\frac{xz}{y^2} + 1 + \frac{z}{y} + \frac{z^2}{y^2}\right] - e^{-\frac{c}{y}} \left[\frac{ac}{y^2} + 1 + \frac{c}{y} + \frac{c^2}{y^2}\right],$$

also

$$q = \frac{z}{y} + \frac{y+z}{x+z} - e^{\frac{z-c}{y}} \left[\frac{ac + c^2 + cy + y^2}{y(x+z)}\right] - \frac{y}{x+z} e^{\frac{z}{y}} f'(y),$$

so daß

$$dz = \frac{y\,dx}{x+z} + q\,dy$$

wird. Differenzirt man aber die gefundene Gleichung, so ergibt sich

$$-e^{-\frac{z}{y}} \frac{(x+z)\,dz}{y} + e^{-\frac{z}{y}} dx + e^{-\frac{z}{y}} dy \left(1 + \frac{z}{y} + \frac{xz}{y^2} + \frac{z^2}{y^2}\right)$$

$$- e^{-\frac{c}{y}} dy \left[1 + \frac{c}{y} + \frac{c\,(a+c)}{y^2}\right] = dy\,f'(y),$$

woraus sich geradezu derselbe Werth für q ergibt.

Beyspiel 3.

§. 71. Man suche eine solche Function z der beyden Veränderlichen x und y, daß $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{y^2 + z^2}{y^2 + x^2}$ werde.

Man setze

$$dz = \frac{y^2 + z^2}{y^2 + x^2} dx + q dy,$$

nehme y als unveränderlich an, so ist, weil

$$dz - \frac{(y^2 + z^2) dx}{y^2 + x^2} = 0$$

ist, offenbar der integrirende Factor $M = \frac{y}{y^2 + z^2}$. Da nun

$$\frac{y dz}{y^2 + z^2} - \frac{y dx}{y^2 + x^2} = 0$$

ist, so wird man durch Integration finden:

$$S = A \text{ tang.} \frac{z}{y} - A \text{ tang.} \frac{x}{y} + C = A \text{ tang.} \frac{yz - yx}{y^2 + xz}$$
$$- A \text{ tang.} \left(\frac{(c - a) y}{ac + y^2}\right),$$

und die gesuchte Function z wird durch folgende Gleichung bestimmt werden:

$$A \text{ tang.} \frac{y(z - x)}{y^2 + xz} - A \text{ tang.} \left(\frac{(c - a) y}{ac + y^2}\right) = f(y).$$

Weil ferner $MV = \frac{y}{y^2 + x^2}$ ist, so wird man erhalten:

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = \frac{z^2 - y^2}{(y^2 + z^2)^2} \quad \text{und} \quad \left(\frac{d.MV}{dy}\right) = \frac{x^2 - y^2}{(y^2 + x^2)^2},$$

und daher ist

$$dQ = \frac{(z^2 - y^2) dz}{(y^2 + z^2)^2} - \frac{(x^2 - y^2) dx}{(y^2 + x^2)^2},$$

wenn y als unveränderlich angesehen wird. Es ist also

$$Q = \frac{-z}{y^2 + z^2} + \frac{x}{y^2 + x^2} + \frac{c}{y^2 + c^2} - \frac{a}{y^2 + a^2} \quad \text{und}$$

$$q = \frac{-Q + f'(y)}{M},$$

und denselben Werth findet man auch durch Differenziation.

Da übrigens die Constanten a und c beliebig angenommen werden können, so wird, wenn man dieselben $= 0$, oder wenigstens

$o = a$ nimmt, die Integralgleichung seyn:

$$A \text{ tang.} \frac{y(z - x)}{y^2 + xz} = f(y),$$

und daher ist auch

$$\frac{y(z - x)}{y^2 + xz} = F(y) \quad \text{und} \quad \frac{y^2 + xz}{z - x} = \varphi(y);$$

bezeichnet man diese Function durch Y, so wird man erhalten:

$$z = \frac{y^2 + xY}{Y - x}.$$

Anmerkung.

§. 72. Es ist kaum nöthig zu erinnern, daß häufig der Fall eintreten könne, in welchem die Auflösung solcher Probleme die Kräfte der Analysis übersteigt, wenn nämlich die aufzulösende Differenzialgleichung durch die bisher bekannten Kunstgriffe nicht integrirt werden kann. Wäre z. B. der Fall gegeben, daß $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{y^2}{x^2 + z^2}$ seyn, so muß, wenn y constant genommen wird,

$$y^2 dx = x^2 dz + z^2 dz$$

seyn, welche Gleichung man aber noch nicht integriren kann. Weil man übrigens das Integrale mittelst einer Reihe darstellen kann, so wird man, wenn dieses nur vollständig angegeben wird, die Auflösung selbst mittelst einer Reihe erhalten. Wird nämlich $x = \frac{-y^2 du}{u dz}$ gesetzt, und das Element dz als unveränderlich angesehen, so kömmt man auf folgende Differenzialgleichung des zweyten Grades:

$$y^4 d^2 u + u z^2 dz^2 = 0,$$

daher findet man durch Integration mittelst Reihen:

$$u = A \left[1 - \frac{z^4}{3 \cdot 4 \cdot y^4} + \frac{z^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot y^8} - \ldots\ldots\right]$$
$$+ Bz \left[1 - \frac{z^4}{4 \cdot 5 \cdot y^4} + \frac{z^8}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot y^8} - \ldots\ldots\right],$$

wo für A und B was immer für Functionen von y gesetzt werden können. Setzt man demnach $\frac{A}{B} = f(y)$, so wird man erhalten:

$$x = \frac{y^2 f(y) \left[\frac{z^3}{3 \cdot y^4} - \frac{z^7}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot y^8} + \ldots\right] - y^2 \left[1 - \frac{z^4}{4 \cdot y^4} + \frac{z^8}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot y^8} - \ldots\right]}{f(y) \left[1 - \frac{z^4}{3 \cdot 4 \cdot y^4} + \frac{z^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot y^8} - \ldots\right] + z \left[1 - \frac{z^4}{4 \cdot 5 \cdot y^4} + \frac{z^8}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot y^8} - \ldots\right]},$$

durch welche Gleichung die gesuchte Function z durch die beyden Veränderlichen x und y auf die allgemeinste Art ausgedrückt wird. Weil wir also Methoden kennen gelernt haben, was immer für Differenzialgleichungen durch Annäherung und zwar vollständig zu integriren, so werden wir alle hieher gehörigen Probleme wenigstens durch Annäherung auflösen können, wenn wir jene Methode zu Hülfe nehmen. Übrigens können wir in diesem höhern Theile der Analysis die Auflösung jener Differenzialgleichungen, welche in den ersten Theil der Analysis gehören, als bekannt ansehen, so wie wir auch bey unserem weiteren Fortschreiten in der Analysis immer alles das, was auf die vorhergehenden Theile sich bezieht, als eine bekannte Sache betrachten wollen, wenn sie auch nicht ganz vollständig entwickelt worden sind.

Kapitel III.

Von der Auflösung der Gleichungen, bey welchen eine der beyden Differenzialformeln durch die andere auf irgend eine Art gegeben wird.

Aufgabe 10.

§. 73. Wenn z eine solche Function der beyden Veränderlichen x und y seyn soll, daß die Differenzialformeln $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ einander gleich werden, so ist die Natur jener Function im Allgemeinen zu bestimmen.

Auflösung.

Man setze $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right) = q$, so daß

$$dz = pdx + qdy$$

wird, und die Formel $pdx + qdy$ die Integration unmittelbar zuläßt. Weil nun der Aufgabe gemäß $q = p$ seyn soll, so wird

$$dz = p\,(dx + dy),$$

und wenn man $x + y = u$ setzt, so wird man finden $dz = pdu$. Da diese Formel für sich integrabel seyn soll, so muß nothwendig p eine Function der veränderlichen Größe u seyn, die außer ihr keine andere Veränderliche enthält, und daher wird $z = \int pdu$ durch die Integration selbst einer Function von u gleich werden, oder man wird $z = f(u)$ erhalten, welche Function offenbar ganz willkürlich ist, so daß jede Function von u, mag man dieselbe stätig oder discontinuirlich annehmen, statt z gesetzt, unserer Aufgabe Genüge leistet. Da nun $u = x + y$ ist, so wird man für die Auflösung unseres Problemes erhalten:

$$z = f(x + y).$$

Um nun desto leichter einzusehen, wie diese Formel der vorgeschriebenen Bedingung Genüge thut, sey $d.f(u) = du.f'(u)$, und man wird wegen $u = x + y$ erhalten:

$$dz = (dx + dy)\,f'(x + y) = dxf'(x + y) + dyf'(x + y),$$

also auch

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p = f'(x+y) \text{ und}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = q = f'(x+y).$$

Es ist demnach $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ oder $q = p$, gerade so, wie es unsere Aufgabe verlangt.

Zusatz 1.

§. 74. Welche Function von der Größe $(x+y)$ man also auch bilden und für z annehmen mag, so wird sie immer die verlangten Eigenschaften besitzen, daß $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ ist. Eine solche Function aber deuten wir durch das Zeichen $f(x+y)$ an, so daß $z = f(x+y)$ wird.

Zusatz 2.

§. 75. Geometrisch läßt sich diese Auflösung auf folgende Art darstellen: Beschreibt man oberhalb der Axe eine beliebige krumme Linie, die regelmäßig oder unregelmäßig seyn mag, und man drückt die Abscisse durch $x+y$ aus, so wird die Ordinate immer einen brauchbaren Werth für die Function z darbiethen.

Zusatz 3.

§. 76. Die Allgemeinheit dieser mittelst Integration erhaltenen Auflösung beruht darauf, daß wir für z eine unbestimmte Function der Größe $x+y$, die stätig oder discontinuirlich seyn kann, gefunden haben, die nämlich immer den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Anmerkung 1.

§. 77. Das Fundament der Auflösung stützt sich auf das Princip, daß die Differenzialformel $p\,du$ nur dann integrabel seyn kann, wenn die Größe p eine Function von u oder umgekehrt u eine Function von p ist, so daß keine andere veränderliche Größe in der Rechnung erscheint. Mag übrigens p was immer für eine Function von u bezeichnen, so wird man das Integrale, wenn es sich auch nicht wirklich darstellen läßt, sich doch immer als möglich denken können; denn bezeichnet u eine Abscisse, und p die zugehörige Ordinate irgend einer regelmäßigen oder unregelmäßigen Curve, weßhalb auch jede Function von u

im weitesten Sinne genommen werden kann, so gibt der Flächeninhalt $\int p\,du$ jener krummen Linie den Werth der Integralformel $\int p\,du$, welcher wieder als eine Function von u angesehen werden kann; es stellt daher auch umgekehrt jene Function von u die Natur der Integralformel $\int p\,du$ vollständig dar. Daß aber jene Function der Größe $x + y$, welche für z genommen wird, der Bedingung entspricht, daß man in dem Differenziale $dz = p\,dx + q\,dy$ erhält $p = q$ oder $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right)$, ist für sich so einleuchtend, daß man einer weitern Erörterung durch Beyspiele gar nicht nöthig hat. Denn würde man z. B. setzen:

$$z = a^2 + b(x+y) + (x+y)^2 = a^2 + bx + by + x^2 + 2xy + y^2,$$

so wird man durch Differenziation erhalten:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = b + 2x + 2y \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = b + 2x + 2y,$$

welche beyden Werthe wirklich unter einander gleich sind.

Anmerkung 2.

§. 78. Wenn z eine Function der beyden Veränderlichen x und y ist, und man setzt

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad \text{so daß}$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = q$$

wird, so sey der Gegenstand dieses Kapitels die Auflösung jener Probleme, bey welchen irgend eine Gleichung zwischen p und q gegeben wird, in der aber keine der übrigen Veränderlichen x, y, z erscheinen soll.

Wenn demnach irgend eine Gleichung zwischen den beyden Formeln p und q und constanten Größen gegeben wird, so hat man die Natur einer Function z der beyden Veränderlichen x und y so zu bestimmen, daß den durch Differenziation sich ergebenden Formeln $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ jene festgesetzte Bedingung entspricht. Die Abhandlung über diese Materie haben wir bereits begonnen mit dem einfachsten Falle, wo $p = q$ ist, dessen Auflösung auch mit Hülfe des eben erklärten Princips ausgeführt werden kann. Aber eben dieses

Princip ist auch für die Auflösung des folgenden allgemeinern Problemes hinreichend.

Aufgabe 11.

§. 79. Die Natur der Function z im Allgemeinen zu bestimmen, wenn z eine solche Function der beyden Veränderlichen x und y seyn soll, daß

$$\alpha\left(\frac{dz}{dx}\right)+\beta\left(\frac{dz}{dy}\right)=\gamma$$

wird.

Auflösung.

Wird $dz = p\,dx + q\,dy$ gesetzt, so soll $\alpha p + \beta q = \gamma$ werden. Da nun $q = \frac{\gamma - \alpha p}{\beta}$ ist, so wird man finden:

$$dz = p\,dx + \left(\frac{\gamma - \alpha p}{\beta}\right) dy, \quad \text{oder}$$

$$dz = \frac{\gamma}{\beta}\,.\,dy + \frac{p}{\beta}(\beta\,dx - \alpha\,dy),$$

und diese Formel muß integrabel seyn. Weil aber der Theil $\frac{\gamma}{\beta}\,dy$ für sich integrabel ist, so muß auch der andere Theil die Integration zulassen; wird demnach $\beta x - \alpha y = u$ gesetzt, damit der zweyte Theil übergeht in $\frac{p}{\beta}\,.\,du$, so ist einleuchtend, daß p selbst eine Function von u seyn, und der durch Integration sich ergebende Ausdruck ebenfalls als Function von $u = \beta x - \alpha y$ erscheinen müsse. Setzen wir sonach

$$\int p\,(\beta\,dx - \alpha\,dy) = f\,(\beta x - \alpha y),$$

so werden wir erhalten:

$$z = \frac{\gamma}{\beta}y + \frac{1}{\beta}f\,(\beta x - \alpha y),$$

oder die gesuchte Gleichung, aus welcher die Beschaffenheit der Function z hervorgeht, wird seyn:

$$\beta z = \gamma y + f\,(\beta x - \alpha y),$$

wobey das Zeichen f eine beliebige continuirliche oder discontinuirliche Function des nachfolgenden Ausdruckes $\beta x - \alpha y$ andeutet. Bezeichnen wir das Differenziale des Ausdruckes $f(u)$ durch $du\,.\,f'(u)$, so wird man haben:

$$p = f'(\beta x - \alpha y) \text{ und}$$

$$q = \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} f'(\beta x - \alpha y),$$

und hieraus ergibt sich endlich offenbar

$$\alpha p + \beta q = \gamma.$$

Zusatz 1.

§. 80. Die Auflösung führt auf dasselbe Resultat, wenn wir für p seinen Werth $p = \frac{\gamma - \beta q}{\alpha}$ substituiren; denn dann wird

$$dz = \frac{\gamma}{\alpha} dx + \frac{q}{\alpha}(\alpha dy - \beta dx),$$

und demnach findet man auf dieselbe Art:

$$z = \frac{\gamma x}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} f(\alpha y - \beta x).$$

Obgleich diese Formel von der vorhergehenden Gleichung abzuweichen scheint, so läßt sie sich dennoch leicht auf dieselbe zurückführen, indem man dort

$$f(\beta x - \alpha y) = \frac{\gamma(\beta x - \alpha y)}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \varphi(\alpha y - \beta x)$$

setzt, welcher Ausdruck auch eine Function von $\beta x - \alpha y$ ist.

Zusatz 2.

§. 81. Wenn also in der Formel $dz = p dx + q dy$ wegen $\alpha = 1$, $\beta = 1$ und $\gamma = 1$, die Größe $p + q = 1$ seyn soll, so führt die Auflösung auf folgende Gleichung:

$$z = y + f(x - y).$$

Hat man demnach irgend eine Curve construirt, und es entspricht der Abscisse $x - y$ die Ordinate v, so wird $z = y + v$ seyn.

Anmerkung.

§. 82. Wird eine andere Relation zwischen p und q festgesetzt, so kann man die Auflösung nicht auf dieselbe Art ausführen, sondern man muß sich eines andern Princips bedienen. Die Richtigkeit hiervon erhellt aus den ersten Elementen der Integralrechnung. Es muß nämlich bemerkt werden, daß

$$\int p dx = px - \int x dp$$

sey, und auf ähnliche Art

$$\int q\,dy = qy - \int y\,dq,$$

so daß man, weil

$$z = \int (p\,dx + q\,dy)$$

ist, erhalten wird:

$$z = px + qy - \int (x\,dp + y\,dq).$$

Wie man aber dieses Princip auf die Auflösung solcher Fragen, wie die in dieses Kapitel gehörigen sind, anzuwenden habe, wird in den nachstehenden Aufgaben gelehrt werden.

Aufgabe 12.

§. 83. Es soll z eine solche Function der beyden Veränderlichen x und y seyn, daß $pq = 1$ wird, wenn man $dz = p\,dx + q\,dy$ setzt; man bestimme im Allgemeinen die Natur der Function z.

Auflösung.

Nach dem vorher festgesetzten Princip bemerken wir, daß

$$z = px + qy - \int (x\,dp + y\,dq)$$

seyn werde. Da nun $q = \frac{1}{p}$ wegen $pq = 1$ ist, so wird man erhalten:

$$z = px + \frac{y}{p} - \int \left(x\,dp - \frac{y\,dp}{p^2} \right).$$

Die Formel $\int \left(x - \frac{y}{p^2} \right) dp$ muß also integrabel seyn; allein im Allgemeinen läßt der Ausdruck $\int u\,dp$ die Integration nur dann zu, wenn u eine Function von p ist. Es muß daher in unserem Falle die Größe $x - \frac{y}{p^2}$ bloß eine Function von p seyn; daher wird auch das Integrale $\int dp \left(x - \frac{y}{p^2} \right)$ nur eine Function von p seyn, und wenn wir diese durch $f(p)$, ihr Differenziale aber durch $dp\,f'(p)$ bezeichnen, so wird seyn:

$$z = px + \frac{y}{p} - f(p) \quad \text{und}$$

$$x - \frac{y}{p^2} = f'(p).$$

Um also unser Problem auflösen zu können, müssen wir eine neue Veränderliche p einführen, durch welche in Verbindung mit y

die beyden übrigen x und z bestimmt werden. Man nehme daher die Veränderliche p, bezeichne irgend eine Function derselben durch f (p), und die hieraus durch Differenziation abgeleitete Function durch f′ (p), und nehme erstlich

$$x = \frac{y}{p^2} + f'(p),$$

so wird man sodann finden:

$$z = \frac{2y}{p} + pf'(p) - f(p),$$

welches die gesuchte allgemeine Auflösung unserer Aufgabe ist.

Zusatz 1.

§. 84. Hier läßt sich also die gesuchte Function z, durch x und y ausgedrückt, nicht in entwickelter Form darstellen, weil sich im Allgemeinen die Größe p aus der Gleichung $x - \frac{y}{p^2} = f'(p)$ durch x und y nicht ausdrücken läßt.

Zusatz 2.

§. 85. Nichtsdestoweniger aber ist die Auflösung für brauchbar und vollständig zu halten, weil durch Einführung der neuen Veränderlichen p aus den beyden von einander unabhängigen Variablen y und p die beyden übrigen x und z bestimmt werden.

Zusatz 3.

§. 86. Wenn wir $f'(p) = \alpha + \frac{\beta}{p^2}$ setzen, so werden wir finden

$$f(p) = \alpha p - \frac{\beta}{p} \text{ und}$$

$$(x - \alpha) = \frac{\beta + y}{p^2};$$

also $p = \sqrt{\frac{\beta + y}{x - \alpha}}$, und daher wird sich die gesuchte Function z unter folgender Form darstellen:

$$z = \frac{2y\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{\beta + y}} + \frac{\alpha y + \beta x}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta+y)}} - \frac{\alpha y + \beta x - 2\alpha\beta}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta+y)}},$$

oder

$$z = 2\sqrt{(x-\alpha)(y+\beta)},$$

welches eine particuläre Auflösung ist, und die einfachste ist $z = 2\sqrt{xy}$.

Anmerkung 1.

§. 87. So wie die Auflösung dieses Problemes aus einem andern Principe abgeleitet worden ist, so weicht auch die Form der Auflösung von den vorhergehenden Formen ab, weil sich hier die Gleichung zwischen x, y und z nicht in einer entwickelten Form darstellen läßt, sondern eine neue Veränderliche p eingeführt wird. Weil also vorher eine einzige Gleichung zwischen den drey Veränderlichen x, y und z die Auflösung enthalten hat, nun aber eine neue Veränderliche p hinzukommt, so erfordert die Auflösung zwey Gleichungen zwischen diesen vier Veränderlichen, und so finden wir für unsern Fall:

$$z = px + \frac{y}{p} - f(p) \quad \text{und}$$

$$x - \frac{y}{p^2} = f'(p),$$

wobey

$$d \,.\, f(p) = dp \,.\, f'(p),$$

wo wegen des unbestimmten Functionszeichens f, welches sich auch auf discontinuirliche Functionen erstreckt, die Auflösung sich als allgemein darstellt. Wenn wir hier die Größe p eliminiren könnten, so würde eine entwickelte Gleichung zwischen x, y und z zum Vorschein kommen; diese Elimination aber gelingt, so bald eine algebraische Function von p für f(p) genommen wird; im Allgemeinen aber läßt sich diese Gleichung nicht absondern. Demungeachtet aber kann dieses Problem mit Hülfe einer beliebig angenommenen Curve durch Construction dargestellt werden. Denn wird irgend eine reguläre oder irreguläre krumme Linie angenommen, so setze man die Abscisse = p, die Ordinate f'(p) = r, und man wird erhalten $f(p) = \int x\,dp$ als den Flächeninhalt derselben, und wenn man diesen = s setzt, so werden die beyden Gleichungen

$$x - \frac{y}{p^2} = r \quad \text{und}$$

$$z = px + \frac{y}{p} - s$$

die vollständige Auflösung des Problemes darbiethen. Nimmt man nämlich für x einen beliebigen Werth, so wird $y = p^2 (x - r)$ werden, und daher ergibt sich

$$z = 2px - pr - s,$$

bey welcher Auflösung rücksichtlich der practischen Anwendung nichts

zu wünschen übrig bleibt. Hieraus erhellet, daß es sich zufällig ereignen könne, daß man zwar neue Veränderliche einführen müsse, und dann die Auflösung durch drey Gleichungen gegeben wird, und auch in diesem Falle wird die practische Anwendung keine Schwierigkeit haben.

Anmerkung 2.

§. 88. Da für die Formel $dz = p dx + q dy$ die Gleichung $pq = 1$ Statt finden muß, so läßt sich durch Einführung des unbestimmten Winkels φ unsere Aufgabe noch auf eine andere Art, in einer eleganteren Form auflösen. Denn setzt man $p = \text{tang.}\, \varphi$, so wird $q = \text{cotang.}\, \varphi$, und weil

$$dz = dx\,.\,\text{tang.}\,\varphi + dy\,.\,\text{cotang.}\,\varphi$$

ist, so wird man durch die oben angedeutete Reduction erhalten:

$$z = x\,\text{tang.}\,\varphi + y\,\text{cotang.}\,\varphi - \int d\varphi \left(\frac{x}{\cos.^2\varphi} - \frac{y}{\sin.^2\varphi}\right),$$

woraus hervorgeht, daß die Formel $\frac{x}{\cos.^2\varphi} - \frac{y}{\sin.^2\varphi}$ eine Function von φ seyn müsse. Bezeichnet man diese durch $f'(\varphi)$, und setzt den Integralausdruck

$$\int d\varphi\, f'(\varphi) = f(\varphi),$$

so werden die beyden Gleichungen, welche die Auflösung enthalten, folgende seyn:

$$\frac{x}{\cos.^2\varphi} - \frac{y}{\sin.^2\varphi} = f'(\varphi) \quad \text{und}$$

$$z = x\,\text{tang.}\,\varphi + y\,\text{cotang.}\,\varphi - f(\varphi),$$

aus welchen man nun nach Gefallen x oder y eliminiren kann; ja es lassen sich sogar diese beyden Veränderlichen wegschaffen, und dann werden x und y, durch die beyden andern Variabeln z und φ ausgedrückt, unter folgender Form erscheinen:

$$x = \tfrac{1}{2} z\,\text{cotang.}\,\varphi + \tfrac{1}{2}\,\text{cotang.}\,\varphi\,.\,f(\varphi) + \tfrac{1}{2}\cos.^2\varphi\,.\,f'(\varphi)$$
$$y = \tfrac{1}{2} z\,\text{tang.}\,\varphi + \tfrac{1}{2}\,\text{tang}\,\varphi\,.\,f(\varphi) - \tfrac{1}{2}\sin.^2\varphi\,.\,f'(\varphi).$$

Nimmt man also hier die Differenzialien und setzt $dy = 0$, so wird sich aus der letztern Gleichung eine Relation zwischen dz und $d\varphi$ ergeben, und wenn man daher den Werth von $d\varphi$ in der erstern Gleichung substituirt, so muß nothwendig $dz = dx\,\text{tang.}\,\varphi$ werden. Wird auf ähnliche Art $dx = 0$ gesetzt, so wird man aus der andern Gleichung $dz = dy\,.\,\text{cotang.}\,\varphi$ erhalten.

Aufgabe 13.

§. 89. Sey z eine solche Function der beyden Veränderlichen x und y, daß $p^2 + q^2 = 1$ wird, wenn $dz = pdx + qdy$ gesetzt wird; man bestimme im Allgemeinen die Natur der Function z.

Auflösung.

Da man durch Reduction erhält:

$$z = px + qy - \int (xdp + ydq),$$

so wollen wir zur Vermeidung der irrationalen Größen

$$p = \frac{1 - r^2}{1 + r^2} \text{ und } q = \frac{2r}{1 + r^2}$$

setzen, denn dann wird $p^2 + q^2 = 1$. Es wird aber seyn

$$dp = \frac{-4rdr}{(1 + r^2)^2} \text{ und } dq = \frac{2dr(1 - r^2)}{(1 + r^2)^2},$$

und daher findet man:

$$z = \frac{(1 - r^2)x + 2ry}{1 + r^2} + 2\int \frac{2xrdr - ydr(1 - r^2)}{(1 + r^2)^2}.$$

Da nun diese Integralformel eine Function von r bezeichnet, so setze man dieselbe $= f(r)$ und ihr Differenziale $= dr \,.\, f'(r)$, und man wird erhalten:

$$\frac{2xr - y(1 - r^2)}{(1 + r^2)^2} = f'(r) \text{ und}$$

$$z = \frac{(1 - r^2)x + 2ry}{1 + r^2} + 2f(r).$$

Hieraus ergibt sich nun

$$x = \frac{(1 - r^2)y}{2r} + \frac{(1 + r^2)^2}{2r} f'(r),$$

und daher wird seyn:

$$z = \frac{(1 + r^2)y}{2r} + \frac{1 - r^4}{2r} f'(r) + 2f(r).$$

Zusatz 1.

§. 90. Wollen wir die irrationalen Größen nicht vermeiden, so werden wir wegen $q = \sqrt{1 - p^2}$ und $dq = \frac{-pdp}{\sqrt{1 - p^2}}$ erhalten:

$$z = px + y\sqrt{1 - p^2} - \int dp \left(x - \frac{py}{\sqrt{1 - p^2}}\right).$$

Setzen wir demnach

$$z = px + y\sqrt{1 - p^2} - f(p),$$

so finden wir

$$x - \frac{py}{\sqrt{1 - p^2}} = f'(p).$$

Zusatz 2.

§. 91. Die einfachste Auflösung wird zuverlässig erhalten, wenn man $f'(p) = 0$ nimmt, und daher wird, weil $x = \frac{py}{\sqrt{1 - p^2}}$ ist:

$$p = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ und } \sqrt{1 - p^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

also

$$z = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Aus diesem Werthe ergibt sich nun

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ und}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ folglich}$$

$$p^2 + q^2 = 1.$$

Zusatz 3.

§. 92. Setzen wir $p = \sin.\varphi$, so wird $q = \cos.\varphi$ werden, und demnach

$$z = x \sin.\varphi + y \cos.\varphi - \int d\varphi\, (x \cos.\varphi - y \sin.\varphi);$$

dieses Integrale wird $= f(\varphi)$ seyn, und das Differenziale desselben $= d\varphi\,.\,f'(\varphi)$; demnach werden wir erhalten:

$$z = x \sin.\varphi + y \cos.\varphi - f(\varphi) \text{ und}$$
$$x \cos.\varphi - y \sin.\varphi = f'(\varphi).$$

Aufgabe 14.

§. 93. Wenn z eine solche Function der beyden Veränderlichen x und y seyn soll, daß, wenn man $dz = pdx + qdy$ setzt, die Größe q einer gegebenen Function von p wird; so ist im Allgemeinen die Natur dieser Function z aufzusuchen.

Auflösung.

Da q eine gegebene Function von p ist, so setze man $dq = rdp$, so wird auch r eine bekannte Function von p bezeichnen. Unsere allgemeine Gleichung, welche die Auflösung gibt, wird daher folgende Form annehmen:

$$z = px + qy - \int dp\,(x + ry),$$

woraus erhellet, daß das Integrale $\int dp\,(x + ry)$ eine Function von p seyn werde, und wenn wir diese allgemein durch f(p) bezeichnen, ihr Differenziale aber durch $dp\,f'(p)$; so werden wir erhalten:

$$z = px + qy - f(p) \quad \text{und}$$
$$x + ry = f'(p),$$

welche zwey Gleichungen die Auflösung unseres Problemes in der größten Allgemeinheit enthalten, in wie fern nämlich f(p) irgend eine stätige oder discontinuirliche Function von p bezeichnen kann.

Zusatz 1.

§. 94. Da q eine gegebene Function von p bezeichnet, und daher $r = \frac{dq}{dp}$ ist, so wird, wenn die unbestimmte Function von p, nämlich $f(p) = P$ gesetzt wird, wegen $f'(p) = \frac{dP}{dp}$ die Auflösung in folgenden zwey Gleichungen enthalten seyn:

$$z = px + qy - P \quad \text{und}$$
$$xdp + ydq = dP.$$

Zusatz 2.

§. 95. Bedienen wir uns zur Auflösung irgend einer Curve, nehmen bey derselben die Abscisse $= p$ und die Ordinate $= f'(p)$, so wird der Flächeninhalt dieser Curve den Werth von f(p) geben. Bezeichnet man aber die Ordinate durch f(p), so wird f'(p) die Tangente des Winkels darstellen, welchen die Tangente der Curve mit der Axe bildet.

Anmerkung.

§. 96. So kann also jede nach Belieben beschriebene Curve, sey sie stätig oder in irgend einer analytischen Gleichung enthalten, oder mit freyer Hand wie immer verzeichnet, zur Auflösung unseres Problemes gebraucht werden. Denn wird die Abscisse mit p bezeichnet,

so kann die Ordinate entweder zur Darstellung von $f(p)$ oder von $f'(p)$ genommen werden, und es läßt sich nicht leicht behaupten, welcher von beyden [illegible]en für die Praxis bequemer sey. Wenn aber derley reelle Probleme vorkommen, so bestimmen gewöhnlich die übrigen Umstände die Auflösung, und es läßt sich aus denselben für jeden Fall die zweckmäßigste Construction leicht entnehmen. Die Probleme aus der Mechanik aber, bey welchen dieser Theil der Integralrechnung angewendet werden muß, führen immer auf Differenzialformeln der zweyten und der höhern Ordnungen, deren Auflösung wohl nicht früher unternommen werden kann, als bis man für die Differenzialformeln des ersten Grades eine Methode aufgefunden hat. Bisher konnten wir zwar die vorgelegten Aufgaben vollständig auflösen; wenn aber eine vorgeschriebene Bedingung die Relation der Ausdrücke $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ durch die übrigen Veränderlichen x, y und z bestimmt, so gelingt im Allgemeinen die Auflösung nicht mehr, außer wenn die festgesetzte Bedingung nur eine einzige Veränderliche mit den beyden Differenzialformeln verbindet.

Kapitel IV.

Von der Auflösung der Gleichungen, bey welchen eine Relation zwischen den beyden Differenzialformeln und einer der drey Veränderlichen gegeben wird.

Aufgabe 15.

§. 97. Wenn z eine solche Function der beyden Veränderlichen x und y seyn soll, daß $q = \frac{px}{a}$ wird, wenn man $dz = pdx + qdy$ setzt, so ist die Natur dieser Function im Allgemeinen zu bestimmen.

Auflösung.

Da

$$dz = pdx + \frac{pxdy}{a} = px\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{a}\right)$$

ist, und diese Formel integrabel seyn soll, so muß nothwendig px, und daher auch z eine Function der Größe $lx + \frac{y}{a}$ seyn. Die Auflösung unseres Problemes wird sich daher im Allgemeinen so gestalten, daß die Gleichungen

$$z = f\left[lx + \frac{y}{a}\right] \text{ und}$$

$$px = f'\left[lx + \frac{y}{a}\right]$$

Statt finden, indem man nämlich immer $d.f(u) = du.f'(u)$ setzt. Hieraus aber wird sich ergeben

$$p = \frac{1}{x} f'\left(lx + \frac{y}{a}\right) \text{ und}$$

$$q = \frac{1}{a} f'\left(lx + \frac{y}{a}\right),$$

also $q = \frac{px}{a}$, gerade wie es die Aufgabe verlangt.

Zusatz 1.

§. 98. Da

$$z = px - \int xdp + \int \frac{pxdy}{a}$$

$$= px + \int px\left(\frac{dy}{a} - \frac{dp}{p}\right)$$

ist, so läßt sich hieraus noch eine andere Auflösung ableiten. Denn wenn wir

$$\int px\left(\frac{dy}{a}-\frac{dp}{p}\right)=f\left(\frac{y}{a}-lp\right)$$

setzen, so werden wir erhalten:

$$px=f'\left(\frac{y}{a}-lp\right),$$

und daher

$$z=f'\left(\frac{y}{a}-lp\right)+f\left(\frac{y}{a}-lp\right).$$

Zusatz 2.

§. 99. Bey dieser Auflösung wird demnach eine neue Veränderliche p eingeführt, und durch diese und die Größe y zugleich bestimmt man erstlich

$$x=\frac{1}{p}f'\left(\frac{y}{a}-lp\right),$$

und dann die gesuchte Function selbst, nämlich

$$z=px+f\left(\frac{y}{a}-lp\right).$$

Die vorhergehende Auflösung aber verdient ohne Zweifel den Vorzug vor dieser letzteren, weil dieselbe die Größe z unmittelbar durch x und y ausdrückt.

Anmerkung.

§. 100. Damit wir diese beyden Auflösungen mit einander vergleichen können, so müssen wir, weil in denselben willkürliche Functionen verschiedener Natur erscheinen, auch verschiedene Kennzeichen gebrauchen.

Da also die erste Auflösung auf die Gleichungen führt:

$$z=f\left(\frac{y}{a}+lx\right) \text{ und}$$

$$px=f'\left(\frac{y}{a}+lx\right),$$

die andere aber auf die Gleichungen:

$$z=F\left(\frac{y}{a}-lp\right)+F'\left(\frac{y}{a}-lp\right) \text{ und}$$

$$px=F'\left(\frac{y}{a}-lp\right),$$

so ist einleuchtend, daß folgende Gleichungen Statt finden werden:

$$f'\left(\frac{y}{a} + lx\right) = F'\left(\frac{y}{a} - lp\right) \text{ und}$$

$$f\left(\frac{y}{a} + lx\right) = F\left(\frac{y}{a} - lp\right) + F'\left(\frac{y}{a} - lp\right).$$

Hiedurch wird nicht allein die Natur und Beziehung der beyden durch f und F bezeichneten Functionen bestimmt, sondern es muß hieraus auch die Gleichung

$$px = f'\left(\frac{y}{a} + lx\right)$$

folgen, was nicht so klar vor Augen zu liegen scheint. Allein eben deßhalb ist dieses Problem um so merkwürdiger, weil die zweyte Auflösung, bey welcher eine neue Veränderliche p eingeführt wird, übereinstimmt mit der erstern, wo z durch x und y unmittelbar bestimmt wird, und die Übereinstimmung dieser Auflösungen dennoch nicht deutlich gezeigt werden kann. Wenn wir daher auf solche Auflösungen stoßen, wie sie bey den letztern Aufgaben des vorhergehenden Kapitels Statt finden, in welchen eine neue Variable eingeführt wird, so dürfen wir nicht gleich alle Hoffnung, jene Veränderliche zu eliminiren, aufgeben, da in diesem Falle die zweyte Auflösung sich zuverläßig auf die erstere bringen läßt, obgleich die Art und Weise, diesen Zweck zu erreichen, nicht sogleich in die Augen fällt, die wir jedoch weiter unten im §. 119 nachweisen werden.

Aufgabe 16.

§. 101. Sey z eine solche Function der beyden Veränderlichen x und y, daß, wenn man

$$dz = pdx + qdy$$

setzt, $q = pX + T$ wird, wobey X und T beliebige Functionen von x seyn mögen; man bestimme die Natur der Function z im Allgemeinen.

Auflösung.

Da also

$$dz = pdx + pXdy + Tdy$$

ist, so setze man $p = r - \frac{T}{X}$, damit man erhalte:

$$dz = rdx - \frac{Tdx}{X} + rXdy$$

$$= \frac{-Tdx}{X} + rX\left(\frac{dx}{X} + dy\right).$$

Hat man diese Reduction ausgeführt, so ist einleuchtend, daß sowohl rX, als auch

$$\int rX\left(\frac{dx}{X}+dy\right)$$

eine Function der Größe $y+\int\frac{dx}{X}$ seyn werde. Wenn wir daher

$$\int rX\left(\frac{dx}{X}+dy\right)=f\left(y+\int\frac{dx}{X}\right)$$

setzen, so werden wir erhalten:

$$rX=f'\left(y+\int\frac{dx}{X}\right),$$

und dann wird die gesuchte Function seyn:

$$z=-\int\frac{T\,dx}{X}+f\left(y+\int\frac{dx}{X}\right),$$

welches Integrale wegen der durch f angedeuteten unbestimmten Function vollständig ist. Nun aber wird man erhalten:

$$p=\frac{-T}{X}+\frac{1}{X}f'\left(y+\int\frac{dx}{X}\right) \text{ und}$$

$$q=f'\left(y+\int\frac{dx}{X}\right),$$

und daher leuchtet ein, daß auch $q=pX+T$ seyn werde. Weil aber X und T gegebene Functionen von x sind, so stehen die Integralformeln $\int\frac{dx}{X}$ und $\int\frac{T\,dx}{X}$ der Auflösung nicht im Wege.

Zusatz 1.

§. 102. Bisweilen wird die Auflösung dadurch erleichtert, wenn man der vorgeschriebenen Bedingung gemäß $p=\frac{q}{X}-\frac{T}{X}$ setzet, denn dann wird

$$dz=-\frac{T\,dx}{X}+\frac{q\,dx}{X}+q\,dy \text{ und}$$

$$z=-\int\frac{T\,dx}{X}+\int q\left(dy+\frac{dx}{X}\right);$$

nun ist offenbar

$$\int q\left(dy+\frac{dx}{X}\right)=f\left(y+\int\frac{dx}{X}\right),$$

und so kommt die vorhergehende Auflösung selbst zum Vorschein.

Zusatz 2.

§. 103. Auf dieselbe Art wird die Aufgabe aufgelöst, wenn die Bedingungsgleichung $q = pY + V$, wobey Y und V gegebene Functionen von y sind, vorgelegt wird; denn dann wird man erhalten:

$$dz = pdx + pYdy + Vdy \quad \text{und}$$
$$z = \int Vdy + \int p\,(dx + Ydy).$$

Es wird also

$$\int p\,(dx + Ydy) = f\,(x + \int Ydy),$$

und die Auflösung wird seyn:

$$z = \int Vdy + f\,(x + \int Ydy);$$

demnach findet man

$$p = f'\,(x + \int Ydy) \quad \text{und}$$
$$q = V + Yf'\,(x + \int Ydy).$$

Anmerkung.

§. 104. Die Form der hier gefundenen Auflösung wird uns belehren können, wie das Problem beschaffen seyn müsse, damit dasselbe auf diese Art aufgelöst, und die Function z durch die beyden andern Veränderlichen x und y dargestellt werden könne. Denn es seyen K und V was immer für Functionen von x und y, so erhalten wir durch Differenziation

$$dK = Ldx + Mdy \quad \text{und}$$
$$dV = Pdx + Qdy.$$

Gehen wir nun von der Auflösung aus, und setzen

$$z = K + f\,(V),$$

so werden wir durch Differenziation finden:

$$dz = Ldx + Mdy + (Pdx + Qdy)\,f'\,(V).$$

Weil wir nun durch Vergleichung dieser Form mit der angenommenen

$$dz = pdx + qdy$$

erhalten:

$$p = L + Pf'\,(V) \quad \text{und}$$
$$q = M + Qf'\,(V);$$

so wird folgende Gleichung zum Vorschein kommen:

$$Qp - Pq = LQ - MP.$$

Wird daher die Aufgabe vorgelegt, daß, wenn

$$dz = pdx + qdy$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$q = \frac{Q}{P}p + M - \frac{LQ}{P}$$

Statt finden soll, so wird die Auflösung $z = K + f(V)$ seyn, wenn nur M und L und eben so P und Q so beschaffen sind, daß

$$Ldx + Mdy = dK \text{ und}$$
$$Pdx + Qdy = dV$$

wird; allein diese Fälle gehören in das nächste Kapitel.

Aufgabe 17.

§. 165. Es soll z eine solche Function der beyden Veränderlichen x und y seyn, daß, wenn man

$$dz = pdx + qdy$$

setzt, $q = Px + \Pi$ wird, wo P und Π gegebene Functionen von p seyn sollen; man suche im Allgemeinen die Natur der Function z zu bestimmen.

Auflösung.

Da also

$$dz = pdx + Pxdy + \Pi dy$$

ist, so wird man erhalten:

$$z = px + \int(Pxdy + \Pi dy - xdp).$$

Nun setze man $Px + \Pi = v$, so daß $x = \frac{v - \Pi}{P}$ ist, und man wird finden:

$$z = px + \int\left(vdy - \frac{vdp}{P} + \frac{\Pi dp}{P}\right).$$

Weil P und Π Functionen von p sind, und daher der Ausdruck $\int\frac{\Pi dp}{P}$ gegeben ist, so wird man erhalten:

$$z = px + \int\frac{\Pi dp}{P} + \int v\left(dy - \frac{dp}{P}\right),$$

und hieraus erhellet, daß sowohl v als auch $\int v\left(dy - \frac{dp}{P}\right)$ eine Function von $y - \int\frac{dp}{P}$ seyn müsse. Setzen wir also

$$\int v\left(dy - \frac{dp}{P}\right) = f\left(y - \int\frac{dp}{P}\right),$$

so werden wir erhalten:

$$v = Px + \Pi = f'\left(y - \int\frac{dp}{P}\right),$$

und daher

$$x = \frac{-\Pi}{P} + \frac{1}{P} f'\left(y - \int\frac{dp}{P}\right);$$

dann aber wird

$$z = \int\frac{\Pi\,dp}{P} - \frac{\Pi p}{P} + \frac{p}{P} f'\left(y - \int\frac{dp}{P}\right) + f\left(y - \int\frac{dp}{P}\right).$$

Zusatz 1.

§. 106. Bey der Auflösung dieser Aufgabe wird ebenfalls eine neue Veränderliche p eingeführt, wodurch zugleich mit y zuerst die Veränderliche x, dann aber die gesuchte Function z selbst bestimmt wird.

Zusatz 2.

§. 107. Allein diese neue Variable p läßt sich aus der Rechnung nicht wegschaffen, wie dieß früher gewöhnlich geschah, weil hier P und Π Functionen von p bezeichnen, deren Natur nur auf unser Problem influirt.

Zusatz 3.

§. 108. Auf ähnliche Art wird die Aufgabe aufgelöst werden, wenn durch Vertauschung der Größen x und y die Größe p durch y und q so bestimmt wird, daß $p = Qy + \Xi$ ist, wobey Q und Ξ bekannte Functionen von q bezeichnen.

Anmerkung.

§. 109. Wir haben uns vorgenommen, in diesem Kapitel solche Aufgaben zu behandeln, deren Bedingung durch eine Gleichung zwischen den beyden Differenzialformeln $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = q$ und einer der drey Veränderlichen x, y, z auf irgend eine Weise ausgedrückt wird. Die beyden Probleme aber, die wir von dieser Art hier entwickelt haben, umfassen nur gewisse Fälle, und die Auflösung derselben läßt sich nach einer eigenthümlichen Methode durchführen, und wird zugleich auf einfachere Formeln zurückgeführt. Bey der letztern Aufgabe haben wir die Relation zwischen p, q und x so angenommen,

daß $q = Px + \Pi$ ist, oder daß in dem Werthe von q, ausgedrückt durch p und x, die Größe x den ersten Grad nicht überschreitet; bey dem ersten Probleme aber so, daß $q = pX + T$ wird, oder daß in dem durch p und x ausgedrückten Werthe von q die Größe p nur eine Dimension erhält. Übrigens wird es gut seyn, zu bemerken, daß im Allgemeinen sowohl die Größen p und x, als auch die Größen q und y vertauscht werden können. Denn da

$$\int p\,dx = px - \int x\,dp$$

ist, so wird man statt

$$z = \int (p\,dx + q\,dy)$$

erhalten:

$$z = px + \int (q\,dy - x\,dp).$$

Auf ähnliche Art ist

$$z = qy + \int (p\,dx - y\,dq),$$

also auch

$$z = px + qy - \int (x\,dp + y\,dq).$$

In allen Fällen, in welchen demnach eine dieser vier Integralformeln die Integration zuläßt, werden auch die drey übrigen Formeln integrabel seyn. Da wir nur im vorigen Kapitel die erste dieser Formeln aufgelöst haben, wenn p oder q auf irgend eine Weise durch x und y gegeben wird, so wird sich auf ähnliche Art die zweyte Formel auflösen lassen, wenn q durch p und y gegeben ist, die dritte Formel aber, wenn p durch x und q, und die vierte Formel endlich, wenn entweder x durch p und q oder y durch p und q auf irgend eine Art gegeben ist. Da sich diese Fragen im Allgemeinen beantworten lassen, so wollen wir sie in der folgenden Aufgabe entwickeln.

Aufgabe 18.

§. 110. Sey $dz = p\,dx + q\,dy$; wenn nun durch irgend eine Gleichung die Relation zwischen p, q und x festgesetzt wird, so soll die Natur der Function z, wie sie auch durch die beyden Veränderlichen x und y bestimmt werden mag, im Allgemeinen aufgesucht werden.

Auflösung.

Man suche aus der zwischen p, q und x vorgelegten Gleichung den Werth von x, welcher irgend einer Function von p und q gleich

seyn wird. Da nun

$$z = px + qy - \int(xdp + ydq)$$

ist, und weil x eine gegebene Function von p und q bezeichnet, so integrire man die Formel $x\,dp$, indem man die Größe q als constant betrachtet, und es sey

$$\int x\,dp = V + f(q),$$

so wird V eine bekannte Function von p und q seyn, durch deren Differenziation man erhält:

$$dV = x\,dp + S\,dq,$$

wobey auch S eine bekannte Function von p und q seyn wird. Weil nun die Formel $\int(x\,dp + y\,dq)$ die Integration zulassen muß, so wird sie dem Ausdrucke $V + f(q)$ gleich werden, und demnach findet man durch Differenziation

$$x\,dp + y\,dq = x\,dp + S\,dq + dq f'(q), \text{ also}$$
$$y = S + f'(q), \text{ und}$$
$$z = px + qy - V - f(q), \text{ oder}$$
$$z = px + Sq + qf'(q) - f(q) - V.$$

Man gelangt demnach auf folgende Art zur Integration:

Erstlich wird durch die festgesetzte Bedingung x durch p und q gegeben; dann betrachte man q als unveränderlich und setze $V = \int x\,dp$, und umgekehrt $dV = x\,dp + S\,dq$. Sind aber V und S mittelst p und q gefunden, so werden die übrigen Größen y und z durch dieselben auf folgende Art ausgedrückt werden:

$$y = S + f'(q) \text{ und}$$
$$z = px + Sq + qf'(q) - f(q) - V,$$

welche Auflösung auch für vollständig und ganz allgemein anzusehen ist, weil $f(q)$ eine beliebige Function von q, sowohl eine stätige, als auch eine discontinuirliche bezeichnet.

Andere Auflösung.

§. 111. Oder man suche aus der zwischen p, q und x gegebenen Gleichung den Werth von p, ausgedrückt durch x und q, so daß p irgend einer bekannten Function der beyden Veränderlichen x und q gleich werde, durch welche wir auch die übrigen Größen y und z zu bestimmen trachten müssen. Zu diesem Zwecke bedienen wir uns der Formel

$$z = qy + \int(pdx - ydq),$$

und da p eine Function von x und q ist, so wird es eine solche Function V von derselben geben, daß

$$dV = pdx + Rdq$$

wird. Man setze demnach

$$\int(pdx - ydq) = V + f(q);$$

so wird man finden:

$$y = -R - f'(q) \text{ und}$$
$$z = qy + V + f(q).$$

Zusatz 1.

§. 112. Beyde Auflösungen gestatten in der Anwendung dieselbe Bequemlichkeit, wenn aus der zwischen p, q und x gegebenen Relation sich die Größe x eben so leicht wie die Größe p bestimmen läßt. Wenn sich aber eine dieser beyden Größen bequemer bestimmen läßt, so wird man sich jener Auflösung bedienen, welche für den vorgelegten Fall zweckmäßiger ist.

Zusatz 2.

§. 113. Läßt sich aber weder p noch x bequem bestimmen, so kann man dennoch hier die Auflösung der Gleichungen einer beliebigen Ordnung, ja selbst der transcendenten Gleichungen als eine bekannte Sache ansehen. Wenn sich übrigens auch q leicht durch p und x bestimmen läßt, so ist dadurch für die Rechnung doch nichts gewonnen.

Zusatz 3.

§. 114. Nach diesem höchst allgemeinen Probleme lassen sich auch die beyden vorhergehenden auflösen; allein die so gefundene Auflösung wird von der vorhergehenden abweichen, indem diese Auflösung nach einer besondern Methode abgeleitet worden ist, und es wird sich wohl der Mühe lohnen, diese beyden Auflösungen mit einander zu vergleichen.

Beyspiel 1.

§. 115. Die Natur der Function z zu bestimmen, wenn $q = pX + T$ seyn soll, wobey X und T Functionen von x bezeichnen.

Hier wird man sich der letztern Auflösung bedienen müssen, für welche $p = \frac{q - T}{X}$ ist, und wenn man q als unveränderlich ansieht, so wird

$$V = \int p\,dx = q\int\frac{dx}{X} - \int\frac{T\,dx}{X},$$

also wird

$$R = \left(\frac{dV}{dq}\right) = \int\frac{dx}{X};$$

folglich wird die Auflösung in folgenden Formeln enthalten seyn:

$$q = pX + T;$$
$$y = -\int\frac{dx}{X} - f'(q);$$
$$z = -\int\frac{T\,dx}{X} - qf'(q) + f(q);$$

die erstere Auflösung aber stellte sich so dar:

$$q = pX + T;$$
$$q = f'\left(y + \int\frac{dx}{X}\right) \text{ und}$$
$$z = -\int\frac{T\,dx}{X} + f\left(y + \int\frac{dx}{X}\right).$$

Anmerkung.

§. 116. Die Übereinstimmung dieser zwey Auflösungen läßt sich so zeigen, daß aus der, welche wir hier gefunden haben, die vorhergehende nach einer gesetzmäßigen Folgerung gebildet wird. Denn da

$$f'(q) = -y - \int\frac{dx}{X}$$

ist, so setze man Kürze halber $y + \int\frac{dx}{X} = v$, so daß $f'(q) = -v$ wird; es wird demnach umgekehrt q irgend einer Function von v gleich werden, und man setze $q = F'(v)$, so wird $dq = dv \,.\, F''(v)$; also

$$dq f'(q) = -v\,dv \,.\, F''(v) = -v\,d \,.\, F'(v);$$

folglich durch Integration

$$f(q) = -\int v\,d \,.\, F'(v) = -vF'(v) + \int dv \,.\, F'(v)$$
$$= -vF'(v) + F(v).$$

Da nun

$$z = -\int\frac{T\,dx}{X} - qf'(q) + f(q)$$

ist, so wird man erhalten:

$$z = -\int \frac{T\,dx}{X} + vF'(v) - vF'(v) + F(v), \text{ oder}$$

$$z = -\int \frac{T\,dx}{X} + F\left(y + \int \frac{dx}{X}\right),$$

welches die vorhergehende Auflösung selbst ist.

Beyspiel 2.

§. 117. Wenn $q = Px + \Pi$ seyn soll, wobey P und Π gegebene Functionen von p bezeichnen, so sey eine Function z von der Beschaffenheit zu finden, daß $dz = p\,dx + q\,dy$ werde.

Hier werden wir uns der erstern Auflösung bedienen müssen, weil $x = \frac{q - \Pi}{P}$ ist. Man betrachte also q als constant, und suche

$$V = \int x\,dp = q\int \frac{dp}{P} - \int \frac{\Pi\,dp}{P},$$

so erhält man:

$$R = \left(\frac{dV}{dq}\right) = \int \frac{dp}{P}.$$

Man findet demnach für die Auflösung

$$y = \int \frac{dp}{P} + f'(q), \text{ und}$$

$$z = \frac{pq}{P} - \frac{p\Pi}{P} + q\int \frac{dp}{P} + qf'(q) - f(q) - q\int \frac{dp}{P} + \int \frac{\Pi\,dp}{P},$$

oder

$$z = \frac{p(q - \Pi)}{P} + \int \frac{\Pi\,dp}{P} + qf'(q) - f(q).$$

Als Auflösung desselben Falles aber haben wir oben (§. 105) gefunden:

$$x = \frac{-\Pi}{P} + \frac{1}{P} f'\left(y - \int \frac{dp}{P}\right) \text{ und}$$

$$q = Px + \Pi, \text{ endlich}$$

$$z = \frac{-p\Pi}{P} + \int \frac{\Pi\,dp}{P} + \frac{p}{P} f'\left(y - \int \frac{dp}{P}\right) + f\left(y - \int \frac{dp}{P}\right).$$

Anmerkung 1.

§. 118. Wir wollen nun untersuchen, wie wir die hier gefundene Auflösung auf die obige zurückführen können.

Weil wir oben

$$y - \int \frac{dp}{P} = f'(q)$$

gefunden haben, so wird umgekehrt q als Function der Größe $y - \int \frac{dp}{P}$ erscheinen; man setze sonach

$$q = F'\left(y - \int \frac{dp}{P}\right),$$

und man wird sogleich erhalten:

$$x = \frac{-\Pi}{P} + \frac{1}{P} F'\left(y - \int \frac{dp}{P}\right).$$

Sey nun Kürze halber $y - \int \frac{dp}{P} = v$, so daß

$$q = F'(v) \text{ und } v = f'(q)$$

wird, und es wird dann

$$F(v) = \int q\,dv = qv - \int v\,dq = qv - \int dq\,f'(q)$$

werden; also ist

$F(v) = qv - f(q)$, wobey

$f(q) = q\left(y - \int \frac{dp}{P}\right) - F\left(y - \int \frac{dp}{P}\right)$, oder

$$f(q) = \left(y - \int \frac{dp}{P}\right) F'\left(y - \int \frac{dp}{P}\right) - F\left(y - \int \frac{dp}{P}\right)$$

ist. Substituiren wir diese Werthe, so werden wir finden:

$$x = -\frac{\Pi}{P} + \frac{1}{P} F'\left(y - \int \frac{dp}{P}\right) \text{ und}$$

$$z = \frac{-p\Pi}{P} + \frac{p}{P} F'\left(y - \int \frac{dp}{P}\right) + \int \frac{\Pi\,dp}{P}$$
$$+ \left(y - \int \frac{dp}{P}\right) F'\left(y - \int \frac{dp}{P}\right)$$
$$- \left(y - \int \frac{dp}{P}\right) F'\left(y - \int \frac{dp}{P}\right) + F\left(y - \int \frac{dp}{P}\right),$$

oder

$$z = \frac{-p\Pi}{P} + \frac{p}{P} F'\left(y - \int \frac{dp}{P}\right) + \int \frac{\Pi\,dp}{P} + F\left(y - \int \frac{dp}{P}\right),$$

welches die vorhin gefundene Auflösung selbst ist.

Anmerkung 2.

§. 119. Nachdem wir nun diese Übereinstimmung gezeigt haben, so werden wir auch den oben (§. 100) bemerkten Zusammenhang nach-

weisen können, obgleich er weit verborgener zu seyn scheint. Die am angeführten Orte gefundene Auflösung war:

$$px = F'\left(\frac{y}{a} - lp\right) \text{ und}$$

$$z = px + F\left(\frac{y}{a} - lp\right).$$

Aus der erstern dieser Formeln erhellet, daß umgekehrt $\frac{y}{a} - lp$ eine Function von px seyn werde; also wird auch $\frac{y}{a} - lp + lpx$ oder $\frac{y}{a} + lx$ einer Function von px gleich seyn; folglich wird auch wieder umgekehrt px als eine Function von $\frac{y}{a} + lx$ angesehen werden können. Man setze also

$$px = f'\left(\frac{y}{a} + lx\right),$$

so wird man, weil

$$d.F\left(\frac{y}{a} - lp\right) = \left(\frac{dy}{a} - \frac{dp}{p}\right) F'\left(\frac{y}{a} - lp\right)$$

ist, erhalten:

$$\begin{aligned} F\left(\frac{y}{a} - lp\right) &= \int px\left(\frac{dy}{a} - \frac{dp}{p}\right) \\ &= \int px\left(\frac{dy}{a} + \frac{dx}{x}\right) - \int px\left(\frac{dx}{x} + \frac{dp}{p}\right) \\ &= \int px\left(\frac{dy}{a} + \frac{dx}{x}\right) - px. \end{aligned}$$

Substituirt man nun für px den Werth $f'\left(\frac{y}{a} + lx\right)$, so wird man finden:

$$\begin{aligned} F\left(\frac{y}{a} - lp\right) &= -px + \int\left(\frac{dy}{a} + \frac{dx}{x}\right) f'\left(\frac{y}{a} + lx\right) \\ &= -px + f\left(\frac{y}{a} + lx\right), \end{aligned}$$

so daß man hieraus

$$z = f\left(\frac{y}{a} + lx\right)$$

findet, welche Gleichung die zweyte Auflösung selbst darbiethet.

Diese Reduction verbreitet demnach nicht wenig Licht über die Auffindung der übrigen verborgenen Wahrheiten dieser Art. Bey diesem Schlusse besteht also die Hauptsache darin, daß, wenn $r = f'(s)$

ist, auch $r = F'(s + R)$ seyn werde, wobey R eine Function von r bezeichnet, was übrigens für sich klar ist, weil sich jedesmahl r durch s ausdrücken läßt. Da also

$$f'(s) = r = F'(s + R)$$

ist, so wird man erhalten:

$$f(s) = \int ds \,.\, f'(s) = \int r\, ds = \int r\,(ds + dR - dR)$$
$$= \int (ds + dR)\,.F'(s + R) - \int r\, dR,$$

und daher

$$f(s) = F(s + R) - \int r\, dR;$$

folglich kann man statt der Functionen von der Größe s Functionen der Größe $(s + R)$ einführen. Wenn nämlich $r = f'(s)$ ist, so kann man $r = F'(s + R)$ nehmen, wobey R irgend eine Function von r bezeichnet; dann aber wird man finden:

$$f(s) = F(s + R) - \int r\, dR.$$

Beyspiel 3.

§. 120. Sey $dz = p\,dx + q\,dy$ und x bezeichne eine homogene Function von n Dimensionen der Größen p und q; man bestimme die Natur der Function z.

Da x durch p und q gegeben wird, so wird man sich der erstern Auflösung bedienen müssen, und weil x einer homogenen Function von n Dimensionen der Größen p und q gleich ist, so setze man $p = qr$, und es wird $x = q^n R$ werden, wo R bloß eine Function von r allein ausdrückt. Nun sehe man q als unveränderlich an, und suche

$$V = \int x\, dp = \int q^{n+1} R\, dr,$$

so wird, weil $dp = q\, dr$ ist:

$$V = q^{n+1} \int R\, dr,$$

welches Integrale bekannt ist. Durch Differenziation wird man demnach erhalten:

$$dV = q^{n+1} R\, dr + (n + 1)\, q^n\, dq \int R\, dr,$$

und damit man diesen Ausdruck mit der Formel

$$dV = x\, dp + S\, dq = q^n R\, dp + S\, dq$$

vergleichen kann, setze man hier, weil $dp = q\, dr + r\, dq$ ist, diesen Werth, so wird

$$dV = q^{n+1} R dr + q^n R r dq + S dq;$$

man erhält demnach

$$S = - q^n R r + (n+1) q^n \int R dr,$$

und daher wird

$$y = - q^n R r + (n+1) q^n \int R dr + f'(q),$$

und $x = q^n R$, endlich

$$z = n q^{n+1} \int R dr + q f'(q) - f(q),$$

wobey $p = qr$ ist.

Zusatz 1.

§. 121. Sey $x = \frac{p^m}{q^m}$, so wird, wenn man $p = qr$ setzt, $x = r^m$, also $n = 0$ und $R = r^m$; folglich wird

$$y = - r^{m+1} + \frac{r^{m+1}}{m+1} + f'(q) = \frac{-m}{m+1} r^{m+1} + f'(q)$$

und

$$z = q f'(q) - f(q).$$

Weil nun $r = x^{\frac{1}{m}}$ ist, so wird man erhalten:

$$y = \frac{-m}{m+1} x^{\frac{m+1}{m}} + f'(q).$$

Zusatz 2.

§. 122. In eben dem Falle, in welchem $x = \frac{p^m}{q^m}$ ist, wird also q einer Function der Größe $y + \frac{m}{m+1} x^{\frac{m+1}{m}}$ gleich werden. Setzt man diese Größe $= v$ und $q = F'(v)$, so daß $v = f'(q)$ ist, so wird man erhalten:

$$f(q) = \int dq f'(q) = \int v dv . F''(v),$$

weil $dq = dv . F''(v)$ ist, und hieraus wird gefolgert:

$$f(q) = vF'(v) - F(v) \text{ und}$$

$$z = F(v) = F\left[y + \frac{m}{m+1} x^{\frac{m+1}{m}}\right].$$

Beyspiel 4.

§. 123. Eine solche Function z der beyden Veränderlichen x und y zu bestimmen, daß

$$p^3 + x^3 = 3pqx$$

wird, wenn man $dz = p\,dx + q\,dy$ setzt.

Auflösung.

Man betrachte die Formel

$$z = qy + \int (p\,dx - y\,dq),$$

wo nun der Ausdruck $p\,dx - y\,dq$ integrabel gemacht werden muß. Man setze $p = ux$, so erhält man nach der vorgeschriebenen Bedingung

$$x(1 + u^3) = 3qu,$$

und daher wird

$$x = \frac{3qu}{1 + u^3} \text{ und } p = \frac{3qu^2}{1 + u^3},$$

dann aber ist

$$dx = \frac{3q\,du\,(1 - 2u^3)}{(1 + u^3)^2} + \frac{3u\,dq}{1 + u^3},$$

und so wird man erhalten:

$$z = qy + \int \left[\frac{9q^2u^2\,du\,(1 - 2u^3)}{(1 + u^3)^3} + \frac{9qu^3\,dq}{(1 + u^3)^2} - y\,dq\right],$$

aber es ist

$$\int \frac{9q^2u^2\,du\,(1 - 2u^3)}{(1 + u^3)^3} = \frac{3q^2(1 + 4u^3)}{2(1 + u^3)^2} - \int \frac{3q(1 + 4u^3)\,dq}{(1 + u^3)^2},$$

also

$$z = qy + \frac{3q^2(1 + 4u^3)}{2(1 + u^3)^2} - \int dq \left[y + \frac{3q}{1 + u^3}\right].$$

Es muß demnach nothwendig $y + \frac{3q}{1 + u^3}$ eine Function von q allein seyn, welche $= -f'(q)$ seyn soll; daher wird

$$y = -\frac{3q}{1 + u^3} - f'(q) \text{ und}$$

$$z = qy + \frac{3q^2(1 + 4u^3)}{2(1 + u^3)^2} + f(q), \text{ oder}$$

$$z = \frac{3q^2(2u^3 - 1)}{2(1 + u^3)^2} - qf'(q) + f(q),$$

wobey $x = \frac{3qu}{1 + u^3}$ ist.

Eliminirt man aus diesen drey Gleichungen die beyden Größen q und u, so erhält man die zwischen z und x, y gesuchte Gleichung.

Zusatz 1.

§. 124. Aus der für y gefundenen Gleichung erhält man

$$\frac{3}{1+u^3} = \frac{-y - f'(q)}{q},$$

die für z gefundene Gleichung aber geht über in folgende:

$$z = \frac{3q^2}{1+u^3} - \frac{9q^2}{2(1+u^3)^2} - qf'(q) + f(q),$$

und diese Gleichung verwandelt sich nach der Elimination von u in

$$z = -qy - 2qf'(q) - \tfrac{1}{2}[y + f'(q)]^2 + f(q);$$

dann aber ist

$$x = -u[y + f'(q)],$$

und daher findet man $u = \frac{-x}{y + f'(q)}$, also

$$x^3 = 3q[y + f'(q)]^2 + [y + f'(q)]^3.$$

Zusatz 2.

§. 125. Wenn wir $f'(q) = a$ setzen, so wird $f(q) = aq + b$ und die letzte Gleichung gibt

$$q = \frac{x^3 - (y+a)^3}{3(y+a)^2}.$$

Da man dann für diesen Fall erhält:

$$z = -qy - aq - \tfrac{1}{2}(y+a)^2 + b,$$

so wird man durch Substitution des für q gefundenen Werthes finden:

$$z = \frac{6b(y+a) - (y+a)^3 - 2x^3}{6(y+a)}.$$

Zusatz 3.

§. 126. Da im Allgemeinen

$$x^3 = [y + f'(q)]^2 [y + 3q + f'(q)]$$

ist, so setzen wir

$$f'(q) = a - 3q, \text{ und demnach}$$
$$f(q) = b + aq - \tfrac{3}{2}q^2,$$

damit $(y + a - 3q)^2 = \frac{x^3}{y+a}$ werde, so wird man finden

$$y + a - 3q = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{y+a}} \text{ und}$$

$$q = \tfrac{1}{3}(y+a) - \frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{y+a}}.$$

Hieraus geht demnach hervor, daß

$$f'(q) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{y+a}} - y \quad \text{und}$$

$$f(q) = b + \frac{a(y+a)}{3} - \frac{ax\sqrt{x}}{3\sqrt{y+a}} - \tfrac{1}{6}(y+a)^2$$
$$+ \tfrac{1}{3}x\sqrt{x}(y+a) - \frac{x^3}{6(y+a)}$$
$$= b + \frac{a^2 - y^2}{6} + \frac{xy\sqrt{x}}{3\sqrt{y+a}} - \frac{x^3}{6(y+a)},$$

und

$$z = -\tfrac{1}{3}y(y+a) + \frac{yx\sqrt{x}}{3\sqrt{y+a}} - 2aq + 6q^2 - \frac{x^3}{2(y+a)}$$
$$+ b + aq - \tfrac{3}{2}q^2,$$

oder

$$z = b - \tfrac{1}{3}y(y+a) + \frac{yx\sqrt{x}}{3\sqrt{y+a}} - \frac{x^3}{2(y+a)} - aq + \tfrac{9}{2}q^2,$$

und nach gehöriger Reduction:

$$z = b + \tfrac{1}{6}(y+a)^2 - \tfrac{2}{3}x\sqrt{x}(y+a).$$

Zusatz 4.

§. 127. Nimmt man hier $a = o$ und $b = o$, so erhält man durch einen ziemlich einfachen Ausdruck

$$z = \tfrac{1}{6}y^2 - \tfrac{2}{3}x\sqrt{xy};$$

wie diese Gleichung der vorgeschriebenen Bedingung entspricht, erhellet auf folgende Art: Man findet durch Differenziation

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right) = -\sqrt{xy} \quad \text{und} \quad q = \left(\frac{dz}{dy}\right) = \tfrac{1}{3}y - \frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{y}},$$

und daher

$$p^3 + x^3 = -xy\sqrt{xy} + x^3; \quad \text{aber}$$
$$3pq = x^2 - y\sqrt{xy}, \quad \text{demnach}$$
$$3pqx = x^3 - xy\sqrt{xy}, \quad \text{folglich}$$
$$p^3 + x^3 = 3pqx.$$

Anmerkung.

§. 128. Die Auflösung gelingt also, wenn irgend eine Gleichung zwischen p, q und x vorgelegt wird, obgleich in den Fällen, in welchen sich weder x noch p aus der Gleichung bestimmen läßt, noch einige Schwierigkeiten zu überwinden sind, die sich aber vorzüglich auf

die Auflösung der endlichen Gleichungen beziehen, die wir hier mit Recht als eine bekannte Sache angesehen wissen wollen. Indessen ist aus dem letzten Beyspiele ersichtlich, wie die Rechnung anzulegen sey, wenn die vorgelegte Gleichung mit Hülfe einer zweckmäßigen Substitution für die Auflösung vorbereitet werden kann, bey welchem Gegenstande wir aber nicht weiter verweilen wollen. Auch jene Fälle, in welchen irgend eine Relation zwischen den Größen p, q und y gegeben ist, wollen wir hier nicht besonders behandeln, weil wegen der Permutabilität von x und y, deren auch die Größen p und q fähig sind, diese Fälle auf die vorhergehenden von selbst zurückgeführt werden. Es bleibt demnach nur noch der Fall zu erörtern, in welchem zwischen den Größen p, q und z eine Relation festgesetzt ist. Es ist zwar sogleich einleuchtend, daß man in der Gleichung $dz = pdx + qdy$ die Größen p und q nicht als Functionen von x und y betrachten könne, weil sie auch von z abhängig sind, und man wird demnach ihre Natur nicht so bestimmen können, daß die Formel $pdx + qdy$ als ein integrabler Ausdruck erscheint. Allein man muß ohne Unterschied die Bedingung so stellen, daß die Differenzialgleichung

$$dz - pdx - qdy = 0$$

möglich wird. Hierzu wird aber nach den oben (§. 6) festgesetzten Principien erfordert, daß, wenn

$$\left(\frac{dq}{dz}\right) = L; \quad -\left(\frac{dp}{dz}\right) = M \quad \text{und} \quad \left(\frac{dp}{dy}\right) - \left(\frac{dq}{dx}\right) = N$$

gesetzt wird, dann folgende Gleichung Statt findet:

$$Lp + Mq - N = 0 \quad \text{oder}$$

$$p\left(\frac{dq}{dz}\right) - q\left(\frac{dp}{dz}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right) - \left(\frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Ist demnach irgend eine Gleichung zwischen den Größen p, q und z vorgelegt, so müssen im Allgemeinen die Bedingungen so gestellt werden, daß diesem Erfordernisse Genüge geschieht.

Aufgabe 19.

§. 129. **Wenn $dz = pdx + qdy$ gesetzt wird, und es soll $p + q = \frac{z}{a}$ seyn; so ist im Allgemeinen die Relation der Function z in Bezug auf die Veränderlichen x und y zu finden.**

Auflösung.

Da $q = \frac{z}{a} - p$ ist, so wird unsere Gleichung folgende Form annehmen:

$$dz = pdx - pdy + \frac{zdy}{a} \text{ oder}$$

$$p(dx - dy) = \frac{adz - zdy}{a} = z\left(\frac{dz}{z} - \frac{dy}{a}\right).$$

Weil also die beyden Formeln

$$dx - dy \text{ und } \frac{dz}{z} - \frac{dy}{a}$$

für sich integrabel sind, und

$$\frac{dz}{z} - \frac{dy}{a} = \frac{p}{z}(dx - dy)$$

ist, so muß nothwendig $\frac{p}{z}$ eine Function von $x - y$ seyn. Man setze also

$$\frac{p}{z} = f'(x - y);$$

damit man

$$lz - \frac{y}{a} = f(x - y)$$

erhält. Es kann demnach z durch x und y bestimmt werden, und da die Größe $e^{f(x-y)}$ auch eine Function von $x - y$ ist, so wird man, wenn dieselbe $= F(x - y)$ gesetzt wird, finden:

$$z = e^{\frac{y}{a}} F(x - y),$$

und daher wird

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p = e^{\frac{y}{a}} F'(x - y), \text{ und}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = q = -e^{\frac{y}{a}} F'(x - y) + \frac{1}{a} e^{\frac{y}{a}} F(x - y),$$

also

$$p + q = \frac{1}{a} e^{\frac{y}{a}} F(x - y) = \frac{z}{a},$$

wie verlangt wurde.

Zusatz 1.

§. 130. Aus diesem Beyspiele erkennet man, wie eine gewisse Function von p und q der Größe z gleich werden könne, obgleich p und q Functionen von x und y sind. Zugleich wird das Integral-

verhältniß der Formel

$$dz = pdx + qdy$$

in die Rechnung eingeführt.

Zusatz 2.

§. 131. Der für den Werth von z gefundene Ausdruck

$$e^{\frac{y}{a}} F(x - y)$$

kann durch irgend eine Function von $x - y$ multiplicirt werden. Multiplicirt man ihn also mit $e^{\frac{x-y}{a}}$, so wird

$$z = e^{\frac{x}{a}} F(x - y).$$

Multiplicirt man ihn aber mit $e^{\frac{x-y}{2a}}$, so wird

$$z = e^{\frac{x+y}{2a}} F(x - y),$$

welche Ausdrücke dem Probleme eben so gut genügen.

Aufgabe 20.

§. 132. Wenn die Größe z für die Voraussetzung $dz = pdx + qdy$ einer gegebenen Function von p und q gleich werden soll, so ist im Allgemeinen die Gleichung aufzufinden, aus welcher sich z durch x und y bestimmen läßt.

Auflösung.

Aus der vorgelegten Formel erhalten wir

$$dy = \frac{dz}{q} - \frac{pdx}{q};$$

nun setze man $p = qr$, so daß z als eine Function von q und r erscheint, so erhält man aus der Gleichung $dy = \frac{dz}{q} - rdx$ folgenden Werth

$$y = \frac{z}{q} - rx + \int \left[\frac{zdq}{q^2} + xdr\right],$$

welchen Ausdruck man integrabel machen muß. Da also z eine gegebene Function von q und r ist, so betrachte man r als unveränderlich

Auflösung.

Da $q = \frac{z}{a} - p$ ist, so wird unsere Gleichung folgende Form annehmen:

$$dz = p\,dx - p\,dy + \frac{z\,dy}{a} \text{ oder}$$

$$p\,(dx - dy) = \frac{a\,dz - z\,dy}{a} = z\left(\frac{dz}{z} - \frac{dy}{a}\right).$$

Weil also die beyden Formeln

$$dx - dy \text{ und } \frac{dz}{z} - \frac{dy}{a}$$

für sich integrabel sind, und

$$\frac{dz}{z} - \frac{dy}{a} = \frac{p}{z}\,(dx - dy)$$

ist, so muß nothwendig $\frac{p}{z}$ eine Function von $x - y$ seyn. Man setze also

$$\frac{p}{z} = f'(x - y);$$

damit man

$$lz - \frac{y}{a} = f\,(x - y)$$

erhält. Es kann demnach z durch x und y bestimmt werden, und da die Größe $e^{f(x-y)}$ auch eine Function von $x - y$ ist, so wird man, wenn dieselbe $= F\,(x - y)$ gesetzt wird, finden:

$$z = e^{\frac{y}{a}}\,F\,(x - y),$$

und daher wird

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p = e^{\frac{y}{a}}\,F'\,(x - y), \text{ und}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = q = -\,e^{\frac{y}{a}}\,F'\,(x - y) + \frac{1}{a}\,e^{\frac{y}{a}}\,F\,(x - y),$$

also

$$p + q = \frac{1}{a}\,e^{\frac{y}{a}}\,F\,(x - y) = \frac{z}{a},$$

wie verlangt wurde.

Zusatz 1.

§. 130. Aus diesem Beyspiele erkennet man, wie eine gewisse Function von p und q der Größe z gleich werden könne, obgleich p und q Functionen von x und y sind. Zugleich wird das Integral-

hältniß der Formel

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

die Rechnung eingeführt.

Zusatz 2.

§. 131. Der für den Werth von z gefundene Ausdruck

$$e^{\frac{y}{a}} F(x-y)$$

nn durch irgend eine Function von $x-y$ multiplicirt werden. Multiplicirt man ihn also mit $e^{\frac{x-y}{a}}$, so wird

$$z = e^{\frac{x}{a}} F(x-y).$$

Multiplicirt man ihn aber mit $e^{\frac{x-y}{2a}}$, so wird

$$z = e^{\frac{x+y}{2a}} F(x-y),$$

lche Ausdrücke dem Probleme eben so gut genügen.

Aufgabe 20.

§. 132. Wenn die Größe z für die Voraussetzung $z = p\,dx + q\,dy$ einer gegebenen Function von p nd q gleich werden soll, so ist im Allgemeinen die leichung aufzufinden, aus welcher sich z durch x nd y bestimmen läßt.

Auflösung.

Aus der vorgelegten Formel erhalten wir

$$dy = \frac{dz}{q} - \frac{p\,dx}{q};$$

n setze man $p = qr$, so daß z als eine Function von q und r cheint, so erhält man aus der Gleichung $dy = \frac{dz}{q} - r\,dx$ folnden Werth

$$y = \frac{z}{q} - rx + \int \left[\frac{z\,dq}{q^2} + x\,dr\right],$$

lchen Ausdruck man integrabel machen muß. Da also z eine gegene Function von q und r ist, so betrachte man r als unveränderlich

und suche das Integrale der Formel $\frac{z\,dq}{q^2}$, und es sey

$$\int \frac{z\,dq}{q^2} = V + f(r),$$

so folgt hieraus durch Differenziation:

$$dV = \frac{z\,dq}{q^2} + R\,dr,$$

und nun ist einleuchtend, daß $x = R + f'(r)$ seyn müsse, hieraus dann erhalten werde:

$$y = \frac{z}{q} - Rr - rf'(r) + V + f(r),$$

durch welche zwey Gleichungen die Relation zwischen den gegebenen Größen bestimmt wird. Erstlich ergibt sich also z durch q und r ausgedrückt, wenn man $p = qr$ setzt; ferner nehme man z als unveränderlich an, integrire die Formel $\frac{z\,dq}{q^2}$, und das hieraus hervorgehende Integrale sey $V = \int \frac{z\,dq}{q^2}$, welches sich auch durch q und r ausdrücken läßt, und hieraus ergibt sich, wenn q constant genommen wird, $R = \left(\frac{dV}{dr}\right)$. Sind diese Größen gefunden, so wird man erhalten:

$$x = R + f'(r) \quad \text{und}$$
$$y = \frac{z}{q} - rx + V + f(r),$$

und so lassen sich alle Größen durch die beyden Veränderlichen q und r bestimmen.

Zusatz 1.

§. 133. Weil durch die Vertauschung der Größen x und y auch die Buchstaben p und q verwechselt werden, so hätten wir unsere Untersuchung auf ähnliche Art auch von der Gleichung

$$dx = \frac{dz}{p} - \frac{q\,dy}{p}$$

beginnen können, und es würde eine ähnliche Auflösung zum Vorschein gekommen seyn, die zwar der Form nach verschieden, dem Wesen nach aber vollkommen dieselbe seyn würde.

Zusatz 2.

§. 134. Setzt man nun $q = ps$, so daß

$$dx = \frac{dz}{p} - s\,dy$$

wird, so wird man finden

$$x = \frac{z}{p} - sy + \int\left[\frac{z\,dp}{p^2} + y\,ds\right].$$

Wird ferner s constant genommen, $\int \frac{z\,dp}{p^2} = U$ gesetzt, welche Größe durch p und s bestimmt wird, und $\left(\frac{dU}{ds}\right) = S$ aus dieser Gleichung genommen, so erhält man

$$y = S + f'(s) \quad \text{und}$$

$$x = \frac{z}{p} - sy + U + f(s).$$

Beyspiel 1.

§. 135. Die Auflösung für den Fall zu finden, wenn $p + q = \frac{z}{a}$ seyn soll.

Wird $p = qr$ gesetzt, so wird $z = aq(1 + r)$ seyn, und wenn nun r als unveränderlich angesehen wird:

$$V = \int \frac{z\,dq}{q^2} = a(1 + r)\,lq \quad \text{und}$$

$$R = \left(\frac{dV}{dr}\right) = a\,lq.$$

Man findet demnach

$$x = a\,lq + f'(r) \quad \text{und}$$

$$y = \frac{z}{q} - arlq - rf'(r) + a(1 + r)\,lq + f(r), \quad \text{oder}$$

$$y = a(1 + r) + a\,lq - rf'(r) + f(r).$$

Wollen wir hieraus die Größe q eliminiren, so ist wegen $q = \frac{z}{a(1 + r)}$ die Auflösung in folgenden zwey Gleichungen enthalten:

$$x = a\,l.\frac{z}{a(1 + r)} + f'(r) \quad \text{und}$$

$$y = a\,l.\frac{z}{a(1 + r)} + a(1 + r) - rf'(r) + f(r).$$

Die vorhergehende Auflösung kann daher auf folgende Art erhalten werden. Aus der erstern Gleichung findet man:

Auflösung.

Da $q = \frac{z}{a} - p$ ist, so wird unsere Gleichung folgende Form annehmen:

$$dz = pdx - pdy + \frac{zdy}{a} \text{ oder}$$

$$p(dx - dy) = \frac{adz - zdy}{a} = z\left(\frac{dz}{z} - \frac{dy}{a}\right).$$

Weil also die beyden Formeln

$$dx - dy \text{ und } \frac{dz}{z} - \frac{dy}{a}$$

für sich integrabel sind, und

$$\frac{dz}{z} - \frac{dy}{a} = \frac{p}{z}(dx - dy)$$

ist, so muß nothwendig $\frac{p}{z}$ eine Function von $x - y$ seyn. Man setze also

$$\frac{p}{z} = f'(x - y);$$

damit man

$$lz - \frac{y}{a} = f(x - y)$$

erhält. Es kann demnach z durch x und y bestimmt werden, und da die Größe $e^{f(x-y)}$ auch eine Function von $x - y$ ist, so wird man, wenn dieselbe $= F(x - y)$ gesetzt wird, finden:

$$z = e^{\frac{y}{a}} F(x - y),$$

und daher wird

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p = e^{\frac{y}{a}} F'(x - y), \text{ und}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = q = - e^{\frac{y}{a}} F'(x - y) + \frac{1}{a} e^{\frac{y}{a}} F(x - y),$$

also

$$p + q = \frac{1}{a} e^{\frac{y}{a}} F(x - y) = \frac{z}{a},$$

wie verlangt wurde.

Zusatz 1.

§. 130. Aus diesem Beyspiele erkennet man, wie eine gewisse Function von p und q der Größe z gleich werden könne, obglei p und q Functionen von x und y sind. Zugleich wird das Integra-

Da nun $f'(r) = x - aq$ ist, so wird man, wenn

$$r = F'(x - aq)$$

gesetzt wird, erhalten:

$$f(r) - rf'(r) = -F(x - aq) \text{ und}$$
$$y = aqF'(x - aq) - F(x - aq) \text{ und}$$
$$z = aq^2 F'(x - aq).$$

Anmerkung.

§. 137. Die beyden letzten Formeln können aus der Bedingung der Aufgabe sogleich auf folgende Art gefunden werden. Weil $p = \frac{z}{aq}$ ist, so wird man erhalten:

$$dz = \frac{z\,dx}{aq} + q\,dy \text{ und } dy = \frac{dz}{q} - \frac{z\,dx}{aq^2},$$

und daher

$$y = \frac{z}{q} + \int\left(\frac{z\,dq}{q^2} - \frac{z\,dx}{aq^2}\right) = \frac{z}{q} + \int\frac{z}{q^2}\left(dq - \frac{dx}{a}\right),$$

wo denn nun von selbst erhellt, daß $\frac{z}{q^2}$ eine Function der Größe $q - \frac{x}{a}$ sey. Setzt man demnach

$$\frac{z}{q^2} = F'\left(q - \frac{x}{a}\right),$$

so wird man erhalten:

$$y = \frac{z}{q} + F\left(q - \frac{x}{a}\right).$$

Ja man kann sogar hieraus noch eine andere Auflösung ableiten, indem man

$$dx = \frac{aq}{z}(dz - q\,dy)$$

setzt, und diese Gleichung geht, wenn $z = qv$ ist, über in

$$dx = \frac{a}{v}(v\,dq + q\,dv - q\,dy),$$

und daher

$$x = aq + \int\frac{aq}{v}(dv - dy).$$

Man setze also

$$\frac{aq}{v} = f'(v - y), \text{ so wird}$$
$$x = aq + f(v - y),$$

und wenn man den Werth $v = \frac{z}{q}$ wieder herstellt, so wird man finden

$$\frac{a q^2}{z} = f'\left(\frac{z}{q} - y\right) \text{ und}$$

$$x - a q = f\left(\frac{z}{q} - y\right).$$

Die erste Auflösung ist aber für die Elimination von q und r bey Beyspielen am geeignetsten, denn wenn man

$$f'(r) = \frac{b}{\sqrt{r}} + c$$

setzt, so wird man finden:

$$f(r) = 2b\sqrt{r} + cr + d;$$

daher

$$z = a q^2 r,$$

$$x = a q + \frac{b}{\sqrt{r}} + c \text{ und}$$

$$y = a q r + b\sqrt{r} + d.$$

Nun wird wegen $r = \frac{z}{a q^2}$

$$x = a q + b q \sqrt{\frac{a}{z}} + c \text{ und}$$

$$y = \frac{z}{q} + \frac{b}{q}\sqrt{\frac{z}{a}} + d;$$

also

$$x - c = q\left(a + \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{z}}\right) \text{ und}$$

$$y - d = \frac{z}{a q}\left(a + \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{z}}\right).$$

Durch Multiplication dieser beyden Werthe wird q eliminirt, und man findet:

$$(x - c)(y - d) = \frac{z}{a}\left(a + \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{z}}\right)^2 = (b + \sqrt{a z})^2,$$

so daß man erhält:

$$b + \sqrt{a z} = \sqrt{(x - c)(y - d)},$$

und daher

$$z = \frac{(x - c)(y - d) - 2b\sqrt{(x - c)(y - d)} + b^2}{a}.$$

Diese Gleichung gibt für $b = c = d = 0$ den einfachsten Fall $z = \frac{x y}{a}$.

Kapitel V.

Von der Auflösung der Gleichungen, bey welchen zwischen den Größen $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ und zweyen der drey Veränderlichen x, y und z irgend eine Relation gegeben wird.

Aufgabe 21.

§. 138. **Wenn** $dz = pdx + qdy$ **gesetzt wird, und** $px + qy = o$ **seyn soll; die Natur der Function** z **durch** x **und** y **im Allgemeinen auszudrücken.**

Auflösung.

Da $q = -\frac{px}{y}$ ist, so wird man erhalten:

$$dz = pdx - \frac{pxdy}{y} = px\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right), \text{ oder}$$

$$dz = py\left(\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2}\right) = py \cdot d \cdot \frac{x}{y}.$$

Hieraus erhellet, daß py eine Function von $\frac{x}{y}$ seyn müsse, und daß, wenn $py = f'\left(\frac{x}{y}\right)$ gesetzt wird, $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$ seyn werde. Wir werden nämlich bey der Bezeichnung der Functionen uns immer an die Regel halten, daß

$$d \cdot f(v) = dv \cdot f'(v),$$

und so ferner

$$d \cdot f'(v) = dv \cdot f''(v) \text{ und } d \cdot f''(v) = dv \cdot f'''(v),$$

u. s. f. wird. Aber $f\left(\frac{x}{y}\right)$ bezeichnet irgend eine homogene Function von x und y, die keine Dimension hat, und wenn auch z irgend eine solche Function ist, und man durch Differenziation $dz = pdx + qdy$ erhält, so wird immer $px + qy = o$ seyn.

Zusatz 1.

§. 139. Wenn demnach z eine homogene Function von x und y ist, die keine Dimension hat, so wird man, weil

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ und } q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

ist, erhalten:

$$x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

welche Wahrheit wir übrigens bereits oben gefunden haben.

Zusatz 2.

§. 140. Weil ferner

$$p = \frac{1}{y} f'\left(\frac{x}{y}\right) \text{ und } q = \frac{-x}{y^2} f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

ist, so wird p eine homogene Function von x und y seyn, bey welcher die Anzahl der Dimensionen $= -1$ ist, und wenn $q = \frac{-px}{y}$ ist, so ergibt sich die Function z selbst durch die Integration von

$$z = \int p y d \,.\, \frac{x}{y}.$$

Anmerkung.

§. 141. Auf ähnliche Art wird das Problem aufgelöst, wenn $dz = pdx + qdy$ gesetzt wird, und $mpx + nqy = a$ seyn soll; denn dann wird man wegen $q = \frac{a}{ny} - \frac{mpx}{ny}$ erhalten:

$$dz = \frac{ady}{ny} + pdx - \frac{mpxdy}{ny} \text{ oder}$$

$$dz = \frac{ady}{ny} + \frac{px}{n}\left(\frac{ndx}{x} - \frac{mdy}{y}\right) = \frac{ady}{ny} + \frac{py^m}{nx^{n-1}} d \,.\, \frac{x^n}{y^m};$$

und daher gibt die Auflösung

$$\frac{py^m}{nx^{n-1}} = f'\left(\frac{x^n}{y^m}\right) \text{ und } z = \frac{a}{n} ly + f\left(\frac{x^n}{y^m}\right).$$

Ja es läßt sich auch das noch allgemeinere Problem auflösen, bey welchem $pX + qY = A$ seyn soll; wobey X eine Function von x und Y eine Function von y bezeichnet. Denn da hieraus folgt

$$q = \frac{A}{Y} - \frac{pX}{Y},$$

so wird man finden:

$$dz = \frac{Ady}{Y} + pdx - \frac{pXdy}{Y} = \frac{Ady}{Y} + pX\left(\frac{dx}{X} - \frac{dy}{Y}\right).$$

Man muß demnach setzen

$$pX = f'\left(\int\frac{dx}{X} - \int\frac{dy}{Y}\right),$$

und dann wird

$$z = A\int\frac{dy}{Y} + f\left(\int\frac{dx}{X} - \int\frac{dy}{Y}\right).$$

Aufgabe 22.

§. 142. Wenn $dz = pdx + qdy$ gesetzt wird, und $\frac{q}{p}$ irgend einer gegebenen Function von x und y gleich seyn soll, so ist die Natur der Function z im Allgemeinen zu bestimmen.

Auflösung.

Sey V jene gegebene Function von x und y, so daß $q = pV$ ist, so wird man erhalten:

$$dz = p\,(dx + Vdy).$$

Es wird nun einen Multiplicator M geben, der ebenfalls eine Function von x und y seyn wird, und die Eigenschaft besitzt, daß der Ausdruck $M\,(dx + Vdy)$ integrabel wird. Man setze also

$$M\,(dx + Vdy) = dS,$$

so wird auch S als Function von x und y gegeben seyn. Weil nun $dz = \frac{pdS}{M}$ ist, so ist einleuchtend, daß auch die Größe $\frac{p}{M}$ einer Function von S gleich seyn müsse; setzen wir daher $\frac{p}{M} = f'(S)$, so wird $z = f(S)$ werden, und demnach findet man

$$p = Mf'(S) \quad \text{und} \quad q = MVf'(S).$$

Zusatz 1.

§. 143. In diesem Falle wird also die gesuchte Function z sogleich durch x und y ausgedrückt erhalten, weil S durch x und y gegeben ist. Es kann sich aber ereignen, daß S als transcendente Größe erscheint, ja sogar daß sich der Multiplicator M nach der bisher bekannten Methode nicht einmal bestimmen läßt.

Zusatz 2.

§. 144. Wenn V eine Function keiner Dimension von x und y

ist, so wird $M = \frac{1}{x + Vy}$ seyn, oder es wird, wenn man $x = vy$ setzt, V eine Function von v werden, und

$$dS = M\,(ydv + vdy + Vdy).$$

Man nehme $M = \frac{1}{y\,(v + V)}$, so wird man erhalten:

$$dS = \frac{dy}{y} + \frac{dv}{v + V},$$

und hieraus ergibt sich:

$$z = f\left[ly + \int \frac{dv}{v + V}\right].$$

Anmerkung.

§. 145. Wegen der Permutabilität von p und x, so wie von q und y lassen sich auf ähnliche Art auch folgende Probleme auflösen:

I. Soll $q = xV$ seyn, wo V irgend eine Function von p und y bezeichnet, so betrachte man die Formel

$$z = px + \int(qdy - xdp) = px + \int x\,(Vdy - dp),$$

und suche den Multiplicator M, so daß

$$M\,(Vdy - dp) = dS$$

wird, so wird S eine Function von p und y seyn, und

$$z = px + \int \frac{xdS}{M};$$

woraus sich folgende Auflösung ergibt:

$$\frac{x}{M} = f'(S) \quad \text{und} \quad z = pMf'(S) + f(S).$$

II. Sey $y = pV$, wo V irgend eine Function von x und q bezeichnet. Man betrachte die Gleichung

$$z = qy + \int(pdx - ydq) = qy + \int p\,(dx - Vdq),$$

suche den Multiplicator M, so daß

$$M\,(dx - Vdq) = dS$$

wird, so erhält man für S eine Function von x und q, und

$$z = qy + \int \frac{pdS}{M}.$$

Daher wird

$$\frac{p}{M} = f'(S) \quad \text{und} \quad z = qy + f(S),$$

oder, weil $p = \frac{y}{V}$ ist:

$$y = MVf'(S) \quad \text{und} \quad z = qMVf'(S) + f(S).$$

III. Wenn $y = xV$ seyn soll, wo V irgend eine Function von p und q bezeichnet, so ziehe man die Formel

$$z = px + qy - \int (x\,dp + xV\,dq)$$

in Erwägung, und suche den Multiplicator M, damit

$$M(dp + V\,dq) = dS$$

werde, so wird S eine Function von p und q seyn, und

$$z = px + qy - \int \frac{x\,dS}{M},$$

woraus sich folgende Auflösung ergibt:

$$\frac{x}{M} = f'(S) \quad \text{und} \quad z = px + qy - f(S).$$

Alle diese Fälle haben die Eigenschaft gemeinschaftlich, daß von den vier Größen p, x, q und y entweder $\frac{q}{p}$, oder $\frac{q}{x}$, oder $\frac{y}{p}$, oder $\frac{y}{x}$ als irgend eine Function der beyden andern Größen erscheint.

Aufgabe 23.

§. 146. Sey $dz = p\,dx + q\,dy$, und es soll

$$q = pV + U$$

seyn, wobey V und U beliebige Functionen der beyden Veränderlichen x und y bezeichnen; die Natur der Function z im Allgemeinen zu bestimmen.

Auflösung.

Weil $q = pV + U$ ist, so ist

$$dz = p(dx + V\,dy) + U\,dy;$$

man suche also zuerst einen Multiplicator M, der den Ausdruck $dx + V\,dy$ integrabel macht, und es sey

$$M(dx + V\,dy) = dS,$$

so werden M und S Functionen von x und y seyn, und es wird

$$dz = \frac{p\,dS}{M} + U\,dy$$

werden. Da nun S eine Function von x und y ist, so läßt sich hieraus

x durch y und S ausdrücken, und führt man diesen Werth in die Rechnung ein, so werden U und M als Functionen von y und S erscheinen. Wird nun S constant genommen, die Formel $U\,dy$ integrirt, und,

$$\int U\,dy = T + f\,(S)$$

gesetzt, ferner

$$dT = U\,dy + W\,dS$$

genommen, so wird man erhalten:

$$\frac{P}{M} = W + f'\,(S) \quad \text{und}$$

$$z = T + f\,(S);$$

und so werden sich alle Größen durch y und S ausdrücken lassen.

Zusatz 1.

§. 147. Sind also die Functionen V und U der beyden Veränderlichen x und y gegeben, und es soll $q = pV + U$ werden, so erfordert die Auflösung des Problemes zuerst, daß man für die Formel $dx + V\,dy$ einen integrirenden Factor M suche. Hat man diesen gefunden, so wird S als Function eben dieser Veränderlichen x und y erscheinen, so daß

$$S = \int M\,(dx + V\,dy)$$

wird.

Zusatz 2.

§. 148. Zu diesem Zwecke wird es gut seyn, die Differenzialgleichung $dx + V\,dy = 0$ zu betrachten, denn, wenn sich diese integriren läßt, so kann hieraus auch ein Multiplicator M abgeleitet werden, so daß der Ausdruck $M\,(dx + V\,dy)$ das wirkliche Differenziale irgend einer Function S seyn wird, die sich auf diese Art bestimmen läßt.

Zusatz 3.

§. 149. Hat man ferner diese Function S gefunden, so muß x durch y und S ausgedrückt werden, so daß x als Function von y und S erscheint, und hat man diesen Werth in der Größe U substituirt, so suche man das Integrale $\int U\,dy = T$, indem man S als unveränderlich ansieht, und so wird man T als Function von y und S erhalten.

Zusatz 4.

§. 150. Ist endlich diese Function T bestimmt, so sey $W = \left(\frac{Td}{dS}\right)$,

woraus sich zuletzt die Auflösung unseres Problemes ergibt, die in folgenden zwey Gleichungen enthalten ist:

$$\frac{p}{M} = W + f'(S) \quad \text{und}$$

$$z = T + f(S).$$

Weil nun hier S eine Function von x und y ist, so erhält man für z sogleich eine Function von x und y.

Zusatz 5.

§. 151. Wenn U bloß eine Function von y seyn sollte, so hat man nicht nöthig, x durch y und S auszudrücken, sondern es wird $T = \int U\,dy$ auch bloß eine Function von y seyn, und daher

$$W = \left(\frac{dT}{dS}\right) = 0.$$

Dieser Fall aber wird offenbar auf den vorigen zurückgeführt, wenn man $z = \int U\,dy$ statt z schreibt.

Beyspiel 1.

§. 152. Die Natur der Function z zu bestimmen, wenn $dz = p\,dx + q\,dy$ gesetzt wird, und $q = \frac{px}{y} + \frac{y}{x}$ seyn soll.

Hier ist also

$$V = \frac{x}{y} \quad \text{und} \quad U = \frac{y}{x}, \text{ und weil}$$

$$dx + V\,dy = dx + \frac{x\,dy}{y}$$

ist, so wird der Multiplicator $M = y$ und $dS = y\,dx + x\,dy$, also $S = xy$ seyn, und so wird man erhalten:

$$x = \frac{S}{y} \quad \text{und} \quad U = \frac{y^2}{S}.$$

Es werden nun die Gleichungen Statt finden:

$$T = \int U\,dy = \int \frac{y^2\,dy}{S} = \frac{y^3}{3S} \quad \text{und} \quad W = \frac{-y^3}{3S^2}.$$

Wir werden daher für die Auflösung dieses Problemes erhalten:

$$\frac{p}{M} = \frac{-y^3}{3S^2} + f'(S) \quad \text{und}$$

$$z = \frac{y^3}{3S} + f(S);$$

oder, weil $S = xy$ ist:

$$z = \frac{y^2}{3x} + f(xy).$$

Beyspiel 2.

§. 153. Die Natur der Function z zu bestimmen, wenn $dz = pdx + qdy$ ist, und $px + qy = n\sqrt{x^2 + y^2}$ seyn soll.

Da hier

$$q = \frac{-px}{y} + \frac{n}{y}\sqrt{x^2 + y^2}$$

ist, so wird man erhalten:

$$V = \frac{-x}{y} \text{ und } U = \frac{n}{y}\sqrt{x^2 + y^2},$$

also $dS = M\left(dx - \frac{xdy}{y}\right)$.

Man nehme also $M = \frac{1}{y}$, so wird

$$dS = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} \text{ und } S = \frac{x}{y}.$$

Hieraus ergibt sich nun

$$x = Sy \text{ und } U = n\sqrt{1 + S^2},$$

und wenn demnach S constant genommen wird, so wird man finden:

$$T = \int U dy = ny\sqrt{1 + S^2} \text{ und}$$

$$W = \left(\frac{dT}{dS}\right) = \frac{nyS}{\sqrt{1 + S^2}};$$

so daß nun die Auflösung unserer Frage sich auf folgende Art darstellt:

$$py = \frac{nyS}{\sqrt{1 + S^2}} + f'(S) \text{ und}$$

$$z = ny\sqrt{1 + S^2} + f(S).$$

Da also $S = \frac{x}{y}$ ist, so wird

$$z = n\sqrt{x^2 + y^2} + f\left(\frac{x}{y}\right);$$

wo $f\left(\frac{x}{y}\right)$ irgend eine Function von x und y bezeichnet, die keine Dimension hat.

Beyspiel 3.

§. 154. Die Natur der Function z zu bestimmen, wenn $dz = pdx + qdy$ ist, und $px^2 + qy^2 = nxy$ seyn soll.

Da hier

$$q = \frac{-px^2}{y^2} + \frac{nx}{y}$$

ist, so wird man erhalten:

$$V = \frac{-x^2}{y^2} \text{ und } U = \frac{nx}{y}.$$

Weil nun $dS = M\left(dx - \frac{x^2 dy}{y^2}\right)$ ist, so nehme man $M = \frac{1}{x^2}$, so wird

$$S = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x-y}{xy}.$$

Man wird demnach finden:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} - S \text{ und } x = \frac{y}{1 - Sy}, \text{ also}$$

$$U = \frac{n}{1 - Sy}.$$

Betrachten wir nun S als unveränderlich, so werden wir erhalten:

$$T = \int \frac{n\,dy}{1 - Sy} = -\frac{n}{S} l(1 - Sy) \text{ und}$$

$$W = +\frac{n}{S^2} l(1 - Sy) + \frac{ny}{S(1 - Sy)}.$$

Folglich wird, weil

$$S = \frac{x-y}{xy} \text{ und } 1 - Sy = \frac{y}{x}$$

ist, die Auflösung geben:

$$z = \frac{-nxy}{x-y} l.\frac{y}{x} + f\left(\frac{x-y}{xy}\right).$$

Anmerkung 1.

§. 155. Mittelst der Auflösung dieses Problemes läßt sich auch folgende weit umfassendere Aufgabe behandeln.

Seyen P, Q, eben so V, U, was immer für gegebene Functionen von x und y, und es sey eine Function z so zu bestimmen, daß die Gleichung Statt findet:

$$dz = P dx + Q dy + L(V dx + U dy),$$

oder, was dasselbe ist, es soll eine solche Function L aufgefunden werden, daß diese Differenzialformel die Integration zuläßt. Zu diesem Behufe suche man erstlich einen Multiplicator M, der den Ausdruck

$Vdx + Udy$ integrabel macht, und setze $dS = M(Vdx + Udy)$, so wird sich hieraus die Function S durch x und y ausdrücken lassen. Aus dieser Function suche man den Werth von x durch y und S ausgedrückt, und weil

$$dz = Pdx + Qdy + \frac{LdS}{M}$$

ist, so substituire man durchaus für x jenen Werth. Sey aber dann $dx = Edy + FdS$, wo demnach auch E und F bekannt seyn werden, und man wird finden:

$$dz = EPdy + Qdy + FPdS + \frac{LdS}{M}.$$

Man betrachte S als unveränderlich, und setze

$$T = \int(EP + Q)\,dy,$$

so wird man erhalten:

$$z = T + f(S),$$

welcher Ausdruck zwar für die Auflösung hinreichend ist, allein um die Function L zu finden, differenziire man den Ausdruck

$$dz = (EP + Q)\,dy + dS\,.\left(\frac{dT}{dS}\right) + dS\,.\,f'(S),$$

so muß nothwendig die Gleichung

$$FP + \frac{L}{M} = \left(\frac{dT}{dS}\right) + f'(S)$$

zum Vorschein kommen, und daher ist

$$L = -FMP + M\left(\frac{dT}{dS}\right) + Mf'(S).$$

Übrigens lassen sich wegen der Permutabilität von p, x und q, y hiernach auch die folgenden Probleme auflösen, die ich deßhalb in Kürze durchgehen will.

Aufgabe 24.

§. 156. Wenn $dz = pdx + qdy$ gesetzt, und verlangt wird, daß $q = Vx + U$ seyn soll, wobey sowohl V als auch U irgend eine gegebene Function von p und y bezeichnet; so ist die Natur der gesuchten Function z zu bestimmen.

Auflösung.

Wir wollen uns der Formel

$$z = px + \int(qdy - xdp)$$

dienen, so wird, wenn wir für q den Werth substituiren:

$$\int(q\,dy - x\,dp) = \int[Vx\,dy - x\,dp + U\,dy],$$

lche Formel integrabel gemacht werden muß. Man bezeichne sie irze halber durch ћ, so ist

$$dћ = x\,(V\,dy - dp) + U\,dy.$$

Nun suche man zuerst für den Ausdruck $V\,dy - dp$ einen inte- irenden Factor, und setze

$$M\,(V\,dy - dp) = dS,$$

d so wird S durch y und P ausgedrückt werden. Hieraus bestimme in p durch y und S, substituire daselbst diesen Werth, und man wird halten:

$$dћ = \frac{x\,dS}{M} + U\,dy.$$

Nun betrachte man S als constant, und setze das Integrale

$$\int U\,dy = T + f\,(S),$$

wird man finden:

$$\frac{x}{M} = \left(\frac{dT}{dS}\right) + f'\,(S) \quad \text{und}$$

$$ћ = T + f\,(S).$$

Es wird sich also die Auflösung mittelst der beyden Veränderlichen und S auf folgende Art darstellen:

$$x = M\left(\frac{dT}{dS}\right) + Mf'\,(S) \quad \text{und}$$

$$z = px + T + f\,(S),$$

nun S durch p und y gegeben wird.

Aufgabe 25.

§. 157. Die Natur der Function z zu bestimmen, nn $p = Vy + U$ für $dz = p\,dx + q\,dy$ werden soll, V und U gegebene Functionen von x und q be- ichnen.

Auflösung.

Bedienen wir uns hier der Formel

$$z = qy + \int(p\,dx - y\,dq),$$

setzen den zu bestimmenden Integralausdruck

$$\int(p\,dx - y\,dq) = ћ.$$

Setzt man hier für p den angenommenen Werth, so wird man erhalten:

$$d\mathfrak{z} = Vydx + Udx - ydq = y(Vdx - dq) + Udx.$$

Nun suchen wir einen solchen Multiplicator M, daß

$$M(Vdx - dq) = dS$$

wird, so werden sowohl M als auch S als Functionen von x und q erscheinen, aus deren letzteren der Werth von q durch x und S bestimmt werden soll, und der bey der weiteren Rechnung für q zu substituiren ist. Man erhält nämlich jetzt

$$d\mathfrak{z} = \frac{ydS}{M} + Udx;$$

man nehme demnach S als unveränderlich an, suche $T = \int Udx$, und setze

$$\mathfrak{z} = T + f(S),$$

so ergibt sich hieraus

$$\frac{y}{M} = \left(\frac{dT}{dS}\right) + f'(S) \quad \text{und}$$

$$z = qy + T + f(S),$$

wo man nun für S wieder den durch x und q dargestellten Werth setzen kann.

Aufgabe 26.

§. 158. Im Allgemeinen die Natur der Function z zu bestimmen, wenn $dz = pdx + qdy$ gesetzt wird, und $y = Vx + U$ werden soll, wo V und U was immer für gegebene Functionen von p und q bezeichnen.

Auflösung.

Hier muß man sich der Formel

$$z = px + qy - \int(xdp + ydq)$$

bedienen. Setzt man

$$\int(xdp + ydq) = \mathfrak{z},$$

und substituirt für y den festgesetzten Werth, so wird man erhalten:

$$d\mathfrak{z} = xdp + Vxdq + Udq.$$

Nun suche man einen Multiplicator M, der den Ausdruck $dp + Vdq$ integrabel macht, und es sey

$$M(dp + Vdq) = dS,$$

wo M und S durch p und q sich werdeu bestimmen lassen. Aus dem letzteren Ausdrucke bestimme man den Werth von p durch q und S ausgedrückt, der dann in die Rechnung eingeführt werden muß. Da nämlich

$$d\mathfrak{z} = \frac{x\,dS}{M} + U\,dq$$

ist, so betrachte man S als constant, integrire die Formel $U\,dq$, und setze $T = \int U\,dq$, so wird man erhalten:

$$\mathfrak{z} = T + f(S), \text{ also}$$
$$\frac{x}{M} = \left(\frac{dT}{dS}\right) + f'(S) \text{ und}$$
$$z = px + qy - T - f(S).$$

Es werden sich demnach alle Größen durch p und q ausdrücken lassen, also sind auch M, S, T und $\left(\frac{dT}{dS}\right)$ bekannt, so daß man erhält:

$$x = M\left(\frac{dT}{dS}\right) + Mf'(S),$$
$$y = Vx + U \text{ und}$$
$$z = px + qy - T - f(S).$$

Beyspiel.

§. 159. Die Natur der Function z zu bestimmen, wenn $dz = pdx + qdy$ ist, und $px + qy = apq$ seyn soll.

Da also

$$y = \frac{-px}{q} + ap$$

ist, so wird man erhalten:

$$V = \frac{-p}{q} \text{ nnd } U = ap.$$

Weil nun die Gleichung bestehen muß:

$$M\left(dp - \frac{p\,dq}{q}\right) = dS,$$

so nehme man $M = \frac{1}{q}$, und es wird dann

$$S = \frac{p}{q} \text{ und } p = Sq,$$

also $U = aSq$,

und wenn S constant genommen wird:

$$T = \int U dq = \tfrac{1}{2} a S q^2;$$

folglich $\left(\frac{dT}{dS}\right) = \tfrac{1}{2} a q^2$.

Wir erhalten demnach für die Auflösung

$$x = \tfrac{1}{2} aq + \frac{1}{q} f'\left(\frac{p}{q}\right),$$

$$y = \tfrac{1}{2} ap - \frac{p}{q^2} f'\left(\frac{p}{q}\right) \text{ und}$$

$$z = px + qy - \tfrac{1}{2} apq - f\left(\frac{p}{q}\right) = \tfrac{1}{2} apq - f\left(\frac{p}{q}\right).$$

Nach der oben gelehrten Reductionsmethode aber finden wir

$$y = (aq - x) F'(qx - \tfrac{1}{2} aq^2) \text{ und}$$

$$z = qy + F(qx - \tfrac{1}{2} aq^2).$$

Anmerkung.

§. 160. Die vier Probleme, welche wir hier in Verbindung gebracht haben, sind sehr allgemein, und umfassen für die Formel $dz = pdx + qdy$ alle Relationen zwischen den Größen p, q, x und y, bey welchen entweder x und y, oder p und y, oder x und q, oder p und q nicht mehr als eine Dimension haben. Es kann sich daher oft ereignen, daß sich dieselbe Frage nach zweyen oder mehreren dieser vier Aufgaben beantworten läßt, wie dieß der Fall ist bey dem letzten Beyspiele, in welchem nicht allein x und y, sondern auch x und q und eben so p und y nicht mehr als eine Dimension haben, welches Beyspiel also auf die drey vorhergehenden Probleme zurückgeführt werden kann, und die in ihm enthaltene Bedingung entspricht bloß der ersten Aufgabe nicht.

Wird aber zwischen den Größen p, q, x, y die Bedingung festgesetzt, daß

$$\alpha px + \beta qy + ap + bq + mx + ny + c = 0$$

seyn soll, so kann die Auflösung nach allen vier Problemen mit derselben Leichtigkeit ausgeführt werden. Aber auch die Auflösungen, die sich dadurch ergeben, lassen sich, obgleich sie der Form nach verschieden sind, dennoch nach der vorher gelehrten Reductionsmethode in Übereinstimmung bringen. Aber auch der folgende Fall, welcher der allgemeinste ist, läßt sich auflösen, und den wir daher entwickeln wollen.

Aufgabe 27.

§. 161. Im Allgemeinen die Natur der Function z zu bestimmen, wenn $dz = pdx + qdy$ gesetzt, und eine solche Relation zwischen p, q und x, y gegeben wird, daß eine gewisse Function von p und x irgend einer Function von q und y gleich werden soll.

Auflösung.

Es bezeichne P jene Function von p und x, und Q jene Function von q und y, welche einander gleich seyn sollen. Da also $P = Q$ ist, so setze man jede derselben $= v$, so daß $P = v$ und $Q = v$ wird. Aus der erstern Gleichung wird man also p durch x und v, aus der letztern aber q durch y und v ausdrücken können. Ist dieß geschehen, so wird in der Formel $dz = pdx + qdy$ die Größe p als Function von x und v erscheinen; man integrire demnach den Theil pdx so, daß man v als constant betrachtet, und es sey $\int pdx = R$. Da auf ähnliche Art q eine Function von y und v ist, so integrire man auch den andern Theil qdy, indem man v als unveränderlich behandelt, und es sey $\int qdy = S$; es wird demnach R einer Function von x und v, und S einer Function von y und v gleich seyn. Wird aber auch v als veränderlich betrachtet, so sey

$$dR = pdx + Vdv \quad \text{und} \quad dS = qdy + Udv,$$

und hieraus ergibt sich

$$dz = dR + dS - dv\,(V + U),$$

wo $V + U = f'(v)$ seyn muß, da die Formel integrabel seyn soll. Die Auflösung dieses Problemes wird also in folgenden zwey Gleichungen enthalten seyn:

$$V + U = f'(v) \quad \text{und} \quad z = R + S - f(v).$$

Da nämlich p, R und V durch x und v gegeben sind, und q, S und U durch y und v, so wird aus der erstern Gleichung v durch x und y bestimmt, und dieser Werth in der andern Gleichung substituirt, wird die gesuchte Function z durch x und y ausgedrückt geben.

Zusatz 1.

§. 162. So oft also q einer solchen Function von p, x, y gleich werden soll, daß sich hieraus eine Gleichung bilden läßt, aus deren einem Gliede bloß die beyden Größen x und p, und aus deren ande-

rem Gliede die beyden übrigen Größen y und q gefunden werden, wird man die Aufgabe immer auflösen können.

Zusatz 2.

§. 163. Wenn jene Function der beyden Veränderlichen p und x, welche ich mit P bezeichnet habe, so beschaffen ist, daß, wenn sie $= v$ gesetzt wird, sich hieraus x durch p und v leichter ausdrücken läßt, dann wird es zweckmäßig seyn, sich der Formel

$$z = px + \int(q\,dy - x\,dp)$$

zu bedienen, und es wird sich mit der Entwickelung eben so verhalten, wie früher.

Zusatz 3.

§. 164. Auf ähnliche Art wird man, wenn sich aus der andern Function $Q = v$ die Größe y leichter durch q und v bestimmen läßt, die Auflösung mit Hülfe der Formel

$$z = qy + \int(p\,dx - y\,dq)$$

bewerkstelligen müssen. Sollte sich aber der Fall ereignen, daß sich sowohl x durch p und v, als auch y durch q und v bestimmen läßt, so wird man folgende Formel gebrauchen müssen:

$$z = px + qy - \int(x\,dp + y\,dq).$$

Anmerkung.

§. 165. Dieses Problem umfaßt unzählige Fälle, die in den vorhergehenden nicht enthalten sind, und auch die Auflösnng desselben gründet sich auf ein ganz anderes Princip. Indessen sind wir noch weit entfernt von der Auflösung des allgemeinen Problemes, dem das gegenwärtige Kapitel gewidmet ist, und bey welcher Untersuchung die Auflösung verlangt wird, wenn zwischen den vier Größen x, y, p und q irgend eine Gleichung gegeben wird, und es scheint, daß man dieselbe wegen der Unzulänglichkeit der Analysis kaum erwarten könne. Wir werden uns also damit begnügen müssen, die Auflösung recht vieler Fälle zu lehren. Um aber die Wichtigkeit dieses Problemes in ein helleres Licht zu setzen, wollen wir einige Beyspiele beyfügen.

Beyspiel 1.

§. 166. Die Natur der Function z zu untersuchen, wenn $q = \frac{x^2 y^2}{a^4 p}$ für $dz = p\,dx + q\,dy$ werden soll.

Weil sich hier die Grössen p, x und q, y absondern lassen, und weil $\frac{a^2 q}{y^2} = \frac{x^2}{a^2 p}$ ist, so setze man $\frac{x^2}{a^2 p} = v = \frac{a^2 q}{y^2}$; also wird dadurch p durch x und v, und q durch y und v so bestimmt, daß man erhält:

$$p = \frac{x^2}{a^2 v} \text{ und } q = \frac{v y^2}{a^2},$$

folglich

$$dz = \frac{x^2 dx}{a^2 v} + \frac{v y^2 dy}{a^2}.$$

Hieraus folgern wir

$$z = \frac{x^3}{3 a^2 v} + \frac{v y^3}{3 a^2} + \frac{1}{3 a^2} \int \left(\frac{x^3 dv}{v^2} - y^3 dv \right),$$

und so muß $\frac{x^3}{v^2} - y^3$ eine Function von v selbst seyn. Setzt man nun

$$\frac{x^3}{v^2} - y^3 = f'(v) \text{ oder } y^3 = \frac{x^3}{v^2} - f'(v),$$

so wird man erhalten:

$$z = \frac{1}{3 a^2} \left[\frac{x^3}{v} + v y^3 + f(v) \right].$$

Zusatz.

§. 167. Hieraus läßt sich v sehr leicht eliminiren, wenn man

$$f'(v) = \frac{b^3}{v^2} - c^3, \text{ also } f(v) = \frac{-b^3}{v} - c^3 v$$

setzt. Nun gibt die erste Gleichung

$$y^3 - c^3 = \frac{x^3 - b^3}{v^2}, \text{ also } v^2 = \frac{x^3 - b^3}{y^3 - c^3},$$

und weil

$$3 a^2 z = \frac{x^3 + v^2 y^3 - b^3 - c^3 v^2}{v} = 2 v (y^3 - c^3)$$

ist, so wird man erhalten:

$$z = \frac{2}{3 a^2} \sqrt{(x^3 - b^3)(y^3 - c^3)}.$$

Beyspiel 2.

§. 168. Sey $dz = p dx + q dy$ und es werde

$$q = \frac{1}{b} \sqrt{x^2 + y^2 - a^2 p^2};$$

man untersuche die Natur der Function z.

Die festgesetzte Bedingung läßt sich zurückführen auf die Gleichung

$$b^2 q^2 - y^2 = x^2 - a^2 p^2 = v,$$

und hieraus finden wir

$$q = \frac{1}{b} \sqrt{y^2 + v} \quad \text{und} \quad p = \frac{1}{a} \sqrt{x^2 - v}.$$

Nun ist aber

$$\int p\, dx = \frac{1}{a} \int dx \sqrt{x^2 - v}$$

$$= \frac{1}{2a} \cdot x\sqrt{x^2 - v} - \frac{v}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - v}}$$

$$= \frac{x}{2a} \sqrt{x^2 - v} - \frac{v}{2a}\, l\, [x + \sqrt{x^2 - v}] = R,$$

und auf ähnliche Art ergibt sich

$$\int q\, dy = \frac{y}{2b} \sqrt{y^2 + v} + \frac{v}{2b}\, l \,. [y + \sqrt{y^2 + v}] = S.$$

Daher erhält man

$$V = \left(\frac{dR}{dv}\right) = \frac{-x}{4a\sqrt{x^2 - v}} - \frac{1}{2a}\, l\, [x + \sqrt{x^2 - v}]$$

$$+ \frac{v}{4a\, [x + \sqrt{x^2 - v}]\, \sqrt{x^2 - v}},$$

welche Gleichung sich auf folgende zurückführen läßt:

$$V = -\frac{1}{4a} - \frac{1}{2a}\, l\, [x + \sqrt{x^2 - v}].$$

Auf ähnliche Art findet man

$$U = \left(\frac{dS}{dv}\right) = + \frac{1}{4b} + \frac{1}{2b}\, l\, [y + \sqrt{y^2 + v}],$$

und da hier $V + U = f'(v)$ ist, so wird man erhalten:

$$\frac{a - b}{4ab} + L \,. \frac{[y + \sqrt{y^2 + v}]^{\frac{1}{2b}}}{[x + \sqrt{x^2 - v}]^{\frac{1}{2a}}} = f'(v),$$

und daher wird der Werth von v durch x und y bestimmt. Hieraus ergibt sich endlich

$$z = \frac{x}{2a}\sqrt{x^2 - v} + \frac{y}{2b}\sqrt{y^2 + v} + v L \frac{[y + \sqrt{y^2 + v}]^{\frac{1}{2b}}}{[x + \sqrt{x^2 - v}]^{\frac{1}{2a}}} - f(v),$$

oder

$$z = \frac{x}{2a}\sqrt{x^2 - v} + \frac{y}{2b}\sqrt{y^2 + v} - \frac{(a-b)v}{4ab} + vf'(v) - f(v).$$

Anmerkung.

§. 169. Diese Auflösung läßt sich von den logarithmischen Ausdrücken auf folgende Art befreyen. Man setze

$$f'(v) = lt + \frac{a-b}{4ab},$$

so erhält man

$$t^{2ab} = \frac{[y + \sqrt{y^2 + v}]^a}{[x + \sqrt{x^2 - v}]^b},$$

und demnach wird v durch t gegeben. Ferner sey $v = tF'(t)$, so wird man, weil $dv \,.\, f''(v) = \frac{dt}{t}$ ist, erhalten:

$$\int v\,dv\,f''(v) = vf'(v) - f(v) = \int \frac{v\,dt}{t} = F(t),$$

und so kommt man auf die Gleichung:

$$z = \frac{x}{2a}\sqrt{x^2 - v} + \frac{y}{2b}\sqrt{y^2 + v} - \frac{(a-b)v}{4ab} + F(t),$$

und hiebey ist

$$v = t\,.\,F'(t) \quad \text{und} \quad t^{2ab} = \frac{[y + \sqrt{y^2 + v}]^a}{[x + \sqrt{x^2 - v}]^b},$$

folglich kann t und v durch x und y ausgedrückt werden.

Es fällt hier sogleich in die Augen, daß, wenn $F'(t) = 0$ genommen wird, $v = 0$, $F(t) = 0$ und $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$ sey, also auch $p = \frac{x}{a}$ und $q = \frac{y}{b}$, auf welche Art der vorgeschriebenen Bedingung ebenfalls Genüge geschieht. Übrigens ist diese Methode, die logarithmischen Größen wegzuschaffen, höchst merkwürdig, und kann in andern Fällen eine sehr ausgedehnte Anwendung gestatten.

Beyspiel 3.

§. 170. Die Natur der Function z zu bestimmen, wenn $dz = pdx + qdy$ ist, und $x^m y^n = Ap^\mu q^\nu$ seyn soll.

Man setze also

$$\frac{x^m}{p^\mu} = \frac{Aq^\nu}{y^n} = v^\mu,$$

so ergibt sich hieraus

$$p = \frac{x^{\frac{m}{\mu}}}{v^{\nu}} \quad \text{und} \quad q = \frac{1}{a} y^{\frac{n}{\nu}} v^{\mu}$$

wenn $A = a^2$ gesetzt wird. Wir werden demnach erhalten:

$$\int p\,dx = \frac{\mu x^{\frac{m+\mu}{\mu}}}{(m+\mu) v^{\nu}} + \frac{\mu\nu}{m+\mu} \int \frac{x^{\frac{m+\mu}{\mu}}\,dv}{v^{\nu+1}} \quad \text{und}$$

$$\int q\,dy = \frac{\nu y^{\frac{n+\nu}{\nu}} v^{\mu}}{(n+\nu) a} - \frac{\mu\nu}{(n+\nu) a} \int y^{\frac{n+\nu}{\nu}} v^{\mu-1}\,dv.$$

Es wird daher die Gleichung Statt finden:

$$z = \frac{\mu x^{\frac{m+\mu}{\mu}}}{(m+\mu) v^{\nu}} + \frac{\nu y^{\frac{n+\nu}{\nu}} v^{\mu}}{(n+\nu) a}$$

$$+ \frac{\mu\nu}{(m+\mu)(n+\nu) a} \int dv \left[\frac{(n+\nu) a x^{\frac{m+\mu}{\mu}}}{v^{\nu+1}} - (m+\mu) y^{\frac{n+\nu}{\nu}} v^{\mu-1} \right]$$

so daß durch Substitution

$$\frac{x^{\frac{m+\mu}{\mu}}}{(m+\mu) v^{\nu+1}} - \frac{y^{\frac{n+\nu}{\nu}} v^{\mu-1}}{(n+\nu) a} = f'(v)$$

folgende Gleichung erhalten wird:

$$z = \frac{\mu x^{\frac{m+\mu}{\mu}}}{(m+\mu) v^{\nu}} + \frac{\nu y^{\frac{n+\nu}{\nu}} v^{\mu}}{(n+\nu) a} + \mu\nu f(v).$$

Für den einfachsten Fall setzen wir $f'(v) = 0$ und $f(v) = 0$ so werden wir finden:

$$y^{\frac{n+\nu}{\nu}} v^{\mu+\nu} = \frac{(n+\nu) a x^{\frac{m+\mu}{\mu}}}{m+\mu} \quad \text{und}$$

$$v = \left(\frac{(n+\nu) a x^{\frac{m+\mu}{\mu}}}{(m+\mu) y^{\frac{n+\nu}{\nu}}} \right)^{\frac{1}{\mu+\nu}};$$

dann aber ergibt sich

$$z = \frac{1}{v^\nu}\left[\frac{\mu}{m+\mu} x^{\frac{m+\mu}{\mu}} + \frac{\nu}{(n+\nu)a} y^{\frac{n+\nu}{\nu}} v^{\mu+\nu}\right], \text{ oder}$$

$$z = \frac{(\mu+\nu) x^{\frac{m+\mu}{\mu}}}{(m+\mu) v^\nu} = (\mu+\nu)\left[\frac{x^{m+\mu} y^{n+\nu}}{(m+\mu)^\mu (n+\nu)^\nu A}\right]^{\frac{1}{\mu+\nu}}.$$

Aufgabe 28.

§. 171. Sey $dz = pdx + qdy$, und zwischen den Größen p, q und x, y eine solche Relation gegeben, daß p und q als Functionen von x, y und einer neuen Veränderlichen v erscheinen; man suche jene Fälle auf, in welchen man die Natur der Function z bestimmen kann.

Auflösung.

Weil p eine Function von x, y und v ist, so suche man, indem man y und v als constant betrachtet, das Integrale $\int p dx = P$, und es sey, wenn alle Größen als veränderlich angesehen werden,

$$dP = pdx + Rdy + Mdv,$$

so wird man, wenn für pdx der Werth gesetzt wird, erhalten:

$$dz = dP + (q - R)\, dy - Mdv.$$

Sollte es sich nun ereignen, daß $q - R$ bloß eine Function von y und v, also x ausgenommen, ist, so nehme man v constant, suche $\int (q - R)\, dy = T$, und es sey

$$dT = (q - R)\, dy + Vdv.$$

Substituirt man daher für $(q - R)\, dy$ seinen Werth in der obigen Gleichung, so wird man finden:

$$dz = dP + dT - (M + V)\, dv,$$

und weil dieser Ausdruck integrabel seyn muß, so setze man

$$M + V = f'(v), \text{ so wird}$$

$$z = P + T - f(v).$$

Nach den hier ausgeführten Operationen aber werden die Größen P, R, M durch V, x, y und v, und V durch y und v allein gegeben, und die Auflösung gelingt, so bald in dem Ausdrucke $q - R$ kein

x mehr erscheint. Aus gleichem Grunde wird sich auch die Auflösung ausführen lassen, wenn M bloß durch y und v gegeben wird; denn dann suche man $\int M dv = L$, indem man y constant nimmt, und es sey

$$dL = M dv + N dy,$$

so wird man erhalten:

$$dz = dP + (q - R + N) dy - dL,$$

und es wird zweckmäßig seyn,

$$q - R + N = f'(y)$$

zu setzen, damit man

$$z = P - L + f(y)$$

erhalte. Auf ähnliche Art hätte man auch die Rechnung mit der Bestimmung des anderen Theiles $\int q dy$ beginnen, und dieselbe eben so weiter verfolgen können.

Durch Einführung einer unbestimmten Function K von x, y und v aber kann die Rechnung weit allgemeiner durchgeführt werden. Denn es sey

$$dK = F dx + G dy + H dv,$$

und man betrachte die Gleichung

$$dz + dK = (p + F) dx + (q + G) dy + H dv,$$

nehme nun y und v als constant, suche

$$\int (p + F) dx = P,$$

und es sey

$$dP = (p + F) dx + R dy + M dv;$$

so erhält man dann

$$dz + dK = dP + (q + G - R) dy + (H - M) dv.$$

Ereignet es sich nun, daß entweder $q + G - R$ oder $H - M$ bloß die beyden Veränderlichen y und v mit Ausnahme von x enthält, so läßt sich die Auflösung durchführen, wie früher gezeigt worden ist.

Aufgabe 29.

§. 172. Sey $dz = p dx + q dy$ und zwischen den beyden Differenzialformeln p, q und den zwey Veränderlichen x und z oder y und z irgend eine Relation gegeben; die Auflösung des Problemes, in wie fern es möglich ist, auszuführen.

Auflösung.

Setzen wir, es sey zwischen p, q und x, z eine Relation gegeben, so werden wir diesen Fall leicht auf den vorhergehenden zurückführen können. Denn man ziehe die, aus der Hauptgleichung abgeleitete Formel

$$dy = \frac{dz - pdx}{q}$$

in Betrachtung, und setze

$$\frac{1}{q} = m \text{ und } \frac{p}{q} = -n,$$

so daß man

$$dy = mdz + ndx$$

erhält, so wird die vorgelegte Relation, weil

$$q = \frac{1}{m} \text{ und } p = -\frac{n}{m}$$

ist, die vier Größen m, n, z und x enthalten, und daher ist dieses Problem den früher behandelten Aufgaben ganz ähnlich, bloß mit dem Unterschiede, daß hier die Größe y bestimmt wird, während wir früher z gesucht haben. Weil aber diese Bestimmung durch Gleichungen bezweckt wird, so ist es gleich viel, ob wir am Ende z oder y daraus entwickeln wollen. Läßt sich also nach Ausführung dieser Reduction die Frage unter die früher behandelten subsumiren, so wird man sie auch nach den bereits gelehrten Methoden beantworten können.

Beyspiel.

§. 173. **Die Natur der Function z zu bestimmen, wenn $dz = pdx + qdy$ ist, und $qxz = a^2p$ seyn soll.**

Man ziehe die Formel $dy = \frac{dz}{q} - \frac{pdx}{q}$ zu Rathe. Weil nun $\frac{p}{q} = \frac{xz}{a^2}$ ist, so wird man erhalten:

$$dy = \frac{dz}{q} - \frac{xzdx}{a^2} \text{ und}$$

$$y = \int\left(\frac{dz}{q} - \frac{xzdx}{a^2}\right);$$

es ist aber

$$\int\frac{xzdx}{a^2} = \frac{x^2z}{2a^2} - \int\frac{x^2dz}{2a^2}; \text{ also}$$

$$y = \int dz\left(\frac{1}{q} + \frac{x^2}{2a^2}\right) - \frac{x^2z}{2a^2},$$

Man setze demnach

$$\frac{1}{q} + \frac{x^2}{2a^2} = f'(z),$$

so wird

$$y = \frac{-x^2 z}{2a^2} + f(z),$$

aus welcher Gleichung sich auch z durch x und y bestimmen läßt.

Wenn wir, um einen einfacheren Fall zu haben,

$$f(z) = b + \alpha z$$

setzen, so werden wir erhalten:

$$y - b = \left(\alpha - \frac{x^2}{2a^2}\right) z \quad \text{und} \quad z = \frac{2a^2(y-b)}{2\alpha a^2 - x^2},$$

und wenn $\alpha = 0$ und $b = 0$ genommen wird, so finden wir für den einfachsten Fall $z = \frac{-2a^2 y}{x^2}$; dann aber wird

$$p = \frac{+4a^2 y}{x^3} \quad \text{und} \quad q = \frac{-2a^2}{x^2}, \text{ also}$$

$$\frac{p}{q} = -\frac{2y}{x} \quad \text{und} \quad \frac{xz}{a^2} = \frac{-2y}{x}.$$

Kapitel VI.

Von der Auflösung der Gleichungen, bey welchen zwischen den beyden Differenzialausdrücken $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ und allen drey Veränderlichen x, y, z irgend eine Relation gegeben wird.

Aufgabe 30.

§. 174. Im Allgemeinen die Natur der Function zu bestimmen, wenn $dz = pdx + qdy$ ist, und $nz = px + qy$ seyn soll.

Auflösung.

Man eliminire mit Hülfe der gegebenen Relation entweder die Größe p oder q. Da nämlich $q = \frac{nz}{y} - \frac{px}{y}$ ist, so wird man haben:

$$dz = pdx + \frac{nzdy}{y} - \frac{pxdy}{y},$$

welche Gleichung man auf folgende Form zu bringen hat:

$$dz - \frac{nzdy}{y} = p\left(dx - \frac{xdy}{y}\right) = py d.\frac{x}{y}.$$

Um das erste Glied $dz - \frac{nzdy}{y}$ der Gleichung integrabel zu machen, multiplicire man die Gleichung durch $\frac{1}{z}$ Funct. $\left(\frac{z}{y^n}\right)$, oder um einen besondern Fall zu haben, durch $\frac{1}{y^n}$, so wird man finden: $d.\frac{z}{y^n} = py^{1-n} d.\frac{x}{y}$. Ist dieß geschehen, so ist wohl einleuchtend, daß man $py^{1-n} = f'\left(\frac{x}{y}\right)$ setzen müsse, damit $\frac{z}{y^n} = f\left(\frac{x}{y}\right)$, oder $z = y^n f\left(\frac{x}{y}\right)$ werde. Hieraus geht nun hervor, daß z eine homogene Function von x und y sey, wobey die Anzahl der Dimensionen $= n$ ist.

Multiplicirt man im Allgemeinen die Gleichung mit $\frac{1}{z}$ Funct. $\left(\frac{z}{y^n}\right)$ so wird des ersten Theiles Integrale $F\left(\frac{z}{y^n}\right)$ seyn; für den andern

Theil aber wird man, wenn $\frac{py}{z}$ Funct. $\left(\frac{z}{y^n}\right) = f'\left(\frac{x}{y}\right)$ gesetzt wird, erhalten $F\left(\frac{z}{y^n}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right)$; und es wird also $\frac{z}{y^n}$, wie früher, irgend einer Function von $\frac{x}{y}$ gleich werden.

Zusatz 1.

§. 175. Da z eine homogene Function von n Dimensionen der Größen x und y bezeichnet, so werden p und q solche Functionen von n — 1 Dimensionen seyn. Da nämlich $z = y^n f\left(\frac{x}{y}\right)$ ist, so wird

$$p = y^{n-1} f'\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{und} \quad q = n y^{n-1} f\left(\frac{x}{y}\right) - x y^{n-2} f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

seyn, und daher wird offenbar

$$nz = px + qy.$$

Zusatz 2.

§. 176. Wenn p und q homogene Functionen von n — 1 Dimensionen der Größen x und y sind, und die Formel $p\,dx + q\,dy$ integrabel, oder $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$ ist, dann wird $\frac{px + qy}{n}$ zuverlässig das Integrale seyn; welche Eigenschaft bisweilen von vorzüglichem Nutzen seyn kann.

Anmerkung.

§. 177. Das Fundament dieser Auflösung besteht darin, daß die zu integrirende Gleichung in zwey Theile aufgelöst wird, deren jeder mit Hülfe irgend eines Multiplicators integrabel gemacht werden kann, woraus sich dann eine veränderliche Größe, deren Differenziale in der Gleichung nicht erscheint, wird bestimmen lassen. Man kann daher unsere Gleichung

$$dz - \frac{nz\,dy}{y} = p\left(dx - \frac{x\,dy}{y}\right)$$

auch auf folgende Art darstellen:

$$\frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{y^2} = \frac{1}{py}\left(dz - \frac{nz\,dy}{y}\right) = \frac{y^{n-1}}{p}\left(\frac{dz}{y^n} - \frac{nz\,dy}{y^{n+1}}\right),$$

oder

$$d\,.\,\frac{x}{y} = \frac{y^{n-1}}{p}\,d\,.\,\frac{z}{y^n}.$$

Sey also

$$\frac{y^{n-1}}{p} = F'\left(\frac{z}{y^n}\right),$$

so wird man finden:

$$\frac{x}{y} = F\left(\frac{z}{y^n}\right), \text{ und umgekehrt}$$

$$\frac{z}{y^n} = f\left(\frac{x}{y}\right), \text{ wie früher.}$$

Wir können auch z sogleich aus der Rechnung wegschaffen, denn da

$$nz = px + qy$$

ist, so wird man erhalten:

$$ndz = pdx + qdy + xdp + ydq.$$

Es ist aber

$$ndz = npdx + nqdy,$$

vermöge der Voraussetzung, und daher

$$(n-1)\,pdx - xdp + (n-1)\,qdy - ydq = 0,$$

oder

$$x^n\left[\frac{(n-1)\,pdx}{x^n} - \frac{dp}{x^{n-1}}\right] + y^n\left[\frac{(n-1)\,qdy}{y^n} - \frac{dq}{y^{n-1}}\right] = 0,$$

welche Gleichung auf folgende Form gebracht wird:

$$-x^n d\,.\,\frac{p}{x^{n-1}} - y^n d\,.\,\frac{q}{y^{n-1}} = 0, \text{ oder}$$

$$d\,.\,\frac{q}{y^{n-1}} = -\frac{x^n}{y^n}\,d\,.\,\frac{p}{x^{n-1}}.$$

Man setze

$$\frac{x^n}{y^n} = -f'\left(\frac{p}{x^{n-1}}\right), \text{ so wird}$$

$$\frac{q}{y^{n-1}} = f\left(\frac{p}{x^{n-1}}\right);$$

oder man setze, wenn $\frac{x}{y} = v$ genommen wird, weil $v^n = -f'\left(\frac{p}{x^{n-1}}\right)$ ist:

$$\frac{p}{x^{n-1}} = u = \frac{1}{v^{n-1}}\,F'(v),$$

so daß

$$f'(u) = -v^n$$

wird, und man wird finden:

$$\int du\,f'(u) = f(u) = nF(v) - vF'(v);$$

Man setze demnach

$$\frac{1}{q} + \frac{x^2}{2a^2} = f'(z),$$

so wird

$$y = \frac{-x^2 z}{2a^2} + f(z),$$

aus welcher Gleichung sich auch z durch x und y bestimmen läßt.

Wenn wir, um einen einfacheren Fall zu haben,

$$f(z) = b + \alpha z$$

setzen, so werden wir erhalten:

$$y - b = \left(\alpha - \frac{x^2}{2a^2}\right) z \text{ und } z = \frac{2a^2(y-b)}{2\alpha a^2 - x^2},$$

und wenn $\alpha = 0$ und $b = 0$ genommen wird, so finden wir für de einfachsten Fall $z = \frac{-2a^2 y}{x^2}$; dann aber wird

$$p = \frac{+4a^2 y}{x^3} \text{ und } q = \frac{-2a^2}{x^2}, \text{ also}$$

$$\frac{p}{q} = -\frac{2y}{x} \text{ und } \frac{xz}{a^2} = \frac{-2y}{x}.$$

wird, oder auch

$$z^{\frac{1}{n}} = y^{\frac{1}{\beta}} f . \left(\frac{x^{\frac{1}{\alpha}}}{y^{\frac{1}{\beta}}}\right).$$

Denkt man sich also, daß die Größen $x^{\frac{1}{\alpha}}$ und $y^{\frac{1}{\beta}}$ eine Dimension ıthalten, so wird $z^{\frac{1}{n}}$ einer Function derselben von einer Dimension, ·e Größe z selbst aber einer Function derselben Veränderlichen von Dimensionen gleich seyn. Oder wenn man für z irgend eine homo- ıne Function von n Dimensionen der Veränderlichen t und u nimmt, setze man dann $t = x^{\frac{1}{\alpha}}$ und $u = y^{\frac{1}{\beta}}$, und es wird die entsprechende unction für z zum Vorschein kommen.

Aufgabe 32.

§. 179. Im Allgemeinen die Natur der Function zu bestimmen, wenn $dz = pdx + qdy$ ist, und $= pX + qY$ seyn soll, wobey Z eine Function on z, X von x, und Y von y bezeichnet.

Auflösung.

Aus der vorgelegten Bedingungsgleichung findet man

$$q = \frac{Z}{Y} - \frac{pX}{Y},$$

ıd die Substitution dieses Werthes gibt

$$dz - \frac{Zdy}{Y} = p\left(dx - \frac{Xdy}{Y}\right),$$

aher

$$\frac{dz}{Z} - \frac{dy}{Y} = \frac{p}{Z}\left(dx - \frac{Xdy}{Y}\right) = \frac{pX}{Z}\left(\frac{dx}{X} - \frac{dy}{Y}\right),$$

ıd nun liegt die Auflösung schon klar vor Augen. Man setze nämlich

$$\frac{pX}{Z} = f'\left(\int\frac{dx}{X} - \int\frac{dy}{Y}\right),$$

ıd man wird erhalten:

$$\int\frac{dz}{Z} - \int\frac{dy}{Y} = f . \left(\int\frac{dx}{X} - \int\frac{dy}{Y}\right).$$

also

$$p = \frac{x^{n-1}}{y^{n-1}} F'(v) = y^{n-1} F'\left(\frac{x}{y}\right) \text{ und}$$

$$q = y^{n-1} f(u) = n y^{n-1} F\left(\frac{x}{y}\right) - x y^{n-2} F'\left(\frac{x}{y}\right);$$

folglich

$$nz = px + qy = n y^n F\left(\frac{x}{y}\right), \text{ oder}$$

$$z = y^n F\left(\frac{x}{y}\right); \text{ wie früher.}$$

Aufgabe 31.

§. 178. Die Natur der Function z zu bestimmen, wenn $dz = p dx + q dy$ ist, und $\alpha p x + \beta q y = nz$ seyn soll.

Auflösung.

Aus der vorgelegten Bedingungsgleichung bestimme man, wie früher, den Werth $q = \frac{nz}{\beta y} - \frac{\alpha p x}{\beta y}$, und man wird erhalten:

$$dz - \frac{nz\,dy}{\beta y} = p dx - \frac{\alpha p x\, dy}{\beta y},$$

und diese Gleichung gibt, wenn man sie durch $y^{\frac{n}{\beta}}$ dividirt:

$$d \cdot \frac{z}{y^{n:\beta}} = \frac{p}{y^{n:\beta}} \left(dx - \frac{\alpha x\, dy}{\beta y}\right) = \frac{p y^{\alpha:\beta}}{y^{n:\beta}} d \cdot \frac{x}{y^{\alpha:\beta}}.$$

Wenn wir demnach

$$p y^{(\alpha-n):\beta} = f'\left(\frac{x}{y^{\alpha:\beta}}\right),$$

setzen, so erhalten wir als Auflösung

$$z = y^{n:\beta} f\left(\frac{x}{y^{\alpha:\beta}}\right).$$

Allein die Function von $\frac{x}{y^{\alpha:\beta}}$ wird auf eine Function von $\frac{x^\beta}{y^\alpha}$ zurückgeführt, daher wird z auch durch x und y so bestimmt, daß

$$z = y^{n:\beta} f\left(\frac{x^\beta}{y^\alpha}\right)$$

wird, oder auch

$$z^{\frac{1}{n}} = y^{\frac{1}{\beta}} f. \left(\frac{x^{\frac{1}{\alpha}}}{y^{\frac{1}{\beta}}}\right).$$

Denkt man sich also, daß die Größen $x^{\frac{1}{\alpha}}$ und $y^{\frac{1}{\beta}}$ eine Dimension enthalten, so wird $z^{\frac{1}{n}}$ einer Function derselben von einer Dimension, die Größe z selbst aber einer Function derselben Veränderlichen von n Dimensionen gleich seyn. Oder wenn man für z irgend eine homogene Function von n Dimensionen der Veränderlichen t und u nimmt, so setze man dann $t = x^{\frac{1}{\alpha}}$ und $u = y^{\frac{1}{\beta}}$, und es wird die entsprechende Function für z zum Vorschein kommen.

Aufgabe 32.

§. 179. **Im Allgemeinen die Natur der Function z zu bestimmen, wenn $dz = pdx + qdy$ ist, und $Z = pX + qY$ seyn soll, wobey Z eine Function von z, X von x, und Y von y bezeichnet.**

Auflösung.

Aus der vorgelegten Bedingungsgleichung findet man

$$q = \frac{Z}{Y} - \frac{pX}{Y},$$

und die Substitution dieses Werthes gibt

$$dz - \frac{Zdy}{Y} = p\left(dx - \frac{Xdy}{Y}\right),$$

daher

$$\frac{dz}{Z} - \frac{dy}{Y} = \frac{p}{Z}\left(dx - \frac{Xdy}{Y}\right) = \frac{pX}{Z}\left(\frac{dx}{X} - \frac{dy}{Y}\right),$$

und nun liegt die Auflösung schon klar vor Augen. Man setze nämlich

$$\frac{pX}{Z} = f'\left(\int\frac{dx}{X} - \int\frac{dy}{Y}\right),$$

und man wird erhalten:

$$\int\frac{dz}{Z} - \int\frac{dy}{Y} = f.\left(\int\frac{dx}{X} - \int\frac{dy}{Y}\right).$$

woraus der Werth von z, durch x und y ausgedrückt, erhalten wird.

Zusatz 1.

§. 180. Es muß also hier z durch x und y so bestimmt werden, daß, wenn X, Y und Z gegebene Functionen von x, y und z allein sind,

$$X\left(\frac{dz}{dx}\right)+Y\left(\frac{dz}{dy}\right)=Z$$

werde. Die Auflösung dieser Aufgabe haben wir also hier in folgender endlichen Gleichung enthalten gefunden:

$$\int\frac{dz}{Z}=\int\frac{dy}{Y}+f\left(\int\frac{dx}{X}-\int\frac{dy}{Y}\right).$$

Zusatz 2.

§. 181. Wie aber dieser Werth der Bedingung der Aufgabe entspricht, leuchtet sogleich durch die Differenziation desselben ein. Denn da man hat

$$\frac{dz}{Z}=\frac{dy}{Y}+\left(\frac{dx}{X}-\frac{dy}{Y}\right)f'\left(\int\frac{dx}{X}-\int\frac{dy}{Y}\right),$$

so wird man finden:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{Z}{X}f'\left(\int\frac{dx}{X}-\int\frac{dy}{Y}\right)\text{ und}$$
$$\left(\frac{dz}{dy}\right)=\frac{Z}{Y}-\frac{Z}{Y}f'\left(\int\frac{dx}{X}-\int\frac{dy}{Y}\right),$$

und daher wird

$$X\left(\frac{dz}{dx}\right)+Y\left(\frac{dz}{dy}\right)=Z.$$

Anmerkung.

§. 182. Die Auflösung kann also auf eben diese Art, wie wir zu Werke gegangen sind, ohne Einführung der neuen Größen p und q ausgeführt werden, indem man statt derselben die Differenzialausdrücke $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ beybehält; leichter aber ist es, die einzelnen Buchstaben zu schreiben, und die Rechnung wird kürzer. Allein von dieser Gattung von Aufgaben, bey welchen alle drey Veränderlichen x, y und z, außer den beyden Differenzialausdrücken p und q, in der Bestimmungsgleichung erscheinen, lassen sich nur sehr wenige auf-

lösen, und außer dem behandelten Probleme wird man kaum noch eines oder das andere beyfügen können. Rücksichtlich dieser Materie sind demnach noch bedeutende Erweiterungen der Rechnung zu wünschen. Damit man aber den Einfluß dieser Aufgabe besser durchschaue, wollen wir einige Beyspiele beyfügen.

Beyspiel 1.

§. 183. Im Allgemeinen die Natur der Function z zu bestimmen, wenn $dz = p\,dx + q\,dy$ gesetzt wird, und $z^2 = px^2 + qy^2$ seyn soll.

Hier ist also $Z = z^2$, $X = x^2$ und $Y = y^2$, und daher erhalten wir

$$\int \frac{dx}{X} = -\frac{1}{x};\; \int \frac{dy}{Y} = -\frac{1}{y} \text{ und } \int \frac{dz}{Z} = -\frac{1}{z}.$$

Durch Substitution dieser Werthe erhalten wir als Auflösung:

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{y} + f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) \text{ oder}$$

$$z = \frac{y}{1 - yf\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)}.$$

Man nehme demnach irgend eine Function der Größe

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x - y}{xy},$$

so wird man, wenn diese durch V bezeichnet wird, erhalten:

$$z = \frac{y}{1 - Vy}.$$

Setzen wir z. B. $V = \frac{n}{y} - \frac{n}{x}$, so werden wir finden:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{y} - \frac{n}{y} + \frac{n}{x} = \frac{ny - (n-1)x}{xy},$$

daher

$$z = \frac{xy}{ny - (n-1)x},$$

und demnach wird

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{ny^2}{(ny - (n-1)x)^2} \text{ und } q = \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{-(n-1)x^2}{(ny - (n-1)x)^2}$$

und so findet man

$$px^2 + qy^2 = \frac{x^2y^2}{(ny - (n-1)x)^2} = z^2.$$

Beyspiel 2.

§. 184. Wenn $dz = pdx + qdy$ gesetzt wird, und $\frac{n}{z} = \frac{p}{x} + \frac{q}{y}$ seyn soll, so ist im Allgemeinen die Natur der Function z zu bestimmen.

Da man hier

$$X = \frac{1}{x};\quad Y = \frac{1}{y} \text{ und } Z = \frac{n}{z}$$

hat, so wird man finden:

$$\int \frac{dx}{X} = \tfrac{1}{2} x^2;\quad \int \frac{dy}{Y} = \tfrac{1}{2} y^2 \text{ und } \int \frac{dz}{Z} = \frac{1}{2n} z^2,$$

und daher erscheint die Auflösung unter folgender Form:

$$\frac{1}{2n} z^2 = \tfrac{1}{2} y^2 + f(x^2 - y^2)$$

oder

$$z^2 = n y^2 + f(x^2 - y^2);$$

denn es ist nicht nöthig, die Function mit 2 n zu multipliciren, weil dieselbe schon an und für sich alle Operationen involvirt.

Nehmen wir für diese Function den Ausdruck $\alpha (x^2 - y^2)$, so wird man als particuläre Auflösung erhalten:

$$z^2 = \alpha x^2 + (n - \alpha) y^2 \text{ und } z = \sqrt{\alpha x^2 + (n - \alpha) y^2},$$

und daher ist

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{\alpha x}{\sqrt{\alpha x^2 + (n - \alpha) y^2}},$$

und

$$q = \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{(n - \alpha) y}{\sqrt{\alpha x^2 + (n - \alpha) y^2}},$$

oder $\frac{p}{x} = \frac{\alpha}{z}$ und $\frac{q}{y} = \frac{n - \alpha}{z}$, folglich $\frac{p}{x} + \frac{q}{y} = \frac{n}{z}$.

Aufgabe 32.

§. 185. Die Natur der Function z zu bestimmen, wenn für $dz = pdx + qdy$ die Gleichung Statt finden soll $q = pT + V$, wobey T irgend eine Function von x und y, und V eine beliebige Function von y und z bezeichnet.

Auflösung.

Man setze für q den angegebenen Werth, und gebe der Gleichung
gende Form:

$$dz - Vdy = p(dx + Tdy).$$

Weil nun V bloß die zwey Veränderlichen y und z enthält, so
rd es einen Multiplicator M geben, der das erste Glied $dz - Vdy$
egrabel macht; man setze demnach

$$M(dz - Vdy) = dS.$$

Eben so wird es, weil T bloß x und y enthält, einen Multipli-
:or L geben, der auch das zweyte Glied $dx + Tdy$ integrabel
ıcht; es sey also

$$L(dx + Tdy) = dR,$$

daß nun R und S bekannte Functionen sind, und zwar die erstere
ı x und y, die letztere aber von y und z. Unsere Gleichung wird
nnach folgende Form annehmen:

$$\frac{dS}{M} = \frac{pdR}{L} \quad \text{oder} \quad dS = \frac{pMdR}{L},$$

en Integrabilität nothwendig erfordert, daß $\frac{pM}{L}$ eine Function von
sey. Setzen wir also

$$\frac{pM}{L} = f'(R), \text{ so wird man erhalten } S = f(R),$$

:ch welche Gleichung die Relation zwischen z, x und y bestimmt
:d.

Zusatz 1.

§. 186. In diesem Probleme ist das vorhergehende als ein be-
derer Fall enthalten; denn da daselbst $Z = pX + qY$ ist, so
:d $q = \frac{-X}{Y} \cdot p + \frac{Z}{Y}$, und wenn man die vorstehende Aufgabe
vendet, so erhält man:

$$T = -\frac{X}{Y} \text{ und } V = \frac{Z}{Y}.$$

Zusatz 2.

§. 187. Obgleich aber diese Aufgabe bey weitem allgemeiner ist
die vorhergehende, so ist sie übrigens noch in sehr enge Grenzen
geschlossen, und man kann mit Hülfe derselben nicht einmahl den
hst einfachen Fall $z = py + qx$ auflösen.

Anmerkung.

§. 188. Die Gleichung $z = py + qx$ ist allerdings merkwürdig, weil sie nach keiner bisher bekannten Methode auflösbar zu seyn scheint. Denn man mag aus derselben $q = \frac{z - py}{x}$ bestimmen, wodurch

$$dz - \frac{z\,dy}{x} = p\left(dx - \frac{y\,dy}{x}\right)$$

wird, oder man mag auf ähnliche Art p eliminiren, so ist dennoch kein Mittel bekannt, dieselbe aufzulösen. Die Ursache dieser Schwierigkeit liegt offenbar darin, daß die Formel $dz - \frac{z\,dy}{x}$ durch keinen Multiplicator integrabel gemacht werden kann, oder weil die Gleichung $dz - \frac{z\,dy}{x} = 0$ offenbar unmöglich ist, weil x eben so gut veränderlich ist, als y und z. Ich habe nämlich bereits oben schon erinnert, daß nicht alle Differenzialgleichungen zwischen drey Veränderlichen möglich seyen, und habe zugleich den Charakter der Möglichkeit dargestellt, welcher für eine Gleichung von der Form

$$dz + P\,dx + Q\,dy = 0$$

besteht, daß die Relation

$$P\left(\frac{dQ}{dz}\right) - Q\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) - \left(\frac{dP}{dy}\right)$$

Statt findet; in unserem Falle ist nun $P = 0$ und $Q = \frac{-z}{x}$, und daher gibt dieses Kennzeichen $0 = \frac{z}{x^2}$, und da dieß falsch ist, so ist auch jene Gleichung $dz - \frac{z\,dy}{x} = 0$ unmöglich, was zwar für sich klar ist. Allein für den Fall $z = py + qx$ biethet sich dennoch eine particuläre Auflösung dar, nämlich $z = n(x + y)$, und daher wird $p = q = n$. Wir werden aber später die Methode angeben, aus einer solchen particulären Auflösung die Allgemeine zu finden.

Beyspiel 1.

§. 189. Die Natur der Function z zu bestimmen, wenn $dz = p\,dx + q\,dy$ gesetzt wird, und $py + qx = \frac{nxz}{y}$ seyn soll.

Da hier $q = -\frac{py}{x} + \frac{nz}{y}$ ist, so wird

$$T = \frac{-y}{x} \text{ und } V = \frac{nz}{y},$$

und hieraus erhält man:

$$dS = M\left(dz - \frac{nz\,dy}{y}\right) \text{ und } dR = L\left(dx - \frac{y\,dy}{x}\right).$$

Man nehme also $M = \frac{1}{y^n}$, damit $S = \frac{z}{y^n}$ werde, und $L = 2x$, damit man $R = x^2 - y^2$ erhält, so ergibt sich folgende Auflösung:

$$\frac{z}{y^n} = f(x^2 - y^2) \text{ oder } z = y^n f(x^2 - y^2).$$

Beyspiel 2.

§. 190. Die Natur der Function z zu bestimmen, wenn $px^2 + qy^2 = nyz$ für $dz = pdx + qdy$ werden soll.

Da also

$$q = \frac{-px^2}{y^2} + \frac{nz}{y} \text{ ist, so wird}$$

$$T = \frac{-x^2}{y^2} \text{ und } V = \frac{nz}{y},$$

und so ist dieser Fall in unserer Aufgabe enthalten, und hieraus erhalten wir

$$dR = L\left(dx - \frac{x^2\,dy}{y^2}\right) \text{ und}$$

$$dS = M\left(dz - \frac{nz\,dy}{y^2}\right).$$

Wird daher $L = \frac{1}{x^2}$ genommen, so erhält man

$$R = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x - y}{xy},$$

und wird $M = \frac{1}{y^n}$ gesetzt, so wird $S = \frac{z}{y^n}$, und demnach ergibt sich folgende Auflösung:

$$\frac{z}{y^n} = f\left(\frac{x - y}{xy}\right) \text{ und } z = y^n f\left(\frac{x - y}{xy}\right).$$

Aufgabe 33.

§. 191. Die Natur der Function z zu bestimmen, wenn $dz = pdx + qdy$ gesetzt wird, und $p = qT + V$

seyn soll, wobey T eine Function von x und y, V aber eine Function von x und z bezeichnet.

Auflösung.

Wenn für p der vorgeschriebene Werth gesetzt wird, so wird man auf ähnliche Art, wie früher, erhalten:

$$dz - V dx = q(dy + T dx).$$

Die Functionen V und T sind so beschaffen, daß man folgende Formeln wird integriren können:

$$M(dz - V dx) = dS \quad \text{und} \quad N(dy + T dx) = dR;$$

man erhält also

$$\frac{dS}{M} = \frac{q\,dR}{N} \quad \text{oder} \quad dS = \frac{Mq}{N} dR,$$

woraus sich sehr leicht nachstehende Auflösung ergibt:

$$\frac{Mq}{N} = f'(R) \quad \text{und} \quad S = f(R).$$

Aufgabe 34.

§. 192. Sey $dz = p dx + q dy$, und es soll

$$z = Mp + Nq$$

seyn, wobey M und N beliebige Functionen der beyden Veränderlichen x und y seyn mögen; man soll aus irgend einer particulären Auflösung, welche $z = V$ gibt, im Allgemeinen die Natur der Function z bestimmen.

Auflösung.

Man differenzire jenen besondern Werth, welcher eine Function von x und y ist, und es sey

$$dV = P dx + Q dy.$$

Weil dieser Werth, für z gesetzt, Genüge leistet, indem $p = P$ und $q = Q$ genommen wird, so wird man der Voraussetzung gemäß erhalten:

$$V = MP + NQ.$$

Nun setze man allgemein

$$z = Vf(T), \quad \text{und es sey}$$
$$dT = R dx + S dy,$$

so hat man nun diese Function T zu suchen. Durch die Differenziation aber finden wir:

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right) = Pf(T) + VRf'(T) \quad \text{und}$$

$$q = \left(\frac{dz}{dy}\right) = Qf(T) + VSf'(T).$$

Da also

$$z = Mp + Nq = Vf(T)$$

ist, so wird man erhalten:

$$Vf(T) = [MP + NQ]\, f(T) + V[MR + NS]\, f'(T),$$

und weil $V = MP + NQ$ ist, so wird man der Voraussetzung gemäß erhalten:

$$MR + NS = o, \text{ also}$$

$$dT = R\left(dx - \frac{Mdy}{N}\right).$$

Es ist nun nicht gerade nöthig, R zu kennen, sondern es ist hinreichend, den Ausdruck $Ndx - Mdy$ in Betrachtung zu ziehen, welcher mit Hülfe irgend eines Multiplicators integrabel gemacht werden kann. Die Auflösung läßt sich demnach sehr leicht darauf zurückführen, daß aus der vorgeschriebenen Bedingung $z = Mp + Nq$ die reelle Gleichung gebildet werde:

$$dT = R\,[Ndx - Mdy],$$

denn hat man einen schicklichen Multiplicator R gefunden, so ergibt sich die Größe T durch Integration, und ist diese bestimmt, so wird

$$z = Vf(T).$$

Zweyte Auflösung.

Leichter wird der allgemeine Werth auf folgende Art gefunden. Weil der Werth V von z bekannt ist, setze man $z = Vv$, und es sey

$$dv = rdx + sdy,$$

so wird man erhalten:

$$p = Pv + Vr \quad \text{und} \quad q = Qv + Vs,$$

und daher

$$z = Mp + Nq = (MP + NQ)\, v + V(Mr + Ns) = Vv.$$

Es ist aber $V = MP + NQ$, folglich

$$Mr + Ns = o \quad \text{oder} \quad s = -\frac{Mr}{N},$$

und daher wird

$$dv = r\left(dx - \frac{M\,dy}{N}\right) = \frac{r}{N}\,(N\,dx - M\,dy).$$

Sucht man demnach einen schicklichen Multiplicator, so setze man

$$R\,(N\,dx - M\,dy) = dT,$$

und man wird finden:

$$dv = \frac{r}{NR}\,.\,dT, \text{ folglich } \frac{r}{NR} = f'(T) \text{ und } v = f(T),$$

so daß man im Allgemeinen $z = Vv$ erhält, wie vorher.

Zusatz 1.

§. 193. Ist also die Bedingungsgleichung $z = Mp + Nq$ gegeben, damit $dz = p\,dx + q\,dy$ werde, so betrachte man sogleich die Differenzialgleichung $R\,(N\,dx - M\,dy) = dT$, so wird hieraus der Multiplicator R und dann das Integrale T gefunden, und diese Operation ist von dem bekannten besonderen Werth V unabhängig.

Zusatz 2.

§. 194. Ist aber die Größe T gefunden, und hat man auf irgend eine Art die particuläre Auflösung $r = V$ erhalten, so wird $z = Vf(T)$ die allgemeine Auflösung seyn. Es ist aber wohl zu merken, daß aus der particulären Auflösung die allgemeine nur dann gefunden werden könne, wenn die vorgelegte Bedingungsgleichung die Form $z = Mp + Nq$ hat.

Beyspiel 1.

§. 195. Aus der besondern Auflösung $z = x + y$ die allgemeine zu finden, wenn $z = py + qx$ für $dz = p\,dx + q\,dy$ seyn soll.

Da hier $M = y$ und $N = x$ ist, so werden wir folgende Gleichung erhalten:

$$R\,(x\,dx - y\,dy) = dT, \text{ also}$$
$$T = f\,(x^2 - y^2),$$

und demnach wird die allgemeine Auflösung seyn:

$$z = (x + y)\,f\,(x^2 - y^2).$$

Beyspiel 2.

§. 196. Wenn $dz = p\,dx + q\,dy$ gesetzt wird, und

$z = p(x + y) + q(y - x)$ seyn soll, aus dem particulären Werthe $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ die allgemeine Auflösung zu finden.

Weil $M = x + y$ und $N = y - x$ ist, so leitet uns die Formel $N dx - M dy$ auf die Gleichung

$$R(y dx - x dx - x dy - y dy) = dT.$$

Man nehme nun $R = \frac{1}{x^2 + y^2}$, so daß

$$dT = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} - \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$$

wird, und man findet dann

$$T = \text{arc. tang.} \frac{x}{y} - \tfrac{1}{2} l(x^2 + y^2);$$

aus welchem Werthe, der zwey transcendente Größen enthält, sich die Gleichung ergibt:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\, f(T);$$

und es erhellt zugleich, daß es außer dem gegebenen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ keinen anderen particulären Werth gibt, der einer algebraischen Form fähig ist.

Beyspiel 3.

§. 197. Wenn $dz = p dx + q dy$ gesetzt wird, und $z = p(\alpha x + \beta y) + q(\gamma x + \delta y)$ seyn soll, so ist aus der bekannten particulären Auflösung $z = V$ die Natur der Function z im Allgemeinen zu bestimmen.

Es ist hier $M = \alpha x + \beta y$ und $N = \gamma x + \delta y$, wodurch wir auf folgende Gleichung geleitet werden:

$$R[(\gamma x + \delta y) dx - (\alpha x + \beta y) dy] = dT,$$

und hier muß wegen der homogenen Form die Relation Statt finden:

$$R = \frac{1}{\gamma x^2 + (\delta - \alpha) xy - \beta y^2},$$

so daß

$$dT = \frac{(\gamma x + \delta y) dx - (\alpha x + \beta y) dy}{\gamma x^2 + (\delta - \alpha) xy - \beta y^2}$$

wird. Um das Integrale dieses Ausdruckes zu finden, setze man $y = ux$, und man wird erhalten:

$$dT = \frac{dx}{x} - \frac{(\alpha + \beta u) du}{\gamma + (\delta - \alpha) u - \beta u^2};$$

Sey nun

$$\int \frac{(\alpha + \beta u)\, du}{\gamma + (\delta - \alpha)\, u - \beta u^2} = l \,.\, U,$$

so wird

$$T = lx - lU,$$

und da die Function von T auch eine Function von $\frac{x}{U}$ ist, so wird man im Allgemeinen erhalten $z = V f\left(\frac{x}{U}\right)$. Übrigens ist einleuchtend, daß, weil U eine Function von $u = \frac{y}{x}$ ist, U eine homogene Function von x und y, die keine Dimension hat, seyn werde, folglich $\frac{x}{U}$ eine Function von einer Dimension.

Anmerkung.

§. 198. Bey diesem Beyspiele bleibt demnach noch die Schwierigkeit zu beseitigen, nachzuweisen, wie die particuläre Auflösung $z = V$ erhalten werden könne; denn wenn nicht wenigstens eine solche particuläre Auflösung bekannt ist, so ist an eine allgemeine Auflösung gar nicht einmahl zu denken. Für diesen Fall aber läßt sich eine particuläre Auflösung nach der folgenden Methode bestimmen, und da diese etwas ganz Eigenthümliches hat, so ist wohl gar nicht zu zweifeln, daß durch dieselbe diese Gattung von Rechnung sehr viel gewinnen werde.

Aufgabe 35.

§. 199. Wenn $dz = p\,dx + q\,dy$ gesetzt wird, und

$$z = p\,(\alpha x + \beta y) + q\,(\gamma x + \delta y)$$

seyn soll, einen particulären Werth aufzufinden, der statt z gesetzt dieser Bedingungsgleichung entspricht.

Auflösung.

Wir werden unseren Zweck erreichen, wenn wir für z einen solchen Werth suchen, der eine Function keiner Dimension von x und y ist, oder der für $y = ux$ in eine Function von u allein übergeht. Setzen wir also

$$z = f(u) = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

so werden wir erhalten:

$$f'(u) = \frac{dz}{du}, \text{ und weil}$$

$$du = \frac{dy}{x} - \frac{y\,dx}{x^2} \text{ ist, so wird}$$

$$dz = \left(\frac{dy}{x} - \frac{u\,dx}{x}\right) f'(u), \text{ also}$$

$$p = -\frac{u}{x} f'(u) = -\frac{u\,dz}{x\,du} \text{ und}$$

$$q = \frac{1}{x} f'(u) = \frac{dz}{x\,du}.$$

Werden diese Werthe für p und q substituirt, so gibt die vorgelegte Bedingung die Gleichung

$$z = x(\alpha + \beta u)\,p + x(\gamma + \delta u)\,.\,q$$
$$= \frac{-u\,dz(\alpha + \beta u) + dz(\gamma + \delta u)}{du},$$

und daher wird

$$\frac{dz}{z} = \frac{du}{\gamma + (\delta - \alpha)u - \beta u^2}.$$

Setzen wir also

$$\int \frac{du}{\gamma + (\delta - \alpha)u - \beta u^2} = 1\,.\,V,$$

so daß $z = V$ wird, und es wird V der particuläre Werth für z seyn, welcher Genüge leistet.

Zusatz 1.

§. 200. Ist dieser Werth V gefunden, so ergibt sich mit Hülfe des vorhergehenden Beyspieles die allgemeine Auflösung sehr leicht; es wird nämlich $z = V f\left(\frac{x}{U}\right)$ seyn, wobey

$$\frac{dU}{U} = \frac{(\alpha + \beta u)\,du}{\gamma + (\delta - \alpha)u - \beta u^2}$$

ist, und daher leuchtet ein, daß die Größe U aus dem particulären Werthe V selbst gefunden werden könne.

Zusatz 2.

§. 201. Denn man wird erhalten

$$1\,.\,U = -1\,.\sqrt{[\gamma + (\delta - \alpha)u - \beta u^2]} + \int \frac{\frac{1}{2}(\delta + \alpha)\,du}{\gamma + (\delta - \alpha)u - \beta u^2}$$

und daher ist

$$1U = -1\sqrt{[\gamma + (\delta - \alpha)u - \beta u^2]} + \tfrac{1}{2}(\alpha + \delta)\,1V,$$

oder

$$U = \frac{V^{\frac{1}{2}(\alpha+\delta)}}{\sqrt{\gamma + (\delta - \alpha)\,u - \beta u^2}}, \quad \text{also}$$

$$\frac{x}{U} = \frac{\sqrt{\gamma x^2 + (\delta - \alpha)\,xy - \beta y^2}}{V^{\frac{1}{2}(\alpha+\delta)}}.$$

Zusatz 3.

§. 202. Hat man daher den besondern Werth $z = V$ gefunden, so daß

$$\frac{dV}{V} = \frac{du}{\gamma + (\delta - \alpha)\,u - \beta u^2}$$

wird, wobey $u = \frac{y}{x}$ ist, so wird die allgemeine Auflösung folgende seyn:

$$z = V f\left(\frac{\gamma x^2 + (\delta - \alpha)\,xy - \beta y^2}{V^{\alpha+\delta}}\right) = V f\left(\frac{x(\gamma x + \delta y) - y(\alpha x + \beta y)}{V^{\alpha+\delta}}\right).$$

Zusatz 4.

§. 203. Hieraus ergibt sich ein anderer particulärer Werth, der immer algebraisch ist; dieser ist nämlich

$$z = [x(\gamma x + \delta y) - y(\alpha x + \beta y)]^{\frac{1}{\alpha+\delta}}$$

oder irgend ein Vielfaches desselben. Erscheint aber V nicht in algebraischer Form, so werden alle übrigen Werthe transcendent, und in folgendem Ausdrucke enthalten seyn:

$$z = [x(\gamma x + \delta y) - y(\alpha x + \beta y)]^{\frac{1}{\alpha+\delta}}\, f\left(\frac{x(\gamma x + \delta y) - y(\alpha x + \beta y)}{V^{\alpha+\delta}}\right).$$

Anmerkung.

§. 204. Der einzige Fall, in welchem $\delta = -\alpha$ ist, und die Bedingungsgleichung

$$z = p(\alpha x + \beta y) + q(\gamma x - \alpha y)$$

gegeben ist, erfordert eine besondere Entwickelung. Wird aber erstlich $u = \frac{y}{x}$ für den particulären Werth $z = V$ genommen, so findet man:

$$l.V = \int \frac{du}{\gamma - 2\alpha u - \beta u^2},$$

Auflösung.

Man setze für q den angegebenen Werth, und gebe der Gleichung folgende Form:

$$dz - V dy = p(dx + T dy).$$

Weil nun V bloß die zwey Veränderlichen y und z enthält, so wird es einen Multiplicator M geben, der das erste Glied $dz - V dy$ integrabel macht; man setze demnach

$$M(dz - V dy) = dS.$$

Eben so wird es, weil T bloß x und y enthält, einen Multiplicator L geben, der auch das zweyte Glied $dx + T dy$ integrabel macht; es sey also

$$L(dx + T dy) = dR,$$

so daß nun R und S bekannte Functionen sind, und zwar die erstere von x und y, die letztere aber von y und z. Unsere Gleichung wird demnach folgende Form annehmen:

$$\frac{dS}{M} = \frac{p\,dR}{L} \quad \text{oder} \quad dS = \frac{pM\,dR}{L},$$

deren Integrabilität nothwendig erfordert, daß $\frac{pM}{L}$ eine Function von R sey. Setzen wir also

$$\frac{pM}{L} = f'(R), \quad \text{so wird man erhalten} \quad S = f(R),$$

durch welche Gleichung die Relation zwischen z, x und y bestimmt wird.

Zusatz 1.

§. 186. In diesem Probleme ist das vorhergehende als ein besonderer Fall enthalten; denn da daselbst $Z = pX + qY$ ist, so wird $q = \frac{-X}{Y} \cdot p + \frac{Z}{Y}$, und wenn man die vorstehende Aufgabe anwendet, so erhält man:

$$T = -\frac{X}{Y} \quad \text{und} \quad V = \frac{Z}{Y}.$$

Zusatz 2.

§. 187. Obgleich aber diese Aufgabe bey weitem allgemeiner ist als die vorhergehende, so ist sie übrigens noch in sehr enge Grenzen eingeschlossen, und man kann mit Hülfe derselben nicht einmahl den höchst einfachen Fall $z = py + qx$ auflösen.

Anmerkung.

§. 188. Die Gleichung $z = py + qx$ ist allerdings merkwürdig, weil sie nach keiner bisher bekannten Methode auflösbar zu seyn scheint. Denn man mag aus derselben $q = \frac{z - py}{x}$ bestimmen, wodurch

$$dz - \frac{z\,dy}{x} = p\left(dx - \frac{y\,dy}{x}\right)$$

wird, oder man mag auf ähnliche Art p eliminiren, so ist dennoch kein Mittel bekannt, dieselbe aufzulösen. Die Ursache dieser Schwierigkeit liegt offenbar darin, daß die Formel $dz - \frac{z\,dy}{x}$ durch keinen Multiplicator integrabel gemacht werden kann, oder weil die Gleichung $dz - \frac{z\,dy}{x} = 0$ offenbar unmöglich ist, weil x eben so gut veränderlich ist, als y und z. Ich habe nämlich bereits oben schon erinnert, daß nicht alle Differenzialgleichungen zwischen drey Veränderlichen möglich seyen, und habe zugleich den Charakter der Möglichkeit dargestellt, welcher für eine Gleichung von der Form

$$dz + P\,dx + Q\,dy = 0$$

besteht, daß die Relation

$$P\left(\frac{dQ}{dz}\right) - Q\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) - \left(\frac{dP}{dy}\right)$$

Statt findet; in unserem Falle ist nun $P = 0$ und $Q = \frac{-z}{x}$, und daher gibt dieses Kennzeichen $0 = \frac{z}{x^2}$, und da dieß falsch ist, so ist auch jene Gleichung $dz - \frac{z\,dy}{x} = 0$ unmöglich, was zwar für sich klar ist. Allein für den Fall $z = py + qx$ biethet sich dennoch eine particuläre Auflösung dar, nämlich $z = n(x + y)$, und daher wird $p = q = n$. Wir werden aber später die Methode angeben, aus einer solchen particulären Auflösung die Allgemeine zu finden.

Beyspiel 1.

§. 189. Die Natur der Function z zu bestimmen, wenn $dz = p\,dx + q\,dy$ gesetzt wird, und $py + qx = \frac{nxz}{y}$ seyn soll.

Da hier $q = -\frac{py}{x} + \frac{nz}{y}$ ist, so wird

$$T = \frac{-y}{x} \text{ und } V = \frac{nz}{y},$$

und hieraus erhält man:

$$dS = M\left(dz - \frac{nz\,dy}{y}\right) \text{ und } dR = L\left(dx - \frac{y\,dy}{x}\right).$$

Man nehme also $M = \frac{1}{y^n}$, damit $S = \frac{z}{y^n}$ werde, und $L = 2x$, damit man $R = x^2 - y^2$ erhält, so ergibt sich folgende Auflösung:

$$\frac{z}{y^n} = f(x^2 - y^2) \text{ oder } z = y^n f(x^2 - y^2).$$

Beyspiel 2.

§. 190. Die Natur der Function z zu bestimmen, wenn $px^2 + qy^2 = nyz$ für $dz = pdx + qdy$ werden soll.

Da also

$$q = \frac{-px^2}{y^2} + \frac{nz}{y} \text{ ist, so wird}$$

$$T = \frac{-x^2}{y^2} \text{ und } V = \frac{nz}{y},$$

und so ist dieser Fall in unserer Aufgabe enthalten, und hieraus erhalten wir

$$dR = L\left(dx - \frac{x^2\,dy}{y^2}\right) \text{ und}$$

$$dS = M\left(dz - \frac{nz\,dy}{y^2}\right).$$

Wird daher $L = \frac{1}{x^2}$ genommen, so erhält man

$$R = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x-y}{xy},$$

und wird $M = \frac{1}{y^n}$ gesetzt, so wird $S = \frac{z}{y^n}$, und demnach ergibt sich folgende Auflösung:

$$\frac{z}{y^n} = f\left(\frac{x-y}{xy}\right) \text{ und } z = y^n f\left(\frac{x-y}{xy}\right).$$

Aufgabe 33.

§. 191. Die Natur der Function z zu bestimmen, wenn $dz = pdx + qdy$ gesetzt wird, und $p = qT + V$

seyn soll, wobey T eine Function von x und y, V aber eine Function von x und z bezeichnet.

Auflösung.

Wenn für p der vorgeschriebene Werth gesetzt wird, so wird man auf ähnliche Art, wie früher, erhalten:

$$dz - V dx = q (dy + T dx).$$

Die Functionen V und T sind so beschaffen, daß man folgende Formeln wird integriren können:

$$M (dz - V dx) = dS \quad \text{und} \quad N (dy + T dx) = dR;$$

man erhält also

$$\frac{dS}{M} = \frac{q dR}{N} \quad \text{oder} \quad dS = \frac{Mq}{N} dR,$$

woraus sich sehr leicht nachstehende Auflösung ergibt:

$$\frac{Mq}{N} = f'(R) \quad \text{und} \quad S = f(R).$$

Aufgabe 34.

§. 192. Sey $dz = p dx + q dy$, und es soll

$$z = Mp + Nq$$

seyn, wobey M und N beliebige Functionen der beyden Veränderlichen x und y seyn mögen; man soll aus irgend einer particulären Auflösung, welche $z = V$ gibt, im Allgemeinen die Natur der Function z bestimmen.

Auflösung.

Man differenzire jenen besondern Werth, welcher eine Function von x und y ist, und es sey

$$dV = P dx + Q dy.$$

Weil dieser Werth, für z gesetzt, Genüge leistet, indem $p = P$ und $q = Q$ genommen wird, so wird man der Voraussetzung gemäß erhalten:

$$V = MP + NQ.$$

Nun setze man allgemein

$$z = V f(T), \quad \text{und es sey}$$

$$dT = R dx + S dy,$$

so hat man nun diese Function T zu suchen. Durch die Differenziation aber finden wir:

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right) = Pf(T) + VRf'(T) \quad \text{und}$$

$$q = \left(\frac{dz}{dy}\right) = Qf(T) + VSf'(T).$$

Da also

$$z = Mp + Nq = Vf(T)$$

ist, so wird man erhalten:

$$Vf(T) = [MP + NQ]\, f(T) + V[MR + NS]\, f'(T),$$

und weil $V = MP + NQ$ ist, so wird man der Voraussetzung gemäß erhalten:

$$MR + NS = o, \text{ also}$$

$$dT = R\left(dx - \frac{Mdy}{N}\right).$$

Es ist nun nicht gerade nöthig, R zu kennen, sondern es ist hinreichend, den Ausdruck $Ndx - Mdy$ in Betrachtung zu ziehen, welcher mit Hülfe irgend eines Multiplicators integrabel gemacht werden kann. Die Auflösung läßt sich demnach sehr leicht darauf zurückführen, daß aus der vorgeschriebenen Bedingung $z = Mp + Nq$ die reelle Gleichung gebildet werde:

$$dT = R[Ndx - Mdy],$$

denn hat man einen schicklichen Multiplicator R gefunden, so ergibt sich die Größe T durch Integration, und ist diese bestimmt, so wird

$$z = Vf(T).$$

Zweyte Auflösung.

Leichter wird der allgemeine Werth auf folgende Art gefunden. Weil der Werth V von z bekannt ist, setze man $z = Vv$, und es sey

$$dv = rdx + sdy,$$

so wird man erhalten:

$$p = Pv + Vr \quad \text{und} \quad q = Qv + Vs,$$

und daher

$$z = Mp + Nq = (MP + NQ)\, v + V(Mr + Ns) = Vv.$$

Es ist aber $V = MP + NQ$, folglich

$$Mr + Ns = o \quad \text{oder} \quad s = -\frac{Mr}{N},$$

und daher wird

$$dv = r\left(dx - \frac{Mdy}{N}\right) = \frac{r}{N}(Ndx - Mdy).$$

Sucht man demnach einen schicklichen Multiplicator, so setze man

$$R(Ndx - Mdy) = dT,$$

und man wird finden:

$$dv = \frac{r}{NR} \cdot dT, \text{ folglich } \frac{r}{NR} = f'(T) \text{ und } v = f(T),$$

so daß man im Allgemeinen $z = Vv$ erhält, wie vorher.

Zusatz 1.

§. 193. Ist also die Bedingungsgleichung $z = Mp + Nq$ gegeben, damit $dz = pdx + qdy$ werde, so betrachte man sogleich die Differenzialgleichung $R(Ndx - Mdy) = dT$, so wird hieraus der Multiplicator R und dann das Integrale T gefunden, und diese Operation ist von dem bekannten besonderen Werth V unabhängig.

Zusatz 2.

§. 194. Ist aber die Größe T gefunden, und hat man auf irgend eine Art die particuläre Auflösung $r = V$ erhalten, so wird $z = Vf(T)$ die allgemeine Auflösung seyn. Es ist aber wohl zu merken, daß aus der particulären Auflösung die allgemeine nur dann gefunden werden könne, wenn die vorgelegte Bedingungsgleichung die Form $z = Mp + Nq$ hat.

Beyspiel 1.

§. 195. Aus der besondern Auflösung $z = x + y$ die allgemeine zu finden, wenn $z = py + qx$ für $dz = pdx + qdy$ seyn soll.

Da hier $M = y$ und $N = x$ ist, so werden wir folgende Gleichung erhalten:

$$R(xdx - ydy) = dT, \text{ also}$$

$$T = f(x^2 - y^2),$$

und demnach wird die allgemeine Auflösung seyn:

$$z = (x + y)\, f(x^2 - y^2).$$

Beyspiel 2.

§. 196. Wenn $dz = pdx + qdy$ gesetzt wird, und

$z = p(x+y) + q(y-x)$ seyn soll, aus dem particulären Werthe $z = \sqrt{x^2+y^2}$ die allgemeine Auflösung zu finden.

Weil $M = x + y$ und $N = y - x$ ist, so leitet uns die Formel $Ndx - Mdy$ auf die Gleichung

$$R(ydx - xdx - xdy - ydy) = dT.$$

Man nehme nun $R = \frac{1}{x^2+y^2}$, so daß

$$dT = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} - \frac{xdx + ydy}{x^2+y^2}$$

wird, und man findet dann

$$T = \text{arc. tang.} \frac{x}{y} - \tfrac{1}{2} l (x^2+y^2);$$

aus welchem Werthe, der zwey transcendente Größen enthält, sich die Gleichung ergibt:

$$z = \sqrt{x^2+y^2}\, f(T);$$

und es erhellt zugleich, daß es außer dem gegebenen $z = \sqrt{x^2+y^2}$ keinen anderen particulären Werth gibt, der einer algebraischen Form fähig ist.

Beyspiel 3.

§. 197. Wenn $dz = pdx + qdy$ gesetzt wird, und $z = p(\alpha x + \beta y) + q(\gamma x + \delta y)$ seyn soll, so ist aus der bekannten particulären Auflösung $z = V$ die Natur der Function z im Allgemeinen zu bestimmen.

Es ist hier $M = \alpha x + \beta y$ und $N = \gamma x + \delta y$, wodurch wir auf folgende Gleichung geleitet werden:

$$R[(\gamma x + \delta y)dx - (\alpha x + \beta y)dy] = dT,$$

und hier muß wegen der homogenen Form die Relation Statt finden:

$$R = \frac{1}{\gamma x^2 + (\delta - \alpha)xy - \beta y^2},$$

so daß

$$dT = \frac{(\gamma x + \delta y)dx - (\alpha x + \beta y)dy}{\gamma x^2 + (\delta - \alpha)xy - \beta y^2}$$

wird. Um das Integrale dieses Ausdruckes zu finden, setze man $y = ux$, und man wird erhalten:

$$dT = \frac{dx}{x} - \frac{(\alpha + \beta u)du}{\gamma + (\delta - \alpha)u - \beta u^2}.$$

und daher wird

$$A y^\mu dy = p^{-n} x^{-\lambda} z^{-\nu} (dz - p\,dx).$$

Man setze $p^{-n} x^{-\lambda} z^{-\nu} = t$, so daß

$$p = t^{-\frac{1}{n}} x^{-\frac{\lambda}{n}} z^{-\frac{\nu}{n}}$$

wird, so findet man

$$A y^\mu dy = t\,dz - t^{\frac{n-1}{n}} x^{-\frac{\lambda}{n}} z^{-\frac{\nu}{n}} dx.$$

Ferner setze man

$$t^{n-1} z^{-\nu} = u^n \quad \text{oder} \quad t = z^{\frac{\nu}{n-1}} u^{\frac{n}{n-1}},$$

und man wird erhalten:

$$A y^\mu dy = u^{\frac{n}{n-1}} z^{\frac{\nu}{n-1}} dz - u x^{-\frac{\lambda}{n}} dx.$$

Integriren wir nun die einzelnen Theile, in wie fern dieß möglich ist, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{A}{\mu+1} y^{\mu+1} = \frac{n-1}{n+\nu-1} u^{\frac{n}{n-1}} z^{\frac{n+\nu-1}{n-1}} + \frac{nu}{n-\lambda} x^{\frac{n-\lambda}{n}}$$

$$- \int du \left[\frac{n}{n+\nu-1} u^{\frac{1}{n-1}} z^{\frac{n+\nu-1}{n-1}} + \frac{n}{n-\lambda} x^{\frac{n-\lambda}{n}}\right],$$

und nun kann man die Auflösung nach den oben gelehrten Vorschriften darstellen. Man setze nämlich

$$\frac{1}{n+\nu-1} u^{\frac{1}{n-1}} z^{\frac{n+\nu-1}{n-1}} + \frac{1}{n-\lambda} x^{\frac{n-\lambda}{n}} = f'(u),$$

so wird man auf die Gleichung

$$\frac{A}{\mu+1} y^{\mu+1} = \frac{n-1}{n+\nu-1} u^{\frac{n}{n-1}} z^{\frac{n+\nu-1}{n-1}} +$$

$$+ \frac{n}{n-\lambda} u x^{\frac{n-\lambda}{n}} - n f(u)$$

kommen, und wenn man aus diesen beyden Gleichungen die Größe u eliminirt, so wird auch z durch x und y ausgedrückt erscheinen.

Zusatz 1.

§. 216. Der Fall, in welchem $n = 1$ ist, erfordert eine eigenthümliche Behandlung; denn da man für $p = \frac{1}{t} x^{-\lambda} z^{-\nu}$ erhält

$$A y^{\mu} dy = t dz - x^{-\lambda} z^{-\nu} dx,$$

so wird

$$\frac{A}{\mu + 1} y^{\mu+1} = \frac{1}{\lambda - 1} x^{1-\lambda} z^{-\nu} + \int dz \left(t - \frac{\nu}{\lambda - 1} x^{1-\lambda} z^{-\nu-1} \right)$$

und hieraus folgert man sogleich

$$\frac{A}{\mu + 1} y^{\mu+1} = \frac{1}{\lambda - 1} x^{1-\lambda} z^{-\nu} + f(z).$$

Zusatz 2.

§. 217. Die Fälle aber, in welchen $n + \nu - 1 = 0$ und $n - \lambda = 0$ sind, biethen keine Schwierigkeit dar, indem im erstern Falle

$$\frac{n - 1}{n + \nu - 1} z^{\frac{n + \nu - 1}{n - 1}} = lz,$$

im letztern Falle aber

$$\frac{n}{n - \lambda} x^{\frac{n - \lambda}{n}} = lx$$

ist, welche Werthe man in die Auflösung einzuführen hat.

Beyspiel.

§. 218. Die Natur der Function z zu bestimmen, wenn $dz = pdx + qdy$ gesetzt wird, und $pqxy = az$ oder $q = \frac{az}{pxy}$ seyn soll.

Man wird also erhalten:

$$dz = pdx + \frac{azdy}{pxy} \quad \text{oder} \quad \frac{ady}{y} = \frac{px}{z}(dz - pdx).$$

Man setze nun

$$\frac{px}{z} = t \quad \text{oder} \quad p = \frac{tz}{x},$$

so findet man

$$\frac{ady}{y} = tdz - \frac{t^2 z dx}{x}.$$

Ferner setze man

$$t^2 z = u^2 \quad \text{oder} \quad t = \frac{u}{\sqrt{z}},$$

damit man erhält

$$\frac{a\,dy}{y} = \frac{u\,dz}{\sqrt{z}} - \frac{u^2\,dx}{x},$$

also durch Integration, in wie fern diese möglich ist:

$$a l y = 2u\sqrt{z} - u^2 l x - \int du\,(2\sqrt{z} - 2 u l x),$$

so daß nach dem Integralzeichen das einzige Differenziale du erscheint. Wird also

$$\sqrt{z} - u l x = f'(u)$$

gesetzt, so findet man

$$a l y = 2u\sqrt{z} - u^2 l x - 2 f(u) = u^2 l x + 2 u f'(u) - 2 f(u).$$

Für den einfachsten Fall nehme man $f'(u) = 0$ und $f(u) = 0$, so wird $u = \frac{\sqrt{z}}{l x}$, also

$$a l y = \frac{2z}{l x} - \frac{z}{l x} = \frac{z}{l x},$$

so daß man für den einfachsten Fall $z = a l x \,.\, l y$ erhält.

Wenn

$$f'(u) = u l c \quad \text{und} \quad f(u) = \tfrac{1}{2} u^2 l c$$

gesetzt wird, so ergibt sich

$$u = \frac{\sqrt{z}}{l x + l c} = \frac{\sqrt{z}}{l c x}, \quad \text{und}$$

$$a l y = \frac{2z}{l c x} - \frac{z l x}{(l c x)^2} - \frac{z l c}{(l c x)^2} = \frac{l z}{l c x},$$

so daß

$$z = a l y\,(l c + l x)$$

wird; weit allgemeiner aber ist

$$z = a\,(l b + l y)\,(l c + l x).$$

Anmerkung.

§. 219. Die bisher gelehrten Methoden werden eine bedeutende Erweiterung erhalten, wenn statt der beyden Veränderlichen x und y, von welchen z eine Function seyn muß, zwey andere Variable t und u eingeführt werden, die mit den erstern in einer gegebenen Beziehung stehen. Wenn z. B. z eine Function der beyden Veränderlichen x und y ist, so daß hieraus die Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

hervorgeht, und es werden für x und y die neuen Veränderlichen t und u eingeführt, so daß man durch Differenziation erhält:

$$dz = r\,dt + s\,du,$$

so fragt es sich, wie man r und s durch p und q bestimmen könne, und zwar mit Beziehung auf die zwischen den alten Veränderlichen x, y, und den neuen t und u festgesetzten Relationen. Es wird demnach sowohl x als auch y irgend einer bestimmten Function von t und u gleich werden, und da diese gegeben ist, so sey

$$dx = P\,dt + Q\,du \quad \text{und} \quad dy = R\,dt + S\,du,$$

so daß nach Substitution dieser Werthe die Größe z nun als Function von t und u erscheint. Da also

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

ist, so wird man nun haben:

$$dz = (Pp + Rq)\,dt + (Qp + Sq)\,du.$$

Es ist aber der Voraussetzung gemäß

$$dz = r\,dt + s\,du,$$

und daher wird man erhalten:

$$r = Pp + Rq \quad \text{und} \quad s = Qp + Sq.$$

Werden demnach diese Werthe substituirt, so werden sich die neuen Differenzialausdrücke aus den vorhergehenden so bestimmen, daß man erhält:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = P\left(\frac{dz}{dx}\right) + R\left(\frac{dz}{dy}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{du}\right) = Q\left(\frac{dz}{dx}\right) + S\left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Da also auch umgekehrt

$$Qr - Ps = (QR - PS)\,q \quad \text{und}$$
$$Sr - Rs = (PS - QR)\,p$$

ist, so schließen wir, daß

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{S}{PS - QR}\left(\frac{dz}{dt}\right) - \frac{R}{PS - QR}\left(\frac{dz}{du}\right) \quad \text{und}$$
$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{-Q}{PS - QR}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{P}{PS - QR}\left(\frac{dz}{du}\right)$$

seyn werde; oder da x und y eben so, wie z Functionen von t und u sind, so läßt sich diese Relation auf folgende Art ausdrücken:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) \quad \text{und}$$
$$\left(\frac{dz}{du}\right) = \left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Hierdurch erreicht man den Zweck, daß jene Probleme, welche für irgend eine zwischen p, q, x, y, z gegebene Relation die Auflösung gestatten, auch für die sich hieraus ergebende Beziehung zwischen den Größen r, s, t, u und z aufgelöst werden können. Es entstehen hieraus öfters Aufgaben, deren Auflösung mit sehr vielen Schwierigkeiten verbunden zu seyn scheint, und hierdurch könnte dieser Theil der Analysis mit sehr schätzbaren Beyträgen bereichert werden; allein weil die Anwendung hiervon vorzüglich bey Differenzialausdrücken des zweyten Grades Statt findet, so will ich mich bey dieser Materie nicht länger aufhalten, und gehe nun zur Entwickelung der genannten Formeln über.

Zweytes Buch

der

Integralrechnung.

Erster Theil. Zweyter Abschnitt.

Zweyter Abschnitt.

Aufsuchung von Functionen zweyer Veränderlichen aus einer gegebenen Relation der Differenzialien des zweyten Grades.

Kapitel I.

Von den Differenzialformeln des zweyten Grades im Allgemeinen.

Aufgabe 38.

§. 220. Sey z eine beliebige Function der beyden Veränderlichen x und y; ihre Differenzialformeln des zweyten Grades darzustellen.

Auflösung.

Da z eine Function der beyden Veränderlichen x und y ist, so wird ihr Differenziale folgende Form haben:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

wo p und q Differenzialausdrücke des ersten Grades sind, welche wir gewöhnlich so ausdrücken:

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ und } q = \left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Weil nun p und q auch Functionen von x und y sind, so werden die hieraus entstandenen Differenzialausdrücke Differenzialformeln des zweyten Grades von z seyn, und man sieht demnach ein, daß sich hieraus folgende vier Formeln ergeben:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right);\ \left(\frac{dp}{dy}\right);\ \left(\frac{dq}{dx}\right);\ \left(\frac{dq}{dy}\right);$$

von welchen aber die zweyte und dritte identisch seyn müssen, wie in der Differenzialrechnung bewiesen worden ist. Weil aber $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$

ist, so wird man bey einer ähnlichen Bezeichnungsart erhalten: $\left(\frac{dp}{dx}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, und die Bedeutung dieser Art zu schreiben ist für sich klar. Man erhält ferner auf dieselbe Art $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$, und weil $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ ist, so wird

$$\left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(\frac{d^2z}{dydx}\right) \text{ und } \left(\frac{dq}{dy}\right) = \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right).$$

Weil also $\left(\frac{d^2z}{dydx}\right) = \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$ ist, so werden der Function z folgende drey Differenzialausdrücke des zweyten Grades entsprechen:

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right); \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) \text{ und } \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right).$$

Zusatz 1.

§. 221. So wie also eine Function z der beyden Veränderlichen x und y die zwey Differenzialausdrücke des ersten Grades

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ und } \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

hat, eben so entsprechen derselben Function die drey Differenzialformeln des zweyten Grades

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right); \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) \text{ und } \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right).$$

Zusatz 2.

§. 222. Diese Ausdrücke entstehen demnach durch eine doppelte Differenziation, indem man bloß eine einzige Größe als veränderlich ansieht. Bey dem ersten Ausdrucke wird nämlich dieselbe Größe x zweymahl als veränderlich betrachtet; in dem zweyten Ausdrucke aber wird bey der einen Differenziation x, und bey der andern y als veränderlich behandelt, und bey der dritten Formel wird y zweymahl als variabel angesehen.

Zusatz 3.

§. 223. Eben so leuchtet ein, daß einer solchen Function z vier Differenzialausdrücke des dritten Grades zukommen, nämlich:

$$\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right); \left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right); \left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right); \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right);$$

ferner fünf Formeln des vierten Grades, sechs des fünften Grades, u. s. w.

Anmerkung.

§. 224. Diese Differenzialformeln des zweyten Grades lassen sich mittelst Substitution auf Ausdrücke von der Form des ersten Grades zurückführen; so z. B. wird die Formel $\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$ in $\left(\frac{d p}{d x}\right)$ übergehen, wenn $\left(\frac{d z}{d x}\right) = p$ gesetzt wird; der Ausdruck $\left(\frac{d^2 z}{d x d y}\right)$ aber verwandelt sich durch dieselbe Substitution in $\left(\frac{d p}{d y}\right)$. Wird aber $\left(\frac{d z}{d y}\right) = q$ genommen, so verwandelt sich der Ausdruck $\left(\frac{d^2 z}{d x d y}\right)$ in $\left(\frac{d q}{d x}\right)$, die Formel $\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right)$ aber in $\left(\frac{d q}{d y}\right)$.

So wie wir aber aus der Gleichung $p = \left(\frac{d z}{d x}\right)$ die Relationen

$$\left(\frac{d p}{d x}\right) = \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) \text{ und } \left(\frac{d p}{d y}\right) = \left(\frac{d^2 z}{d x d y}\right)$$

abgeleitet haben, eben so folgern wir umgekehrt aus diesen, wenn wir weiter gehen:

$$\left(\frac{d^2 p}{d x^2}\right) = \left(\frac{d^3 z}{d x^3}\right); \left(\frac{d^2 p}{d x d y}\right) = \left(\frac{d^3 z}{d x^2 d y}\right); \left(\frac{d^2 p}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^3 z}{d x d y^2}\right).$$

Wenn wir $\left(\frac{d p}{d x}\right) = \left(\frac{d z}{d y}\right)$ setzen, so werden sich auch folgende Gleichungen ergeben:

$$\left(\frac{d^2 p}{d x^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{d x d y}\right) \text{ und } \left(\frac{d^2 p}{d x d y}\right) = \left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right).$$

Dieß ist gleichsam ein neuer Algorithmus, dessen Principien für sich so klar sind, daß sie keiner weiteren Erläuterung bedürfen.

Beyspiel 1.

§. 225. Sey $z = xy$; man soll die Differenzialformeln des zweyten Grades darstellen.

Da

$$\left(\frac{d z}{d x}\right) = y \text{ und } \left(\frac{d z}{d y}\right) = x$$

ist, so wird man erhalten:

$$\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) = 0; \left(\frac{d^2 z}{d x d y}\right) = 1 \text{ und } \left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = 0.$$

Beyspiel 2.

§. 226. Die Differenzialausdrücke des zweyten Grades zu suchen, wenn $z = x^m y^n$ ist.

Da hier

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = m x^{m-1} y^n \text{ und } \left(\frac{dz}{dy}\right) = n x^m y^{n-1}$$

ist, so wird man finden:

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = m(m-1) x^{m-2} y^n; \quad \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = m n x^{m-1} y^{n-1};$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = n(n-1) x^m y^{n-2}.$$

Beyspiel 3.

§. 227. Sey $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; die Differenzialformeln des zweyten Grades aufzustellen.

Da

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ und } \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ist, so wird man erhalten:

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}; \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}; \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Anmerkung.

§. 228. So wie die zwey Differenzialausdrücke des ersten Grades von irgend einer Function z so beschaffen sind, daß

$$dz = dx\left(\frac{dz}{dx}\right) + dy\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

wird, und durch Integration

$$z = \int\left[dx\left(\frac{dz}{dx}\right) + dy\left(\frac{dz}{dy}\right)\right],$$

eben so wird man auch bey den Formeln des zweyten Grades haben:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \int\left[dx\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + dy\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)\right] \text{ und}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \int\left[dx\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) + dy\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)\right].$$

Die drey Formeln des zweyten Grades sind also immer so beschaffen, daß sie auf eine doppelte Integration führen, wenn sie näm-

lich mit den Differenzialien dx und dy gehörig combinirt werden, und diese Eigenschaft, welche man sich wohl zu merken hat, wird uns in der Folge vorzügliche Dienste leisten.

Aufgabe 39.

§. 229. Wenn z eine Function der beyden Veränderlichen x und y ist, so führe man statt x und y zwey neue Variable t und u ein, so daß sowohl x als y irgend einer Function von t und u gleich werde, und bestimme die Differenzialformeln des zweyten Grades von z in Bezug auf diese neuen Veränderlichen.

Auflösung.

In wie fern z durch x und y gegeben sind, kennt man auch die Differenzialausdrücke jener Größe, sowohl die des ersten Grades $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, als auch jene des zweyten Grades, nämlich $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$, aus welchen nun bestimmt werden muß, wie die Differenzialformeln in Bezug auf die neuen Veränderlichen t und u erhalten werden können. Da aber für den ersten Grad die Gleichung

$$dz = dx\left(\frac{dz}{dx}\right) + dy\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

Statt findet, so wird, weil sowohl x als y durch t und u gegeben ist:

$$dx = dt\left(\frac{dx}{dt}\right) + du\left(\frac{dx}{du}\right) \text{ und}$$

$$dy = dt\left(\frac{dy}{dt}\right) + du\left(\frac{dy}{du}\right).$$

Durch Substitution dieser Werthe wird man das vollständige Differenziale von z, welches aus der Veränderlichkeit von t und u entspringt, erhalten, nämlich:

$$dz = dt\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + du\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + dt\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + du\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Wird nun entweder bloß t, oder bloß u als veränderlich genommen, so erhält man die Differenzialausdrücke des ersten Grades:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right);$$

$$\left(\frac{dz}{du}\right) = \left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Gehen wir nun auf ähnliche Art weiter, differenziren die Formeln

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = q$$

zuerst allgemein, und führen dann statt x und y auch die Größen t und u ein; so werden wir finden:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dp}{dy}\right),$$

$$\left(\frac{dp}{du}\right) = \left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dp}{dy}\right),$$

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dq}{dy}\right),$$

$$\left(\frac{dq}{du}\right) = \left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dq}{dy}\right),$$

und daher können wir die Formeln $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, sowohl wenn t allein, als auch wenn bloß u als veränderlich genommen wird, angeben; da nämlich

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = p\left(\frac{dx}{dt}\right) + q\left(\frac{dy}{dt}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{du}\right) = p\left(\frac{dx}{du}\right) + q\left(\frac{dy}{du}\right)$$

ist, so werden wir finden:

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$$
$$+ 2\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) = \left(\frac{d^2x}{dt\,du}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{d^2y}{dt\,du}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$$
$$+ \left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)$$
$$+ \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{du^2}\right) = \left(\frac{d^2x}{du^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{d^2y}{du^2}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{dx}{du}\right)^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$$
$$+ 2\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{dy}{du}\right)^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right).$$

Zusatz 1.

§. 230. Wird also irgend eine Bedingung zwischen den Diffe-
ialformeln der Function z gegeben, in wie fern diese durch die
änderlichen t und u bestimmt wird; so wird dieselbe Bedingung
eben diese Function z auf die beyden andern von jenen wie immer
ängigen Veränderlichen x und y übertragen.

Zusatz 2.

§. 231. Zwar werden die Formeln

$$\left(\frac{dx}{dt}\right),\ \left(\frac{dy}{dt}\right),\ \left(\frac{dx}{du}\right),\ \left(\frac{dy}{du}\right)\ \text{rc.}$$

h t und u ausgedrückt; allein vermöge der, zwischen x, y und t,
stgesetzten Relation lassen sich eben diese Ausdrücke auf die Veränder-
en x und y zurückführen.

Anmerkung.

§. 232. So wie hier die Veränderlichkeit der Größen t und u
h die aus den Variablen x und y entsprungenen Differenzialfor-
n ausgedrückt wird, eben so werden umgekehrt, wenn die Veränder-
n t und u gegeben werden, aus welchen die andern variablen Grö-
x und y auf irgend eine Art zu bestimmen sind, durch eine bloße
tauschung der Veränderlichen die folgenden Reductionen erhalten;
lich erstens für die Formeln des ersten Grades

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dz}{du}\right);$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dt}{dy}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dz}{du}\right);$$

die Differenzialformeln des zweyten Grades aber:

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2t}{dx^2}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{dz}{du}\right) + \left(\frac{dt}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$
$$+ 2\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) + \left(\frac{du}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2z}{du^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^2t}{dx\,dy}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\left(\frac{dz}{du}\right)$$
$$+ \left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + \left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right)$$
$$+ \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) + \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{du^2}\right),$$

Man nehme also

$$R = \frac{1}{x^{n+1}\,(T - Su)},$$

und man wird erhalten:

$$dU = \frac{dx}{x} - \frac{S\,du}{T - Su},$$

woraus sich der Werth von U ergibt. Für die andere Größe V fin[den] wir ferner die Gleichung

$$dV = \frac{(M + Nu)\,dx + Nx\,du}{x^n\,(MS + NT)},$$

wo es nun leicht ist, für M und N solche Functionen von u anzu[neh]men, daß diese Formel die Integration zuläßt. Das Integrale wi[rd] nämlich seyn:

$$V = \frac{-M - Nu}{(n-1)\,x^{n-1}\,(MS + NT)},$$

aber M und N oder $\frac{M}{N} = K$ muß so genommen werden, daß

$$\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}\,d\,.\,\frac{K+u}{KS+T} = \frac{1}{x^{n-1}}\,.\,\frac{du}{KS+T},\ \text{oder}$$

$$-K^2dS + KSdu - uKdS - uSdK + TdK - KdT$$
$$+ Tdu - udT + (n-1)\,du\,(KS + T) = 0$$

wird. Diese Gleichung läßt sich auf folgende Form bringen:

$$(T - Su)\,dK + K\,(nSdu - udS - dT) - K^2dS + nTdu - udT = [0]$$

Betrachtet man nun die Auflösung der Gleichungen als ei[ne] bekannte Sache, so findet man hieraus die Größe K, und ist di[ese] bestimmt, so erhält man

$$V = \frac{-K - u}{(n-1)\,x^{n-1}\,(KS + T)}.$$

Da aber die Auflösung der obigen Gleichung sehr schwer zu se[yn] scheint, so setze man sogleich

$$\frac{K + u}{KS + T} = v,\ \text{und man wird erhalte[n]}$$

$$K = \frac{Tv - u}{1 - Sv}\ \text{und}\ KS + T = \frac{T - Su}{1 - Sv},$$

daher wird

$$dv + \frac{(n-1)\,du\,(1 - Sv)}{T - Su} = 0,$$

und die Auflösung dieser Gleichung gibt

$$V = \frac{-v}{(n-1)\,x^{n-1}}.$$

$\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ und $\delta = 1$, also

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{dz}{du}\right),\ \left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dz}{du}\right) \text{ und}$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + 2\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) + \left(\frac{d^2z}{du^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) + \left(\frac{d^2z}{du^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{du^2}\right).$$

Zusatz 2.

§. 235. Obgleich also hier $t = x$ ist, so findet dennoch die Gleichung $\left(\frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ nicht Statt, und der Grund hiervon liegt darin, weil in dem Ausdrucke $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ die Größe y constant genommen wird; in dem Ausdrucke $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ aber die Größe $u = x + y$, und es ist gut, dieß im Allgemeinen zu bemerken, damit wir nicht aus der Gleichung $t = x$ auf die Gleichheit der Formeln $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ schließen.

Beyspiel 2.

§. 236. Zwischen den Veränderlichen t, u und x, y seyen die Gleichungen $t = \alpha x^m$ und $u = \beta y^n$ gegeben; man soll die Reduction ausführen.

Man wird also hier erhalten:

$$\left(\frac{dt}{dx}\right) = m\alpha x^{m-1};\ \left(\frac{dt}{dy}\right) = 0;\ \left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) = m(m-1)\alpha x^{m-2};$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 0;\ \left(\frac{du}{dy}\right) = n\beta y^{n-1};\ \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = n(n-1)\beta y^{n-2};$$

und daher finden wir für die Formeln des ersten Grades:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = m\alpha x^{m-1}\left(\frac{dz}{dt}\right);\ \left(\frac{dz}{dy}\right) = n\beta y^{n-1}\left(\frac{dz}{du}\right);$$

für die Formeln des zweyten Grades aber:

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = m(m-1)\alpha x^{m-2}\left(\frac{dz}{dt}\right) + m^2\alpha^2 x^{2m-2}\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = mn\alpha\beta x^{m-1}y^{n-1}\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right),$$

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 t}{d y^2}\right)\left(\frac{d z}{d t}\right) + \left(\frac{d^2 u}{d y^2}\right)\left(\frac{d z}{d u}\right) + \left(\frac{d t}{d y}\right)^2\left(\frac{d^2 z}{d t^2}\right)$$
$$+ 2\left(\frac{d t}{d y}\right)\left(\frac{d u}{d y}\right)\left(\frac{d^2 z}{d t d u}\right) + \left(\frac{d u}{d y}\right)^2\left(\frac{d^2 z}{d u^2}\right),$$

wo die Bestimmung der Größen t und u durch die andern Veränderlichen x und y in Betrachtung gezogen werden muß. Weil wir uns nämlich bey den vorgeschriebenen Bedingungen der beyden Veränderlichen x und y zu bedienen pflegen, so werden wir, wenn wir statt derselben was immer für andere Größen t und u einführen, statt jenen Differenzialformeln diese neuen Ausdrücke, welche sich auf die Variablen t und u beziehen, gebrauchen können, wo aber dann die Relation zwischen den Veränderlichen x, y und t, u so festzusetzen ist, daß die Auflösung der Frage leichter wird. Für verschiedene solche Relationen wollen wir Beyspiele entwickeln.

Beyspiel 1.

§. 233. Die Differenzialformeln zu reduciren, wenn zwischen den Veränderlichen x, y und t, u die Relation

$$t = \alpha x + \beta y \quad \text{und} \quad u = \gamma x + \delta y$$

festgesetzt wird.

Da

$$\left(\frac{d t}{d x}\right) = \alpha; \quad \left(\frac{d t}{d y}\right) = \beta; \quad \left(\frac{d u}{d x}\right) = \gamma; \quad \left(\frac{d u}{d y}\right) = \delta$$

ist, und daher die Ausdrücke für den zweyten Grad verschwinden, so werden wir für die Formeln des ersten Grades erhalten:

$$\left(\frac{d z}{d x}\right) = \alpha\left(\frac{d z}{d t}\right) + \gamma\left(\frac{d z}{d u}\right); \quad \left(\frac{d z}{d y}\right) = \beta\left(\frac{d z}{d t}\right) + \delta\left(\frac{d z}{d u}\right);$$

für die Ausdrücke des zweyten Grades aber:

$$\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) = \alpha^2\left(\frac{d^2 z}{d t^2}\right) + 2\alpha\gamma\left(\frac{d^2 z}{d t d u}\right) + \gamma^2\left(\frac{d^2 z}{d u^2}\right),$$
$$\left(\frac{d^2 z}{d x d y}\right) = \alpha\beta\left(\frac{d^2 z}{d t^2}\right) + (\alpha\delta + \beta\gamma)\left(\frac{d^2 z}{d t d u}\right) + \gamma\delta\left(\frac{d^2 z}{d u^2}\right),$$
$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \beta^2\left(\frac{d^2 z}{d t^2}\right) + 2\beta\delta\left(\frac{d^2 z}{d t d u}\right) + \delta^2\left(\frac{d^2 z}{d u^2}\right).$$

Zusatz 1.

§. 234. Nimmt man $t = x$ und $u = x + y$, so erhält man

$\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ und $\delta = 1$, also

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{dz}{du}\right), \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dz}{du}\right) \text{ und}$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + 2\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) + \left(\frac{d^2z}{du^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) + \left(\frac{d^2z}{du^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{du^2}\right).$$

Zusatz 2.

§. 235. Obgleich also hier $t = x$ ist, so findet dennoch die Gleichung $\left(\frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ nicht Statt, und der Grund hiervon liegt darin, weil in dem Ausdrucke $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ die Größe y constant genommen wird; in dem Ausdrucke $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ aber die Größe $u = x + y$, und es ist gut, dieß im Allgemeinen zu bemerken, damit wir nicht aus der Gleichung $t = x$ auf die Gleichheit der Formeln $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ schließen.

Beyspiel 2.

§. 236. Zwischen den Veränderlichen t, u und x, y seyen die Gleichungen $t = \alpha x^m$ und $u = \beta y^n$ gegeben; man soll die Reduction ausführen.

Man wird also hier erhalten:

$$\left(\frac{dt}{dx}\right) = m\alpha x^{m-1}; \quad \left(\frac{dt}{dy}\right) = 0; \quad \left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) = m(m-1)\alpha x^{m-2};$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 0; \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = n\beta y^{n-1}; \quad \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = n(n-1)\beta y^{n-2};$$

und daher finden wir für die Formeln des ersten Grades:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = m\alpha x^{m-1}\left(\frac{dz}{dt}\right); \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = n\beta y^{n-1}\left(\frac{dz}{du}\right);$$

für die Formeln des zweyten Grades aber:

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = m(m-1)\alpha x^{m-2}\left(\frac{dz}{dt}\right) + m^2\alpha^2 x^{2m-2}\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = mn\alpha\beta x^{m-1}y^{n-1}\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right),$$

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = n(n-1)\beta y^{n-2}\left(\frac{d z}{d u}\right) + n^2 \beta^2 y^{2n-2}\left(\frac{d^2 z}{d u^2}\right),$$

in welchen Formeln nun für x und y ihre durch t und u ausgedrückten Werthe eingeführt werden müssen.

Beyspiel 3.

§. 237. Die Reduction der Differenzialformeln anzugeben, wenn zwischen den Veränderlichen t, u und x, y die Relation gegeben wird, daß $x = t$ und $\frac{x}{y} = u$ seyn soll.

Da $t = x$ und $u = \frac{x}{y}$ ist, so wird man erhalten:

$$\left(\frac{dt}{dx}\right) = 1; \quad \left(\frac{dt}{dy}\right) = 0;$$

und demnach verschwinden die Formeln, welche $d^2 t$ enthalten. Ferner ist

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{1}{y} = \frac{u}{t}; \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{-x}{y^2} = \frac{-u^2}{t}; \quad \left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{d^2 u}{dx\,dy}\right) = \frac{-1}{y^2} = \frac{-u^2}{t^2}; \quad \left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right) = \frac{2x}{y^3} = \frac{2u^3}{t^2};$$

und daher werden wir für die Ausdrücke des ersten Grades erhalten:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{u}{t}\left(\frac{dz}{du}\right); \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{-u^2}{t}\left(\frac{dz}{du}\right);$$

für die Formeln des zweyten Grades aber:

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) + \frac{2u}{t}\left(\frac{d^2 z}{dt\,du}\right) + \frac{u^2}{t^2}\left(\frac{d^2 z}{du^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = \frac{-u^2}{t^2}\left(\frac{dz}{du}\right) - \frac{u^2}{t}\left(\frac{d^2 z}{dt\,du}\right) - \frac{u^3}{t^2}\left(\frac{d^2 z}{du^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \frac{2u^3}{t^2}\left(\frac{dz}{du}\right) + \frac{u^4}{t^2}\left(\frac{d^2 z}{du^2}\right).$$

Beyspiel 4.

§. 238. Wenn zwischen den Veränderlichen t, u und x, y die Relation gegeben wird, daß $t = e^x$ und $u = e^x y$, oder $x = l.t$ und $y = \frac{u}{t}$ seyn soll; die Differenzialformeln zu reduciren.

Hier ist also

$$\left(\frac{dt}{dx}\right) = e^x = t; \quad \left(\frac{dt}{dy}\right) = 0; \quad \left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) = e^x = t; \quad \left(\frac{d^2t}{dx\,dy}\right) = 0;$$

ferner

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = e^x y = u; \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = e^x = t;$$

dann aber wird

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = e^x y = u; \quad \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) = e^x = t; \quad \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = 0.$$

Wir werden demnach für die Formeln des ersten Grades finden:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = t\left(\frac{dz}{dt}\right) + u\left(\frac{dz}{du}\right); \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = t\left(\frac{dz}{du}\right);$$

für die Ausdrücke des zweyten Grades aber:

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = t\left(\frac{dz}{dt}\right) + u\left(\frac{dz}{du}\right) + t^2\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + 2tu\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) + u^2\left(\frac{d^2z}{du^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = t\left(\frac{dz}{du}\right) + t^2\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) + tu\left(\frac{d^2z}{du^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = t^2\left(\frac{d^2z}{du^2}\right).$$

Anmerkung.

§. 239. In den allgemeinen (§. 231) aufgestellten Formeln haben wir angenommen, daß die durch x und y ausgedrückten Werthe der Veränderlichen t und u gegeben seyen, und daß erst dann, wenn die ganze Entwickelung durchgeführt ist, für x und y die Veränderlichen t und u wieder eingeführt werden. Es scheint demnach bequemer zu seyn, wenn sogleich die Werthe der Veränderlichen x und y durch t und u ausgedrückt erhalten werden; allein dadurch würden die Werthe der Ausdrücke $\left(\frac{dt}{dx}\right)$, $\left(\frac{dt}{dy}\right)$ u. s. w. in zu sehr verwickelten Formen erscheinen, als daß man dieselben in die Rechnung einführen könnte. Wenn nämlich x und y durch t und u gegeben werden, so wird

$$\left(\frac{dt}{dx}\right) = \frac{\left(\frac{dy}{du}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{du}\right) - \left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)},$$

und die Ausdrücke des zweyten Grades würden in noch weit verwickelteren Formen erscheinen. In jedem Falle also, in welchem die Anwendung einer solchen Reduction nöthig erscheint, wird man vielmehr durch Überlegung beurtheilen, als nach einer bestimmten Regel angeben können, welche Variable als unveränderlich zu nehmen am zweckmäßigsten sey. Es gibt aber auch noch eine andere Reduction, die oft mit ausgezeichnetem Vortheile gebraucht wird, wenn die Form der gesuchten Function z geändert wird, wenn z. B. $z = Vv$ gesetzt wird, wobey V eine gegebene Function von x und y bezeichnet, so daß nun v die gesuchte Function vorstellt; ja es kann auch diese neue gesuchte Function v mit den gegebenen Größen noch auf eine andere Art verbunden seyn.

Aufgabe 40.

§. 240. **Sey gegeben eine Function z der beyden Veränderlichen x und y, und es werde $z = Pv$ gesetzt, so daß P irgend eine gegebene Function von x und y ist; man soll die Differenzialformeln von z durch die Differenzialformeln der neuen Function v ausdrücken.**

Auflösung.

Da $z = Pv$ ist, so werden wir nach den vorgetragenen Differenziationsregeln zuerst die Differenzialformeln des ersten Grades

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dP}{dx}\right) v + P \left(\frac{dv}{dx}\right) \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dP}{dy}\right) v + P \left(\frac{dv}{dy}\right)$$

erhalten, und hieraus werden sich dann die Differenzialausdrücke des zweyten Grades auf folgende Art darstellen:

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2P}{dx^2}\right) v + 2 \left(\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right) + P \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^2P}{dx\,dy}\right) v + \left(\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dP}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right) + P\left(\frac{d^2v}{dx\,dy}\right)$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2P}{dy^2}\right) v + 2 \left(\frac{dP}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right) + P \left(\frac{d^2v}{dy^2}\right),$$

und da hier P eine gegebene Function von x und y ist, so sind zugleich die Differenzialausdrücke derselben bekannt.

Zusatz 1.

§. 241. Wenn P bloß eine Function von x wäre, z. B. X, so ‌wird man, indem $z = Xv$ genommen wird, erhalten:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dX}{dx}\right) v + X \left(\frac{dv}{dx}\right) \text{ und}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = X \left(\frac{dv}{dy}\right), \text{ dann aber ist}$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = \frac{d^2 X}{dx^2} v + 2 \frac{dX}{dx} \left(\frac{dv}{dx}\right) + X \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = \frac{dX}{d} \left(\frac{dv}{dy}\right) + X \left(\frac{d^2 v}{dx\,dy}\right),$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = X \left(\frac{d^2 v}{dy^2}\right).$$

Zusatz 2.

§. 242. Bey dieser Transformation werden dieselben Veränder-
chen x und y beybehalten, und bloß für die Function z wird eine an-
ere Größe v eingeführt, während früher die Function z dieselbe blieb,
nd die beyden Veränderlichen x und y auf die Größen t und u zurück-
geführt worden sind. Daher sind diese beyden Transformationen der
rt nach verschieden.

Anmerkung 1.

§. 243. Einen einfachern Fall hätten wir gehabt, wenn wir
ittelst der Addition $z = P + v$ gesetzt hätten, so daß P als irgend
ne gegebene Function von x und y erschienen wäre; dann aber wird
e Transformation so leicht, daß keine Untersuchung weiter nöthig ist,
nn man findet offenbar:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dx}\right); \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dP}{dy}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right);$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2 P}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right);$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^2 P}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{d^2 v}{dx\,dy}\right);$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2 P}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2 v}{dy^2}\right).$$

Es ist aber auch nicht nöthig, zusammengesetztere Formen zu ent-
ckeln, für den Fall, zum Beyspiele, wenn wir $z = \sqrt{P^2 + v^2}$
zen, weil eine solche Form schwerlich eine Anwendung finden würde.

Anmerkung 2.

§. 244. Nachdem wir diese Principien und Transformationen vorausgeschickt haben, wollen wir zu unserem Gegenstande selbst übergehen, und die Methoden kennen lehren, aus einer gegebenen Relation zwischen den Differenzialausdrücken des zweyten und des ersten Grades und auch der Hauptgrößen selbst die Beziehung dieser letztern aufzufinden. Es kommen hier nämlich außer den Größen x, y und z und ihren Differenzialformeln des ersten Grades $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ die drey Differenzialausdrücke des zweyten Grades $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$ und $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$ in Betrachtung, von welchen entweder einer oder zwey, oder alle drey in der vorgelegten Relation erscheinen können, wobey überdieß ein sehr großer Unterschied Statt findet, wenn die Formeln des ersten Grades in der Relation erscheinen oder nicht. Allein es würde uns nicht allein zu weit führen, alle Combinationen durchzuführen, wie wir es in dem vorhergehenden Abschnitte gethan haben; sondern es setzt uns auch der Mangel zweckmäßiger Methoden außer Stand, die einzelnen Gattungen der hieher gehörigen Probleme durchzugehen. Wir wollen also die noch abzuhandelnden Kapitel so einrichten, wie es die Auflösungsmethode gestatten wird, und jene Materie, wo sich nichts leisten läßt, ganz übergehen.

Kapitel II.

Von einer Differenzialformel des zweyten Grades, die durch die übrigen Größen auf irgend eine Art gegeben wird.

Aufgabe 41.

§. 245. Die Natur der Function z zu bestimmen, wenn z eine solche Function von x und y seyn soll, daß die Formel des zweyten Grades $\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$ einer gegebenen Function von x und y gleich wird.

Auflösung.

Sey P diese gegebene Function von x und y, so daß $\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) = P$ seyn soll. Man nehme nun y constant, so wird, weil

$$d.\left(\frac{dz}{dx}\right) = dx\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) \text{ ist, } d.\left(\frac{dz}{dx}\right) = P dx,$$

und daher ergibt sich durch Integration:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \int P dx + \text{Const.},$$

wo bey dem Integrale $\int P dx$ die Größe y als unveränderlich angesehen wird, und die beyzufügende Constante irgend eine Function von y bezeichnen wird, so daß diese erste Integration auf die Gleichung

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \int P dx + f(y)$$

führt. Wird nun die Größe y wieder als constant angesehen, so wird

$$dz = dx\left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ oder } dz = dx \int P dx + dx f(y),$$

und da hier $\int P dx$ eine Function von x und y ist, von welchen Größen y als constant genommen wird, so gibt die wiederholte Integration

$$z = \int dx \int P dx + x f(y) + F(y),$$

welcher Ausdruck das vollständige Integrale der vorgelegten Differenzialgleichung $\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) = P$ ist, weil er die zwey willkürlichen Functionen f (y) und F (y) enthält, deren jede nach Belieben so ange-

ist, so wird man bey einer ähnlichen Bezeichnungsart erhalten $\left(\frac{dp}{dx}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$, und die Bedeutung dieser Art zu schreiben ist an sich klar. Man erhält ferner auf dieselbe Art $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)$ und weil $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ ist, so wird

$$\left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dy\,dx}\right) \text{ und } \left(\frac{dq}{dy}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right).$$

Weil also $\left(\frac{d^2 z}{dy\,dx}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)$ ist, so werden der Function z folgende drey Differenzialausdrücke des zweyten Grades entsprechen:

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right);\ \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) \text{ und } \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right).$$

Zusatz 1.

§. 221. So wie also eine Function z der beyden Veränderlichen x und y die zwey Differenzialausdrücke des ersten Grades

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ und } \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

hat, eben so entsprechen derselben Function die drey Differenzialformeln des zweyten Grades

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right);\ \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) \text{ und } \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right).$$

Zusatz 2.

§. 222. Diese Ausdrücke entstehen demnach durch eine doppelte Differenziation, indem man bloß eine einzige Größe als veränderlich ansieht. Bey dem ersten Ausdrucke wird nämlich dieselbe Größe x zweymahl als veränderlich betrachtet; in dem zweyten Ausdrucke aber wird bey der einen Differenziation x, und bey der andern y als veränderlich behandelt, und bey der dritten Formel wird y zweymahl als variabel angesehen.

Zusatz 3.

§. 223. Eben so leuchtet ein, daß einer solchen Function z vier Differenzialausdrücke des dritten Grades zukommen, nämlich:

$$\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right);\ \left(\frac{d^3 z}{dx^2\,dy}\right);\ \left(\frac{d^3 z}{dx\,dy^2}\right);\ \left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right);$$

he willkürliche Functionen, so können sie auch nicht für vollständig
esehen werden. Denn so oft eine Aufgabe auf eine solche Gleichung
$\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) = P$ führt, ist dieselbe immer so beschaffen, daß sowohl der
sdruck $\left(\frac{d z}{d x}\right)$ als auch die Größe z irgend einer gegebenen Func-
von y gleichgesetzt werden kann, wenn der Größe x irgend ein
immter Werth $x = a$ beygelegt worden ist. Wenn daher sowohl
Integrale $\int P d x$ als auch $\int d x \int P d x$ so genommen wird, daß
für $x = a$ verschwindet, so wird man für denselben Fall, wo
$= a$ ist, erhalten:

$$\left(\frac{d z}{d x}\right) = f(y) \quad \text{und} \quad z = a f(y) + F(y),$$

daher werden die beyden Functionen $f(y)$ und $F(y)$ durch die
tur der Aufgabe bestimmt. Diese Anwendung könnte man aber nicht
alle Fälle ausdehnen, wenn man das vollständige Integrale nicht
te; weßhalb wir uns vorzüglich bemühen müssen, bey allen solchen
oblemen die vollständigen Integralien zu erhalten. Übrigens muß
hier ein für alle Mahl erinnern, daß, so oft ein Integralausdruck
der Form $\int P d x$ vorkommt, man sich immer bloß die Größe x als
änderlich zu denken habe; denn wenn auch y als variabel angesehen
rde, so würde der Ausdruck $\int P d x$ nicht einmahl eine Bedeutung
en. Eben so hat man sich bey dem Ausdrucke $\int d x \int P d x$ vorzu-
len, daß bey beyden Integrationen bloß x als veränderlich genom-
n werde. Kommt aber ein Ausdruck von der Form $\int d y \int P d x$ vor,
hat man sich vorzustellen, daß das Integrale $\int P d x$ so bestimmt
rden müsse, als wäre x allein veränderlich, und wenn dieses Inte-
ale $= R$ gesetzt wird, so daß man $\int R d y$ erhält, so wird nun hier
ß y als variabel anzusehen seyn.

Beyspiel 1.

§. 250. Man suche eine solche Function z der zwey
eränderlichen x und y, daß $\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) = \frac{x y}{a}$ wird.

Da hier $P = \frac{x y}{a}$ ist, so wird man erhalten:

$$\int P d x = \frac{x^2 y}{2 a} \quad \text{und} \quad \int d x \int P d x = \frac{x^3 y}{6 a},$$

d so findet man bey der ersten Integration:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{x^2 y}{2a} + f(y),$$

so daß für $x = a$ der Ausdruck $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ irgend einer Function von y gleichgesetzt werden kann, oder auch gleich der zur Absciſſe y gehörigen Ordinate irgend einer Curve. Integrirt man nun von neuem, so erhält man

$$z = \frac{x^3 y}{6a} + xf(y) + F(y),$$

welcher Werth für $x = a$ ebenfalls einer beliebigen Function von y gleichgesetzt werden kann.

Beyspiel 2.

§. 251. Man suche eine solche Function z der beyden Veränderlichen x und y, daß $\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ wird.

Weil $P = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ist, so wird man finden:

$$\int P dx = a\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und}$$

$$\int dx \int P dx = a\int dx \sqrt{x^2 + y^2} = \tfrac{1}{2} ax \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$+ \tfrac{1}{2} ay^2 l . [x + \sqrt{x^2 + y^2}],$$

und daher gibt die erste Integration

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = a\sqrt{x^2 + y^2} + f(y),$$

die zweyte aber

$$z = \tfrac{1}{2} ax\sqrt{x^2 + y^2} + \tfrac{1}{2} ay^2 l . [x + \sqrt{x^2 + y^2}] + xf(y) + F(y).$$

Beyspiel 3.

§. 252. Man suche eine solche Function z der beyden Veränderlichen x und y, daß $\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ wird.

Da $P = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ ist, so wird man erhalten:

$$\int P dx = \text{arc. sin.} \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

nn aber

$$\int dx \int P dx = x \text{ arc. sin. } \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}} - \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Die erste Integration gibt demnach

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \text{arc. sin. } \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}} + f(y),$$

d daher wird die gesuchte Function selbst folgende seyn:

$$= x \text{ arc. sin. } \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}} + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} + x f(y) + F(y).$$

Beyspiel 4.

§. 253. Man suche eine Function z der beyden Veränderlichen x und y von der Art, daß

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = x \sin. (x + y)$$

rd.

Da $P = x \sin. (x + y)$ ist, so wird

$$dx = \int x dx \sin. (x + y) = - x \cos. (x + y) + \int dx \cos. (x + y)$$
$$= - x \cos. (x + y) + \sin. (x + y),$$

m aber ist

$$\int x dx \cos. (x + y) = x \sin. (x + y) + \cos. (x + y),$$

d daher

$$\int dx \int P dx = - 2 \cos. (x + y) - x \sin. (x + y),$$

glich werden unsere zwey Integralien folgende seyn:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \sin. (x + y) - x \cos. (x + y) + f(y) \text{ und}$$

$$= - 2 \cos. (x + y) - x \sin. (x + y) + x f(y) + F(y).$$

Aufgabe 42.

§. 254. Sey z eine solche Function der Veränderchen x und y, daß

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = P \left(\frac{dz}{dx}\right) + Q$$

rde, wobey P und Q beliebige Functionen von x d y bezeichnen; man bestimme im Allgemeinen die atur der Function z.

Auflösung.

Wir wollen hier $\left(\frac{dz}{dx}\right) = v$ setzen, so daß $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right)$ wird, so haben wir folgende Gleichung zu integriren:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = Pv + Q.$$

Man betrachte also bloß x als veränderlich, so wird, weil $dv = dx\left(\frac{dv}{dx}\right)$ ist:

$$dv = Pvdx + Qdx.$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit $e^{-\int Pdx}$, so finden wir dann durch Integration

$$e^{-\int Pdx}v = \int e^{-\int Pdx}Qdx + f(y),$$

und daher

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = e^{\int Pdx}\int e^{-\int Pdx}Qdx + e^{\int Pdx}f(y).$$

Läßt man nun wieder bloß x veränderlich seyn, und betrachtet y als constant, so wird man, weil $dz = dx\left(\frac{dz}{dx}\right)$ ist, erhalten:

$$z = \int e^{\int Pdx}dx\int e^{-\int Pdx}Qdx + f(y)\int e^{\int Pdx}dx + F(y),$$

welche Gleichung wegen der beyden willkürlichen Functionen $f(y)$ und $F(y)$ das vollständige Integrale darstellt.

Zusatz 1.

§. 255. Dieses Problem ist viel umfassender als das vorhergehende, weil die vorgelegte Bedingungsgleichung auch den Differenzialausdruck des ersten Grades $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ enthält, allein wir haben demungeachtet die Auflösung glücklich zu Stande gebracht.

Zusatz 2.

§. 256. Es ist also hier eine vierfache Integration erforderlich, denn man hat zuerst das Integrale $\int Pdx$ zu bestimmen, und wenn dieses $= l.R$ gesetzt wird, so muß man ferner das Integrale

$$\int e^{\int Pdx}dx = \int Rdx$$

suchen. Wird dieses Integrale $= S$ gesetzt, so bleibt noch das Integrale

$$\int R\,dx \int \frac{Q\,dx}{R} = \int dS \int \frac{Q\,dx}{R}$$

bestimmen. Dieses geht über in

$$S \int \frac{Q\,dx}{R} - \int \frac{Q\,S\,dx}{R},$$

daß überdieß noch diese beyden Ausdrücke integrirt werden müssen.

Zusatz 3.

§. 257. Ganz auf dieselbe Art löst man auch die Aufgabe, bey lcher

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = P \left(\frac{d z}{d y}\right) + Q$$

n soll, wenn P und Q was immer für gegebene Functionen von und y sind. Denn man findet:

$$\left(\frac{d z}{d y}\right) = e^{\int P\,dy} \int e^{-\int P\,dy} Q\,dy + e^{\int P\,dy} f(x) \quad \text{und}$$

$$= \int e^{\int P\,dy} dy \int e^{-\int P\,dy} Q\,dy + f(x) \,.\, \int e^{\int P\,dy} dy + F(x).$$

Beyspiel 1.

§. 258. Man suche eine solche Function z der bey- n Veränderlichen x und y, daß $\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) = \frac{n}{x}\left(\frac{d z}{d x}\right)$ wird.

Wird $\left(\frac{d z}{d x}\right) = v$ gesetzt, und bloß x als veränderlich betrach- , so wird $\left(\frac{d v}{d x}\right) = \frac{n v}{x}$, also $\left(\frac{d v}{v}\right) = \frac{n\,dx}{x}$, und das Inte- le hiervon ist:

$$v = \left(\frac{d z}{d x}\right) = x^n f(y).$$

Wird nun wieder bloß x als veränderlich angesehen, so wird

$$d z = x^n\,d x\, f(y),$$

das vollständige Integrale hiervon ist

$$z = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} f(y) + F(y).$$

Für den Fall aber, daß $n = -1$ oder $\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) = \frac{-1}{x}\left(\frac{d z}{d x}\right)$ erhält man

$$\left(\frac{d z}{d x}\right) = \frac{1}{x} f(y) \quad \text{und} \quad z = l x f(y) + F(y).$$

Beyspiel 2.

§. 259. Man suche eine solche Function z der beyden Veränderlichen x und y, daß $\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = \frac{n}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{a}{xy}$ wird.

Wird $\left(\frac{dz}{dx}\right) = v$ gesetzt, und bloß x als veränderlich angesehen, so findet man

$$dv = \frac{nv\,dx}{x} + \frac{a\,dx}{xy},$$

und diese Gleichung gibt, wenn sie durch x^n dividirt und dann integrirt wird:

$$\frac{v}{x^n} = \frac{a}{y}\int\frac{dx}{x^{n+1}} = \frac{-a}{nx^n y} + f(y), \quad \text{oder}$$

$$v = \left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{-a}{ny} + x^n f(y).$$

Sey wieder bloß x veränderlich, so daß

$$dz = \frac{-a\,dx}{ny} + x^n dx\, f(y)$$

wird, und man wird als vollständiges Integrale erhalten:

$$z = \frac{-ax}{ny} + \frac{1}{n+1}x^{n+1} f(y) + F(y).$$

Beyspiel 3.

§. 260. Man suche eine solche Function z der beyden Veränderlichen x und y, daß

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = \frac{2nx}{x^2+y^2}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{x}{ay}$$

wird.

Wird $\left(\frac{dz}{dx}\right) = v$ gesetzt, und y constant genommen, so findet man

$$dv = \frac{2nxv\,dx}{x^2+y^2} + \frac{x\,dx}{ay},$$

und diese Gleichung gibt, wenn sie mit $(x^2+y^2)^n$ dividirt und dann integrirt wird:

$$\frac{v}{(x^2+y^2)^n} = \frac{1}{ay}\int\frac{x\,dx}{(x^2+y^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)ay(x^2+y^2)^{n-1}} + f(y)$$

...er

$$v = \left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{-(x^2+y^2)}{2(n-1)ay} + (x^2+y^2)^n f(y).$$

Wird nun y wieder constant genommen, so erhält man:

$$z = \frac{-x(x^2+3y^2)}{6(n-1)ay} + f(y) \cdot \int (x^2+y^2)^n dx + F(y).$$

Für den Fall, in welchem $n = 1$ oder

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{2x}{x^2+y^2}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{x}{ay}$$

, wird man finden:

$$\frac{v}{x^2+y^2} = \frac{1}{ay}\int \frac{x\,dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{2ay}\, l(x^2+y^2) + f(y),$$

so

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{x^2+y^2}{2ay}\, l(x^2+y^2) + (x^2+y^2)\, f(y)$$

...d

$$= \frac{x(x^2+3y^2)}{6ay}\, l(x^2+y^2) - \frac{1}{9ay}\left(x^3 + 6xy^2 - 6y^3 \text{ arc. tang. } \frac{x}{y}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{3}x(x^2+3y^2)\, f(y) + F(y).$$

Aufgabe 43.

§. 261. Sey z eine solche Function der zwey Veränderlichen x und y, daß

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q$$

...ird, wobey P und Q was immer für gegebene Functionen der drey Veränderlichen x, y und z bezeichnen; ...an bestimme die Natur der Function z.

Auflösung.

Wird die Größe y constant genommen, so wird

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{d^2z}{dx^2} \text{ und } \left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{dz}{dx};$$

...d demnach wird man eine Differenzialgleichung des zweyten Grades ...halten, die in das vorhergehende Buch gehört, nämlich

$$d^2z = P\,dx\,dz + Q\,dx^2,$$

...d man muß sich hier vorstellen, daß diese Gleichung bloß die zwey ...eränderlichen x und z enthalte, weil in derselben y als constant be-

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = n(n-1)\beta y^{n-2}\left(\frac{dz}{du}\right) + n^2\beta^2 y^{2n-2}\left(\frac{d^2 z}{du^2}\right),$$

in welchen Formeln nun für x und y ihre durch t und u ausgedrückte Werthe eingeführt werden müssen.

Beyspiel 3.

§. 237. Die Reduction der Differenzialformeln anzugeben, wenn zwischen den Veränderlichen t, u und x, y die Relation gegeben wird, daß $x = t$ und $\frac{x}{y} = u$ seyn soll.

Da $t = x$ und $u = \frac{x}{y}$ ist, so wird man erhalten:

$$\left(\frac{dt}{dx}\right) = 1; \quad \left(\frac{dt}{dy}\right) = 0;$$

und demnach verschwinden die Formeln, welche $d^2 t$ enthalten. Ferner ist

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{1}{y} = \frac{u}{t}; \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{-x}{y^2} = \frac{-u^2}{t}; \quad \left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{d^2 u}{dx\,dy}\right) = \frac{-1}{y^2} = \frac{-u^2}{t^2}; \quad \left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right) = \frac{2x}{y^3} = \frac{2u^3}{t^2};$$

und daher werden wir für die Ausdrücke des ersten Grades erhalten:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{u}{t}\left(\frac{dz}{du}\right); \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{-u^2}{t}\left(\frac{dz}{du}\right);$$

für die Formeln des zweyten Grades aber:

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) + \frac{2u}{t}\left(\frac{d^2 z}{dt\,du}\right) + \frac{u^2}{t^2}\left(\frac{d^2 z}{du^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = \frac{-u^2}{t^2}\left(\frac{dz}{du}\right) - \frac{u^2}{t}\left(\frac{d^2 z}{dt\,du}\right) - \frac{u^3}{t^2}\left(\frac{d^2 z}{du^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \frac{2u^3}{t^2}\left(\frac{dz}{du}\right) + \frac{u^4}{t^2}\left(\frac{d^2 z}{du^2}\right).$$

Beyspiel 4.

§. 238. Wenn zwischen den Veränderlichen t, u und x, y die Relation gegeben wird, daß $t = e^x$ und $u = e^x y$, oder $x = l.t$ und $y = \frac{u}{t}$ seyn soll; die Differenzialformeln zu reduciren.

Hier ist also

$$\left(\frac{dt}{dx}\right) = e^x = t;\ \left(\frac{dt}{dy}\right) = o;\ \left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) = e^x = t;\ \left(\frac{d^2t}{dxdy}\right) = o;$$

ferner

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = e^x y = u;\ \left(\frac{du}{dy}\right) = e^x = t;$$

dann aber wird

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = e^x y = u;\ \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right) = e^x = t;\ \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = o.$$

Wir werden demnach für die Formeln des ersten Grades finden:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = t\left(\frac{dz}{dt}\right) + u\left(\frac{dz}{du}\right);\ \left(\frac{dz}{dy}\right) = t\left(\frac{dz}{du}\right);$$

für die Ausdrücke des zweyten Grades aber:

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = t\left(\frac{dz}{dt}\right) + u\left(\frac{dz}{du}\right) + t^2\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + 2tu\left(\frac{d^2z}{dtdu}\right) + u^2\left(\frac{d^2z}{du^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = t\left(\frac{dz}{du}\right) + t^2\left(\frac{d^2z}{dtdu}\right) + tu\left(\frac{d^2z}{du^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = t^2\left(\frac{d^2z}{du^2}\right).$$

Anmerkung.

§. 239. In den allgemeinen (§. 231) aufgestellten Formeln haben wir angenommen, daß die durch x und y ausgedrückten Werthe der Veränderlichen t und u gegeben seyen, und daß erst dann, wenn die ganze Entwickelung durchgeführt ist, für x und y die Veränderlichen t und u wieder eingeführt werden. Es scheint demnach bequemer zu seyn, wenn sogleich die Werthe der Veränderlichen x und y durch t und u ausgedrückt erhalten werden; allein dadurch würden die Werthe der Ausdrücke $\left(\frac{dt}{dx}\right)$, $\left(\frac{dt}{dy}\right)$ u. s. w. in zu sehr verwickelten Formen erscheinen, als daß man dieselben in die Rechnung einführen könnte. Wenn nämlich x und y durch t und u gegeben werden, so wird

$$\left(\frac{dt}{dx}\right) = \frac{\left(\frac{dy}{du}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{du}\right) - \left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)},$$

und die Ausdrücke des zweyten Grades würden in noch weit verwick-
teren Formen erscheinen. In jedem Falle also, in welchem die An-
wendung einer solchen Reduction nöthig erscheint, wird man lieber
durch Überlegung beurtheilen, als nach einer bestimmten Regel ange-
ben können, welche Variable als unveränderlich zu nehmen am zweck-
mäßigsten sey. Es gibt aber auch noch eine andere Reduction, die
oft mit ausgezeichnetem Vortheile gebraucht wird, wenn die Form
der gesuchten Function z geändert wird, wenn z. B. $z = Vv$ gesetzt
wird, wobey V eine gegebene Function von x und y bezeichnet, so daß
nun v die gesuchte Function vorstellt; ja es kann auch diese neue ge-
suchte Function v mit den gegebenen Größen noch auf eine andere Art
verbunden seyn.

Aufgabe 40.

§. 240. **Sey gegeben eine Function z der beyden Veränderlichen x und y, und es werde $z = Pv$ gesetzt, so daß P irgend eine gegebene Function von x und y ist; man soll die Differenzialformeln von z durch die Differenzialformeln der neuen Function v ausdrücken.**

Auflösung.

Da $z = Pv$ ist, so werden wir nach den vorgetragenen Differen-
ziationsregeln zuerst die Differenzialformeln des ersten Grades

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dP}{dx}\right) v + P \left(\frac{dv}{dx}\right) \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dP}{dy}\right) v + P \left(\frac{dv}{dy}\right)$$

erhalten, und hieraus werden sich dann die Differenzialausdrücke des
zweyten Grades auf folgende Art darstellen:

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2 P}{dx^2}\right) v + 2 \left(\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right) + P \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^2 P}{dx\,dy}\right) v + \left(\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dP}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right) + P \left(\frac{d^2 v}{dx\,dy}\right)$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2 P}{dy^2}\right) v + 2 \left(\frac{dP}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right) + P \left(\frac{d^2 v}{dy^2}\right),$$

und da hier P eine gegebene Function von x und y ist, so sind zugl
die Differenzialausdrücke derselben bekannt.

$$P = \left(\frac{d^2 V}{dx\,dy}\right)$$

erhalten wird.

Zusatz 3.

§. 270. Wenn $P = o$ ist, oder wenn $\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = o$ seyn sollte, so drückt die Gleichung

$$z = f(x) + F(y)$$

die Natur der Function z aus.

Anmerkung.

§. 271. Dieser Fall kömmt häufig in der Körperlehre vor, denn wenn die Natur einer Oberfläche durch eine Gleichung zwischen den drey Coordinaten x, y und u ausgedrückt wird, so ist der von dieser Fläche begränzte Raum $= \int dx \int u\,dy$; bezeichnet man daher den Körperraum durch z, so wird $\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = u$, nämlich gleich der auf die beyden Coordinaten x und y senkrechten Ordinate.

Setzt man aber

$$du = p\,dx + q\,dy,$$

so wird man die Oberfläche dieses Körpers

$$= \int dx \int dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

finden, und wird diese Fläche durch z bezeichnet, so wird

$$\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

seyn. Wenn wir demnach in unserem Probleme eine solche Function z von x und y suchen, daß die Gleichung $\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = P$ Statt findet, so ist dieß eben so viel, als suchten wir den Körperraum, welcher zu einer Fläche gehört, deren Natur durch eine Gleichung zwischen den drey Coordinaten x, y und P ausgedrückt wird. Wir wollen also diese Rechnung durch einige Beyspiele erläutern.

Beyspiel 1.

§. 272. Man suche eine solche Function z der beyden Veränderlichen x und y, daß $\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = \alpha x + \beta y$ wird.

Anmerkung 2.

§. 244. Nachdem wir diese Principien und Transformati
vorausgeschickt haben, wollen wir zu unserem Gegenstande selbst
gehen, und die Methoden kennen lehren, aus einer gegebenen Rel
zwischen den Differenzialausdrücken des zweyten und des ersten Gr
und auch der Hauptgrößen selbst die Beziehung dieser letztern auf
finden. Es kommen hier nämlich außer den Größen x, y und z u
ihren Differenzialformeln des ersten Grades $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$
drey Differenzialausdrücke des zweyten Grades $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dx\,d}\right.$
und $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$ in Betrachtung, von welchen entweder einer oder zw
oder alle drey in der vorgelegten Relation erscheinen können, wo
überdieß ein sehr großer Unterschied Statt findet, wenn die Form
des ersten Grades in der Relation erscheinen oder nicht. Allein
würde uns nicht allein zu weit führen, alle Combinationen durch
führen, wie wir es in dem vorhergehenden Abschnitte gethan hab
sondern es setzt uns auch der Mangel zweckmäßiger Methoden au
Stand, die einzelnen Gattungen der hieher gehörigen Probleme dur
zugehen. Wir wollen also die noch abzuhandelnden Kapitel so
richten, wie es die Auflösungsmethode gestatten wird, und jene Ma
terie, wo sich nichts leisten läßt, ganz übergehen.

Weil $\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin.\varphi$ ist, so wird

$$\frac{yx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) \cos.\varphi.$$

Es ist aber

$$\cos.\varphi = \frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \text{ daher}$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \frac{yx}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \text{ und}$$

$$\int x\,dx \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = y\int \frac{x^2\,dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

aber dieses Integrale gefunden, so wird man erhalten:

$$= ax \text{ arc. sin.} \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} - ay\int \frac{x^2\,dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + f(x) + F(y),$$

dieser Ausdruck läßt sich, wenn die Integration ausgeführt ist, folgende Form zurückführen:

$$= ax \text{ arc. sin.} \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} + ay \text{ arc. sin.} \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}} -$$

$$- a^2 \text{ arc. sin.} \frac{xy}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - y^2)}} + f(x) + F(y).$$

Das Integrale $\int \frac{a^2\,dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ läßt sich auf folgende sehr leicht entwickeln.

Man setze $\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = p$, so wird $x^2 = \frac{p^2(a^2 - y^2)}{1 + p^2}$, durch Differenziation mittelst Logarithmen, weil y unveränderist:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{p} - \frac{p\,dp}{1 + p^2} = \frac{dp}{p(1 + p^2)},$$

n aber durch Multiplication mit jenem Ausdrucke

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \frac{dp}{1 + p^2}.$$

Ferner ist

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2 + p^2 y^2}{1 + p^2},$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{x^2 y}{2a} + f(y),$$

so daß für $x = a$ der Ausdruck $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ irgend einer Function gleichgesetzt werden kann, oder auch gleich der zur Absciße y geh Ordinate irgend einer Curve. Integrirt man nun von neue erhält man

$$z = \frac{x^3 y}{6a} + xf(y) + F(y),$$

welcher Werth für $x = a$ ebenfalls einer beliebigen Function gleichgesetzt werden kann.

Beyspiel 2.

§. 251. Man suche eine solche Function z der den Veränderlichen x und y, daß $\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = \frac{a}{\sqrt{x^2 ...}}$ wird.

Weil $P = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ist, so wird man finden:

$$\int P dx = a\sqrt{x^2 + y^2} \text{ und}$$

$$\int dx \int P dx = a\int dx \sqrt{x^2 + y^2} = \tfrac{1}{2} ax\sqrt{x^2 + y^2} + \tfrac{1}{2} ay^2 l . [x + \sqrt{x^2 + y^2}]$$

und daher gibt die erste Integration

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = a\sqrt{x^2 + y^2} + f(y),$$

die zweyte aber

$$z = \tfrac{1}{2} ax\sqrt{x^2 + y^2} + \tfrac{1}{2} ay^2 l . [x + \sqrt{x^2 + y^2}] + xf(y) + F(y)$$

Beyspiel 3.

§. 252. Man suche eine solche Function z der den Veränderlichen x und y, daß $\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 ...}}$ wird.

Da $P = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ ist, so wird man erhalten:

$$\int P dx = \text{arc. sin.} \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

n aber

$$\int dx \int P dx = x \text{ arc. sin. } \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}} - \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Die erste Integration gibt demnach

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \text{arc. sin. } \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}} + f(y),$$

daher wird die gesuchte Function selbst folgende seyn:

$$= x \text{ arc. sin.} \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}} + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} + x f(y) + F(y).$$

Beyspiel 4.

§. 253. Man suche eine Function z der beyden Veränderlichen x und y von der Art, daß

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = x \text{ sin. } (x + y)$$

d.

Da $P = x \text{ sin.} (x + y)$ ist, so wird

$$\int P dx = \int x dx \text{ sin.} (x+y) = -x \cos. (x+y) + \int dx \cos. (x+y)$$
$$= -x \cos. (x+y) + \sin. (x + y),$$

aber ist

$$\int x dx \cos. (x + y) = x \sin. (x + y) + \cos. (x + y),$$

daher

$$\int dx \int P dx = -2 \cos. (x + y) - x \sin. (x + y),$$

ich werden unsere zwey Integralien folgende seyn:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \sin. (x + y) - x \cos. (x + y) + f(y) \text{ und}$$

$$- 2 \cos. (x + y) - x \sin. (x + y) + x f(y) + F(y).$$

Aufgabe 42.

§. 254. Sey z eine solche Function der Veränderlichen x und y, daß

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = P \left(\frac{dz}{dx}\right) + Q$$

de, wobey P und Q beliebige Functionen von x y bezeichnen; man bestimme im Allgemeinen die ur der Function z.

wird; die Natur dieser Function z wenigstens im Besondern aufzusuchen.

Auflösung.

Da die Größe z durchaus nur eine Dimension hat, so ist einleuchtend, daß, wenn $z = e^p q$ gesetzt wird, die Exponentialgröße e^p aus der Rechnung verschwindet. Setzen wir also $z = e^{\alpha x} Y$, wo Y bloß eine Function von y seyn soll, so werden wir erhalten:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \alpha e^{\alpha x} Y \quad \text{und} \quad \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = \alpha e^{\alpha x} \frac{dY}{dy} = a e^{\alpha x} Y,$$

daher wird

$$\frac{\alpha\, dY}{Y} = a\,dy \quad \text{und} \quad Y = e^{\frac{ay}{\alpha}},$$

und so erhalten wir die particuläre Auflösung

$$z = A e^{\alpha x + \frac{ay}{\alpha}},$$

welche aber umfassend genug ist, da sowohl A als α nach Belieben angenommen werden können. Mehrere Werthe von z aber, welche für sich Genüge leisten, thun auch in Verbindung mit einander Genüge, und hieraus leiten wir folgenden weit allgemeineren Ausdruck ab:

$$z = A e^{\alpha x + \frac{a}{\alpha} y} + B e^{\beta x + \frac{a}{\beta} y} + C e^{\gamma x + \frac{a}{\gamma} y} + D e^{\delta x + \frac{a}{\delta} y} + \ldots$$

Da hier die Größen $A, B, C, \ldots$ und eben so $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ alle möglichen Werthe erhalten können, so ist dieser Ausdruck für sehr allgemein zu halten, und scheint, wenn wir auf den Umfang sehen, den obigen Auflösungen nicht nachzustehen, welche zwey willkürliche Functionen enthalten, besonders weil hier zweyerley willkürliche Coefficienten vorkommen; indessen sieht man doch nicht ein, wie sich die discontinuirlichen Functionen durch diese Relation darstellen lassen.

Zusatz 1.

§. 283. Um also eine particuläre Auflösung zu finden, nehme man die beyden Zahlen m und n so an, daß ihr Product $mn = a$ wird, und man wird erhalten $z = A e^{mx + ny}$; eben so wird man auch durch Vertauschung derselben Zahlen finden $z = A e^{nx + my}$.

$$\int R\,dx \int \frac{Q\,dx}{R} = \int dS \int \frac{Q\,dx}{R}$$

zu bestimmen. Dieses geht über in

$$S \int \frac{Q\,dx}{R} - \int \frac{Q\,S\,dx}{R},$$

so daß überdieß noch diese beyden Ausdrücke integrirt werden müssen.

Zusatz 3.

§. 257. Ganz auf dieselbe Art löst man auch die Aufgabe, bey welcher

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = P \left(\frac{d z}{d y}\right) + Q$$

seyn soll, wenn P und Q was immer für gegebene Functionen von x und y sind. Denn man findet:

$$\left(\frac{d z}{d y}\right) = e^{\int P\,dy} \int e^{-\int P\,dy} Q\,dy + e^{\int P\,dy} f(x) \quad \text{und}$$

$$z = \int e^{\int P\,dy} dy \int e^{-\int P\,dy} Q\,dy + f(x) \,.\int e^{\int P\,dy} dy + F(x).$$

Beyspiel 1.

§. 258. Man suche eine solche Function z der beyden Veränderlichen x und y, daß $\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) = \frac{n}{x}\left(\frac{d z}{d x}\right)$ wird.

Wird $\left(\frac{d z}{d x}\right) = v$ gesetzt, und bloß x als veränderlich betrachtet, so wird $\left(\frac{d v}{d x}\right) = \frac{n v}{x}$, also $\left(\frac{d v}{v}\right) = \frac{n\,dx}{x}$, und das Integrale hiervon ist:

$$v = \left(\frac{d z}{d x}\right) = x^n f(y).$$

Wird nun wieder bloß x als veränderlich angesehen, so wird

$$dz = x^n dx f(y),$$

und das vollständige Integrale hiervon ist

$$z = \frac{1}{n+1} x^{n+1} f(y) + F(y).$$

Für den Fall aber, daß $n = -1$ oder $\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) = \frac{-1}{x}\left(\frac{d z}{d x}\right)$ ist, erhält man

$$\left(\frac{d z}{d x}\right) = \frac{1}{x} f(y) \quad \text{und} \quad z = l x f(y) + F(y).$$

$$\frac{\alpha dX}{dx} + \frac{PdX}{dx} + \alpha QX + RX = 0,$$

und hieraus ergibt sich

$$\frac{dX}{X} = \frac{-dx(\alpha Q + R)}{\alpha + P},$$

und so findet man für jede Zahl α einen entsprechenden Werth von X.

Nimmt man daher unendlich viele Zahlen α, so erhält man auf diese Art folgenden Ausdruck, der unendlich Mahl unzähliger Bestimmungen fähig ist:

$$z = Ae^{\alpha y}X + Be^{\beta y}X' + Ce^{\gamma y}X'' + \ldots$$

Allein es gibt dennoch auch Fälle von solchen Gleichungen, welche in der That vollständige Auflösungen zulassen, deren Natur wir in dem folgenden Probleme untersuchen wollen.

Aufgabe 47.

§. 287. Sey folgende Gleichung

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q\left(\frac{dz}{dy}\right) + Rz + S = 0$$

aufzulösen. Man untersuche was die Größen P, Q, R und S für Functionen von x und y seyn müssen, damit diese Gleichung eine vollständige Auflösung zulasse.

Auflösung.

Sey V irgend eine Function von x und y, und man setze $z = e^V v$, so daß nun v eine unbekannte Größe ist, deren Werth gesucht werden muß. Da also:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = e^V\left[\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dV}{dx}\right)\right] \text{ und}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = e^V\left[\left(\frac{dv}{dy}\right) + v\left(\frac{dV}{dy}\right)\right]$$

ist, so wird, wenn diese Werthe substituirt werden, und die ganze Gleichung durch e^V dividirt wird, folgende Gleichung zum Vorschein kommen:

$$\left.\begin{array}{r} e^{-V}S + \left(\frac{d^2v}{dxdy}\right) + \left(\frac{dV}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dV}{dy}\right)v \\ + P\left(\frac{dv}{dx}\right) + Q\left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{d^2V}{dxdy}\right)v \\ + P\left(\frac{dV}{dx}\right)v \\ + Q\left(\frac{dV}{dy}\right)v \\ + Rv \end{array}\right\} = 0.$$

Nun hat man zu bewirken, daß diese Gleichung die vollständige Auflösung zuläßt. Da wir also früher gesehen haben, daß eine Gleichung von der Form

$$\left(\frac{d^2 v}{dx\,dy}\right) + T\left(\frac{dv}{dx}\right) + e^{-V}S = 0$$

allgemein aufgelöst werden könne, welche Functionen von x und y auch immer für S und V genommen werden mögen, so müssen wir diese Gleichung auf jene Form zurückführen.

Man muß also setzen:

$$P + \left(\frac{dV}{dy}\right) = T;\quad Q + \left(\frac{dV}{dx}\right) = 0 \quad \text{und}$$

$$R + Q\left(\frac{dV}{dy}\right) + P\left(\frac{dV}{dx}\right) + \left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dV}{dy}\right) + \left(\frac{d^2 V}{dx\,dy}\right) = 0;$$

hieraus erhalten wir

$$P = T - \left(\frac{dV}{dy}\right);\quad Q = -\left(\frac{dV}{dx}\right) \quad \text{und}$$

$$R = \left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dV}{dy}\right) - T\left(\frac{dV}{dx}\right) - \left(\frac{d^2 V}{dx\,dy}\right).$$

Weil man nun nach §. 275

$$v = -\int e^{-\int T dy} dy \int e^{\int T dy - V} S\,dy + \int e^{-\int T dy} dx\, f(x) + F(y)$$

findet, so wird der vorgelegten Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) + P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q\left(\frac{dz}{dy}\right) + Rz + S = 0,$$

wenn nur die Größen P, Q und R die angezeigten Werthe behalten, folgendes vollständige Integrale entsprechen:

$$z = -e^V \int e^{-\int T dy} dx \int e^{\int T dy - V} S dy + e^V \int e^{-\int T dy} dx\, f(x) + e^V F(y),$$

wenn hier die Ausdrücke f (x) und F (y) beliebige Functionen von x und y bezeichnen.

Zusatz 1.

§. 288. Welche Functionen von x und y also auch für die Größen T und V genommen werden mögen, so ergeben sich doch immer brauchbare Werthe, welche für die Größen P, Q und R genommen werden müssen, damit unsere Gleichung die vollständige Auflösung gestattet. Die Function S aber bleibt unserer Willkür überlassen.

Zusatz 2.

§. 289. In der vorgelegten Gleichung können auch die Func-

tionen P und Q unbestimmt bleiben, und man wird dann erhalten:

$$V = -\int Q\,dx \quad \text{und} \quad \left(\frac{dV}{dy}\right) = -\int dx \left(\frac{dQ}{dy}\right) \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{d^2 V}{dx\,dy}\right) = -\left(\frac{dQ}{dy}\right);$$

und hieraus muß bloß die Größe R so bestimmt werden, daß die Gleichung

$$R - PQ - \left(\frac{dQ}{dy}\right) = 0 \quad \text{oder}$$

$$R = PQ + \left(\frac{dQ}{dy}\right)$$

Statt findet.

Zusatz 3.

§. 290. Weil hier für $\int Q\,dx$ auch $\int Q\,dx + Y$ geschrieben werden kann, wobey Y eine beliebige Function von y bezeichnet, und weil $V = -\int Q\,dx - Y$ ist, so wird sich folgende Gleichung vollständig integriren lassen:

$$\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) + P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(PQ + \left(\frac{dQ}{dy}\right)\right) z + S = 0;$$

das Integrale hiervon ist

$$z = e^{-\int Q\,dx - Y}\,v,$$

wobey

$$\left(\frac{d^2 v}{dx\,dy}\right) + \left(P - \int dx\left(\frac{dQ}{dy}\right) - \frac{dY}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right) + e^{-V} S = 0,$$

und hierbey ist

$$T = P - \int dx\left(\frac{dQ}{dy}\right) - \frac{dY}{dy},$$

und demnach

$$\int T\,dy = \int P\,dy - \int Q\,dx - Y.$$

Es läßt sich daher der Werth von v leicht bestimmen.

Anmerkung.

§. 291. Bey dieser Rechnung, in welcher die Differenzialien der Integralformeln genommen werden müssen, während eine andere Größe als veränderlich angesehen wird, die bey der Integration vorausgesetzt wird, hat man sich an die Regel zu halten, daß

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) = \int dx\left(\frac{dQ}{dy}\right).$$

seyn werde, wenn $V = \int Q\,dx$ ist. Denn da $\left(\frac{dV}{dx}\right) = Q$ ist, so wird $\left(\frac{d^2V}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dy}\right)$. Wird also $\left(\frac{dV}{dy}\right) = S$ gesetzt, so erhält man $\left(\frac{dS}{dx}\right) = \left(\frac{dQ}{dy}\right)$ und $S = \left(\frac{dV}{dy}\right) = \int dx \left(\frac{dQ}{dy}\right)$; hieraus folgert man umgekehrt, daß wenn $S = \int dx \left(\frac{dQ}{dy}\right)$ ist, wegen $\int S\,dy = V$ durch Integration $\int S\,dy = \int Q\,dx$ erhalten werde. Da dieß aus den früher festgesetzten Principien für sich einleuchtet, so halte ich es für überflüssig, für diese gleichsam neue Art von Rechnung, insbesondere Vorschriften vorzutragen. Wir wollen aber an einigen Beyspielen nachweisen, welche Gleichungen mit Hülfe dieser Methode vollständig aufgelöst werden können.

Beyspiel 1.

§. 292. Sey folgende Differenzialgleichung des zweyten Grades gegeben:

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + a\left(\frac{dz}{dx}\right) + b\left(\frac{dz}{dy}\right) + Rz + S = o;$$

man bestimme die Natur der Function R, so daß diese Gleichung die Auflösung zuläßt, wenn S eine beliebige Function von x und y bezeichnet.

Da $P = a$ und $Q = b$ ist, so wird $R = ab$ und $V = -bx$ seyn, denn die Function Y kann zuverläßig außer Acht gelassen werden, und weil bey der folgenden Integration schon zwey willkürliche Functionen eingeführt werden, so wird $T = a$ seyn. Wird daher $z = e^{-bx} v$ gesetzt, so wird man folgende Gleichung erhalten:

$$\left(\frac{d^2v}{dx\,dy}\right) + a\left(\frac{dv}{dx}\right) + e^{bx} S = o,$$

und für $\left(\frac{dv}{dx}\right) = u$ wird

$$\left(\frac{du}{dy}\right) + au + e^{bx} S = o,$$

und wenn x constant genommen wird:

$$e^{ay} u = -\int e^{ay+bx} S\,dy + f'(x),$$

also

$$u = \left(\frac{dv}{dx}\right) = -e^{-ay} \int e^{ay+bx} S\,dy + e^{-ay} f'(x);$$

tionen P und Q unbestimmt bleiben, und man wird dann erhalten:

$$V = -\int Q\,dx \quad \text{und} \quad \left(\frac{dV}{dy}\right) = -\int dx \left(\frac{dQ}{dy}\right) \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{d^2V}{dx\,dy}\right) = -\left(\frac{dQ}{dy}\right);$$

und hieraus muß bloß die Größe R so bestimmt werden, daß die Gleichung

$$R - PQ - \left(\frac{dQ}{dy}\right) = 0 \quad \text{oder}$$

$$R = PQ + \left(\frac{dQ}{dy}\right)$$

Statt findet.

Zusatz 3.

§. 290. Weil hier für $\int Q\,dx$ auch $\int Q\,dx + Y$ geschrieben werden kann, wobey Y eine beliebige Function von y bezeichnet, und weil $V = -\int Q\,dx - Y$ ist, so wird sich folgende Gleichung vollständig integriren lassen:

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(PQ + \left(\frac{dQ}{dy}\right)\right)z + S = 0;$$

das Integrale hiervon ist

$$z = e^{-\int Q\,dx - Y}v,$$

wobey

$$\left(\frac{d^2v}{dx\,dy}\right) + \left(P - \int dx\left(\frac{dQ}{dy}\right) - \frac{dY}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right) + e^{-V}S = 0,$$

und hierbey ist

$$T = P - \int dx\left(\frac{dQ}{dy}\right) - \frac{dY}{dy},$$

und demnach

$$\int T\,dy = \int P\,dy - \int Q\,dx - Y.$$

Es läßt sich daher der Werth von v leicht bestimmen.

Anmerkung.

§. 291. Bey dieser Rechnung, in welcher die Differenzialien der Integralformeln genommen werden müssen, während eine andere Größe als veränderlich angesehen wird, die bey der Integration vorausgesetzt wird, hat man sich an die Regel zu halten, daß

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) = \int dx\left(\frac{dQ}{dy}\right).$$

$$P = \left(\frac{d^2 V}{dx\,dy}\right)$$

)alten wird.

Zusatz 3.

§. 270. Wenn $P = 0$ ist, oder wenn $\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = 0$ seyn lte, so drückt die Gleichung

$$z = f(x) + F(y)$$

: Natur der Function z aus.

Anmerkung.

§. 271. Dieser Fall kömmt häufig in der Körperlehre vor, denn :nn die Natur einer Oberfläche durch eine Gleichung zwischen den ey Coordinaten x, y und u ausgedrückt wird, so ist der von dieser äche begränzte Raum $= \int dx \int u\,dy$; bezeichnet man daher den Körrraum durch z, so wird $\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = u$, nämlich gleich der auf die yden Coordinaten x und y senkrechten Ordinate.

Setzt man aber

$$du = p\,dx + q\,dy,$$

wird man die Oberfläche dieses Körpers

$$= \int dx \int dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

den, und wird diese Fläche durch z bezeichnet, so wird

$$\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

n. Wenn wir demnach in unserem Probleme eine solche Function on x und y suchen, daß die Gleichung $\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = P$ Statt det, so ist dieß eben so viel, als suchten wir den Körperraum, wel-r zu einer Fläche gehört, deren Natur durch eine Gleichung zwischen ı drey Coordinaten x, y und P ausgedrückt wird. Wir wollen also se Rechnung durch einige Beyspiele erläutern.

Beyspiel 1.

§. 272. Man suche eine solche Function z der beyn Veränderlichen x und y, daß $\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = \alpha x + \beta y$ rd.

nimmt man aber nun y als unveränderlich, so wird

$$v = -e^{-ay}\int dx \int e^{ay+bx} S\,dy + e^{-ay} f(x) + F(y),$$

indem man

$$\int dx\, f'(x) = f(x)$$

setzt. Schreibt man nun f(x) statt $e^{-bx} f(x)$, so wird man erhalten:

$$z = -e^{-ay-bx}\int dx \int e^{ay+bx} S\,dy + e^{-ay} f(x) + e^{-bx} F(y).$$

Zweyte Auflösung.

Hätten wir $V = -bx - ay$ gesetzt, so hätten wir $T = a - a = o$ gefunden, wird daher $z = e^{-bx-ay} v$ gesetzt, so müßte man aus der Gleichung

$$\left(\frac{d^2v}{dx\,dy}\right) + e^{bx+ay} S = o$$

die Größe v bestimmen, und man erhält:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = -\int e^{bx+ay} S\,dy + f'(x),$$

$$v = -\int dx \int e^{bx+ay} S\,dy + f(x) + F(y),$$

$$z = e^{-bx-ay}\left(-\int dx \int e^{bx+ay} S\,dy + f(x) + F(y)\right),$$

welche Formel einfacher ist als die vorhergehende, obgleich sie auf dasselbe hinausläuft, und sie bezeichnet das vollständige Integrale der Gleichung

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + a\left(\frac{dz}{dx}\right) + b\left(\frac{dz}{dy}\right) + abz + S = o.$$

Beyspiel 2.

§. 293. Sey gegeben folgende Differenzialgleichung des zweyten Grades:

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + \frac{a}{y}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{b}{x}\left(\frac{dz}{dy}\right) + Rz + S = o;$$

man bestimme die Natur der Function R, so daß diese Gleichung die Auflösung zuläßt, wenn S eine beliebige Function von x und y bezeichnet.

Da $P = \frac{a}{y}$ und $Q = \frac{b}{x}$ ist, so wird $V = -blx - Y$, also $R = \frac{ab}{xy}$, und die integrable Gleichung wird seyn:

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + \frac{a}{y}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{b}{x}\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{ab}{xy}z + S = o.$$

Weil $\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin.\varphi$ ist, so wird

$$\frac{yx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) \cos.\varphi.$$

Es ist aber

$$\cos.\varphi = \frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \text{ daher}$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \frac{yx}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \text{ und}$$

$$\int x\,dx \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = y\int \frac{x^2\,dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

aber dieses Integrale gefunden, so wird man erhalten:

$$= ax \text{ arc. sin.} \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} - ay\int \frac{x^2\,dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + f(x) + F(y),$$

d dieser Ausdruck läßt sich, wenn die Integration ausgeführt ist, f folgende Form zurückführen:

$$= ax \text{ arc. sin.} \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} + ay \text{ arc. sin.} \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}} -$$

$$- a^2 \text{ arc. sin.} \frac{xy}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - y^2)}} + f(x) + F(y).$$

Das Integrale $\int \frac{a^2\,dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ läßt sich auf folgende : sehr leicht entwickeln.

Man setze $\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = p$, so wird $x^2 = \frac{p^2(a^2 - y^2)}{1 + p^2}$, durch Differenziation mittelst Logarithmen, weil y unveränder- ist:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{p} - \frac{p\,dp}{1 + p^2} = \frac{dp}{p(1 + p^2)},$$

n aber durch Multiplication mit jenem Ausdrucke

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \frac{dp}{1 + p^2}.$$

Ferner ist

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2 + p^2 y^2}{1 + p^2},$$

und daher finden wir den Integralausdruck

$$\int \frac{a^2 dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \int \frac{a^2 dp}{a^4 + p^2 y^2} = \frac{a^2}{y^2} \int \frac{dp}{\frac{a^2}{y^2} + p^2}$$

$$= \frac{a}{y} \text{ arc. tang. } \frac{py}{a} = \frac{a}{y} \text{ arc. tang. } \frac{xy}{a\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$= \frac{a}{y} \text{ arc. sin. } \frac{xy}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - y^2)}}.$$

Aufgabe 45.

§. 275. Wenn z eine solche Function der beyden Veränderlichen x und y seyn soll, daß

$$\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q$$

wird, wobey P und Q beliebige Functionen von x und y bezeichnen; so ist die Natur der Function z zu bestimmen.

Auflösung.

Man setze $\left(\frac{dz}{dx}\right) = v$, damit die Gleichung

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = Pv + Q$$

Statt finde, welche die Größen x, y und v enthält. Wird also x constant genommen, so findet man

$$dv = Pv\,dy + Q\,dy,$$

und diese Gleichung gibt, wenn sie mit $e^{-\int P dy}$ multiplicirt wird:

$$e^{-\int P dy} v = \int e^{-\int P dy} Q\,dy + f'(x),$$

und daher ist

$$v = \left(\frac{dz}{dx}\right) = e^{\int P dy} \int e^{-\int P dy} Q\,dy + e^{\int P dy} f'(x).$$

Da nun diese Integralien bestimmt die Größen x und y enthalten, so betrachte man y als constant, und die folgende Integration gibt:

$$z = \int e^{-\int P dy} dx \int e^{-\int P dy} Q\,dy + \int e^{\int P dy} dx\, f'(x) + F(y),$$

welche Integralien, für jeden Fall entwickelt, bekannt sind.

Zusatz 1.

§. 276. Um dieses Problem also aufzulösen, suche man zuerst durch Integration die Größe R, damit $\int P d y = l R$ werde; ferner suche man S, so daß $\int \frac{Q d y}{R} = S$ wird. Endlich sey $\int R S d x = T$, so daß in den ersten Ausdrücken bloß die Größe y, hier aber x allein als veränderlich angesehen wird. Ist dieß geschehen, so erhält man als vollständiges Integrale

$$z = T + \int R d x f' (x) + F (y).$$

Zusatz 2.

§. 277. Hier erscheint also in dem Integralausdruck die willkürliche Function $f' (x)$, und wenn man diese durch die der Abscisse x entsprechende Ordinate irgend einer Curve darstellt, so wird man das Integrale $\int R d x f' (x)$ für jeden Werth von y construiren können, wenn man bey dieser Integration die Größe y als constant betrachtet.

Anmerkung.

§. 278. Ganz auf dieselbe Weise löst man durch Vertauschung der Veränderlichen x nnd y die Aufgabe, bey welcher eine solche Function z gesucht wird, daß die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d x d y}\right) = P \left(\frac{d z}{d y}\right) + Q$$

Statt findet, wenn nur P und Q bloß Functionen von x und y sind, welche also die Function z nicht enthalten. Es wird sich nämlich die Auflösung auf folgende Art darstellen:

$$z = \int e^{\int P d x} d y \int e^{-\int P d x} Q d x + \int e^{\int P d x} d y f (y) + F (x).$$

Ja man kann beyde Probleme noch weiter ausdehnen, und das erstere wird die Auflösung gestatten, wenn der Ausdruck $\left(\frac{d^2 z}{d x d y}\right)$ irgend einer Function der drey Größen x, y und $\left(\frac{d z}{d x}\right)$, das letztere aber, wenn die Formel $\left(\frac{d^2 z}{d x d y}\right)$ irgend einer Function der drey Größen x, y und $\left(\frac{d z}{d y}\right)$ gleich ist; in beyden Fällen wird nämlich die Rechnung auf eine Differenzialgleichung des ersten Grades zurückgeführt. Diese Auflösungsmethode aber ist nicht zureichend, wenn die beyden

Formeln des ersten Grades $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ zugleich vorkommen, oder wenn die Functionen P und Q auch die Größe z enthalten.

Beyspiel 1.

§. 279. Man suche eine solche Function z der zwey Veränderlichen x und y, daß $\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = \frac{n}{y}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{m}{x}$ wird.

Sey $\left(\frac{dz}{dx}\right) = v$, so erhält man

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \frac{nv}{y} + \frac{m}{x},$$

und wird x als constant betrachtet, so findet man

$$dv = \frac{nv\,dy}{y} + \frac{m\,dy}{x},$$

und dividirt man durch y^n, so ergibt sich

$$\frac{v}{y^n} = \frac{m}{x}\int\frac{dy}{y^n} = \frac{-m}{(n-1)\,x\,y^{n-1}} + f'(x),$$

so daß also

$$v = \left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{-my}{(n-1)\,x} + y^n f'(x)$$

wird. Nun betrachte man y als unveränderlich, und integrire von neuem, so ergibt sich

$$z = \frac{-m}{n-1}\,y\,l\,x + y^n f(x) + F(y).$$

Beyspiel 2.

§. 280. Man suche eine solche Function z der zwey Veränderlichen x und y, daß

$$\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = \frac{y}{x^2+y^2}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{a}{x^2+y^2}$$

wird.

Wird $\left(\frac{dz}{dx}\right) = v$ gesetzt und x constant genommen, so wird man erhalten:

$$dv = \frac{vy\,dy}{x^2+y^2} + \frac{a\,dy}{x^2+y^2},$$

und dividirt man diese Gleichung durch $\sqrt{x^2+y^2}$, so findet man:

$$\frac{v}{\sqrt{x^2+y^2}} = a\int\frac{dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ay}{x^2\sqrt{x^2+y^2}} + f(x);$$

also ist

$$v = \left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{ay}{x^2} + \sqrt{x^2+y^2}\, f(x).$$

Sey nun y constant, so wird die Gleichung zum Vorschein kommen:

$$z = \frac{-ay}{x} + \int f(x)\, dx \sqrt{x^2+y^2} + F(y),$$

wo zwar das Integrale

$$\int f(x)\, dx \sqrt{x^2+y^2}$$

wegen der unbestimmten Function $f(x)$, obgleich y constant gesetzt wird, im Allgemeinen nicht so ausgedrückt werden kann, daß es durch y und Functionen von x in entwickelter Form dargestellt werden könnte.

Anmerkung.

§. 281. Die Formel des zweyten Grades $\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)$ gestattet also keine so große Anzahl auflösbarer Fälle, als die beyden übrigen $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ und $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$, weil bey diesen die Auflösung gelingt, obgleich auch die Größe z auf ihre Bestimmung influirt, was aber hier der Fall nicht ist, indem man keine Methode kennt, eine Gleichung von der Form

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q$$

aufzulösen, wenn die Größen P und Q die Function z enthalten. Auch findet dann keine Auflösung Statt, wenn nebst der Formel des ersten Grades $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ auch zugleich die andere vorhanden ist. Indessen gibt es doch Fälle, in welchen sich particuläre Auflösungen angeben lassen, und zwar unendlich viele, welche zusammengenommen der allgemeinen Auflösung gleich geltend zu seyn scheinen, obgleich sie in der Anwendung auf practische Fälle gewöhnlich wenig nützen; dennoch wird es gut seyn, die Formen solcher Auflösungen anzuführen.

Aufgabe 46.

§. 282. Wenn z eine solche Function der beyden Veränderlichen x und y seyn soll, daß $\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = az$

$$dz = dx \left(\frac{dz}{dx}\right) + dy \left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right)(dx \mp a\,dy),$$

und hieraus geht hervor, daß $z = f(x + ay)$ seyn werde, und weil a zweydeutig ist, so erschließt man die oben gefundene Auflösung, weil die beyden Werthe, welche einzeln Genüge leisten, auch in Verbindung mit einander genügen werden. Man kann die Rechnung auch auf folgende Art durchführen. Man setze

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = a^2 \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2 v}{dx\,dy}\right),$$

so wird man erhalten:

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right) \quad \text{und} \quad a^2 \left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dv}{dy}\right).$$

Hat man nun die Ausdrücke des ersten Grades $\left(\frac{dv}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dv}{dy}\right)$ gefunden, so wird man, weil

$$dv = dx \left(\frac{dv}{dx}\right) + dy \left(\frac{dv}{dy}\right)$$

ist, folgende Gleichungen erhalten:

$$dz = dx \left(\frac{dz}{dx}\right) + dy \left(\frac{dz}{dy}\right) \quad \text{und}$$

$$dv = dx \left(\frac{dz}{dy}\right) + a^2 dy \left(\frac{dz}{dx}\right),$$

durch deren Verbindung wir finden:

$$dv + a\,dz = (dx + a\,dy) \left[\left(\frac{dz}{dy}\right) + a \left(\frac{dz}{dx}\right)\right],$$

und daher

$$v + az = f(x + ay) \quad \text{und} \quad v - az = F(x - ay),$$

und so erhält z dieselbe Form. Allein die Methode, welche ich bey der Auflösung befolgte, scheint der Natur der Sache angemessen zu seyn, da sie auch bey andern verwickelteren Aufgaben ausgezeichnete Dienste leistet.

Anmerkung 3.

§. 301. Unsere Auflösung aber hat das Unbequeme, daß sie für die Gleichung $\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) + a^2 \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = 0$ auf einen imaginären Ausdruck führt, sie gibt nämlich:

$$z = f(x + ay\sqrt{-1}) + F(x - ay\sqrt{-1}).$$

So oft aber die Functionen F, f und F′ an das Gesetz der Stätigkeit gebunden sind, wie sie auch sonst beschaffen seyn mögen, so lassen sich die Werthe derselben immer auf die Form $P \pm Q\sqrt{-1}$ zurückführen, und daher wird folgende Formel, welche aus jener leicht abgeleitet werden kann, immer einen reellen Werth haben; nämlich:

$$z = \tfrac{1}{2} f(x + ay\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2} f(x - ay\sqrt{-1})$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{-1}} F(x + ay\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}} F(x - ay\sqrt{-1});$$

führt man die Reduction dieses Ausdrucks auf eine reelle Form, so wird es gut seyn, zu bemerken, daß wenn

$$x = s\cos.\varphi \quad \text{und} \quad ay = s\sin.\varphi$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$(x \pm ay\sqrt{-1})^n = s^n(\cos.n\varphi \pm \sqrt{-1}\sin.n\varphi)$$

Statt finde. So oft daher die vorgelegten Functionen durch analytische Operationen entstanden, das heißt, so oft sie stätig sind, so können ihre Werthe durch Cosinusse und Sinusse der Vielfachen des Winkels φ in reeller Form dargestellt werden; wenn aber jene Functionen discontinuirlich sind, so findet eine solche Reduction keineswegs Statt, obgleich man auch gewiß weiß, daß dann auch die angeführte Form einen reellen Werth erhalten werde. Wer aber wird sich bey irgend einer mit freyer Hand beschriebenen Curve die den Abscissen

$$x + ay\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad x - ay\sqrt{-1}$$

entsprechenden Ordinaten auch nur im Geiste vorstellen, und die reelle Summe derselben angeben können, oder die Differenz derselben, welche durch Division mit $\sqrt{-1}$ auch reell seyn wird? Es zeigt sich also hier eine große Mangelhaftigkeit der Rechnung, der man noch auf keine Weise begegnen kann; und wegen dieses Gebrechens verlieren derley allgemeine Auflösungen sehr viel von ihrem Nutzen.

Aufgabe 49.

§. 302. Wenn die Gleichung $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = P^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ gegeben ist, so untersuche man, was für Functionen von x und y für P genommen werden können, damit die Integration mit Hülfe der Reduction gelingt.

Auflösung.

Ich nehme an, daß die Reduction dadurch bewerkstelligt werde, daß man für x und y zwey andere Veränderliche t und u einführe. Wird diese Substitution nach §. 231 im Allgemeinen gemacht, so kommt folgende Gleichung zum Vorschein:

$$\left.\begin{aligned} &+\left(\frac{d^2 t}{d y^2}\right)\left(\frac{d z}{d t}\right)+\left(\frac{d^2 u}{d y^2}\right)\left(\frac{d z}{d u}\right)+\left(\frac{d t}{d y}\right)^2\left(\frac{d^2 z}{d t^2}\right) \\ &\qquad +2\left(\frac{d t}{d y}\right)\left(\frac{d u}{d y}\right)\left(\frac{d^2 z}{d t\, d u}\right)+\left(\frac{d u}{d y}\right)^2\left(\frac{d^2 z}{d u^2}\right) \\ &-P^2\left(\frac{d^2 t}{d x^2}\right)-P^2\left(\frac{d^2 u}{d x^2}\right)-P^2\left(\frac{d t}{d x}\right)^2 \\ &\qquad -2P^2\left(\frac{d t}{d x}\right)\left(\frac{d u}{d x}\right)-P^2\left(\frac{d u}{d x}\right)^2 \end{aligned}\right\} = 0.$$

Nun setze man zwischen den beyden Veränderlichen t, u und den vorhergehenden x, y finde eine solche Relation Statt, daß die beyden Ausdrücke $\left(\frac{d^2 z}{d t^2}\right)$ und $\left(\frac{d^2 z}{d u^2}\right)$ aus der Rechnung verschwinden, welches geschehen wird, wenn man

$$\left(\frac{d t}{d y}\right)+P\left(\frac{d t}{d x}\right)=0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{d u}{d y}\right)-P\left(\frac{d u}{d x}\right)=0$$

setzt. Dann aber wird man erhalten:

$$\left(\frac{d^2 t}{d y^2}\right)=-P\left(\frac{d^2 t}{d x\, d y}\right)-\left(\frac{d P}{d y}\right)\left(\frac{d t}{d x}\right),$$

und da eben so

$$\left(\frac{d^2 t}{d x\, d y}\right)=-P\left(\frac{d^2 t}{d x^2}\right)-\left(\frac{d P}{d x}\right)\left(\frac{d t}{d x}\right)$$

ist, so wird

$$\left(\frac{d^2 t}{d y^2}\right)=P^2\left(\frac{d^2 t}{d x^2}\right)+P\left(\frac{d P}{d x}\right)\left(\frac{d t}{d x}\right)-\left(\frac{d P}{d y}\right)\left(\frac{d t}{d x}\right)$$

seyn, und auf ähnliche Art, wenn P negativ genommen wird:

$$\left(\frac{d^2 u}{d y^2}\right)=P^2\left(\frac{d^2 u}{d x^2}\right)+P\left(\frac{d P}{d x}\right)\left(\frac{d u}{d x}\right)+\left(\frac{d P}{d y}\right)\left(\frac{d u}{d x}\right).$$

Werden nun diese Werthe substituirt, so erhält unsere Gleichung folgende Form:

$$\begin{aligned} &\left[P\left(\frac{dP}{dx}\right)-\left(\frac{dP}{dy}\right)\right]\left(\frac{d t}{d x}\right)\left(\frac{d z}{d t}\right)+\left[P\left(\frac{dP}{dx}\right)+\left(\frac{dP}{dy}\right)\right]\left(\frac{d u}{d x}\right)\left(\frac{d z}{d u}\right) \\ &\qquad -4P^2\left(\frac{d t}{d x}\right)\left(\frac{d u}{d x}\right)\left(\frac{d^2 z}{d t\, d u}\right)=0. \end{aligned}$$

Da diese Gleichung den einzigen Ausdruck des zweyten Grades $\left(\frac{d^2 z}{d t d u}\right)$ enthält, so gestattet sie die Integration, wenn entweder $\left(\frac{d z}{d t}\right)$ oder $\left(\frac{d z}{d u}\right)$ aus der Rechnung verschwunden ist. Setzen wir überdieß

$$P\left(\frac{dP}{dx}\right) - \left(\frac{dP}{dy}\right) = o,$$

durch welche Gleichung die Natur der gesuchten Function P bestimmt wird; darauf wird die Gleichung, die man zu integriren hat, wenn sie durch $\left(\frac{du}{dx}\right)$ dividirt worden ist, seyn:

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{dz}{du}\right) - 2P\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{d^2 z}{dt du}\right) = o,$$

und das Integrale hiervon ist, wenn $\left(\frac{dz}{du}\right) = v$ gesetzt wird:

$$2\,l.v = \int \frac{dt\left(\frac{dP}{dx}\right)}{P\left(\frac{dt}{dx}\right)} = 2\,l\left(\frac{dz}{du}\right);$$

allein man muß früher die Function P durch x und y bestimmen.

Da $\left(\frac{dP}{dy}\right) = P\left(\frac{dP}{dx}\right)$ ist, so wird

$$dP = dx\left(\frac{dP}{dx}\right) + P dy\left(\frac{dP}{dx}\right),$$

und daher erhält man, wenn $\left(\frac{dP}{dx}\right) = p$ Kürze halber gesetzt wird:

$$dx = \frac{dP}{p} - P dy \quad \text{und}$$

$$x = - Py + \int dP\left(y + \frac{1}{p}\right).$$

Man setze also $y + \frac{1}{p} = f'(P)$, so findet man

$$x + Py = f(P); \quad p = \left(\frac{dP}{dx}\right) = \frac{1}{f'(P) - y} \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \frac{P}{f'(P) - y};$$

und hieraus ergibt sich die Relation für die Bestimmung der Größe P durch x und y. Für die neuen Veränderlichen t und u aber wird man wegen $\left(\frac{dt}{dy}\right) = - P\left(\frac{dt}{dx}\right)$ erhalten:

$$dt = \left(\frac{dt}{dx}\right)(dx - Pdy) \quad \text{und wegen} \quad x = -Py + f(P)$$

wird

$$dt = \left(\frac{dt}{dx}\right)(dPf'(P) - 2Pdy - ydP)$$

$$= P^{\frac{1}{2}}\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{dP}{\sqrt{P}}f'(P) - 2dy\sqrt{P} - \frac{ydP}{\sqrt{P}}\right),$$

und da das Integrale des letzteren Ausdruckes

$$\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - 2y\sqrt{P}$$

ist, so wird man erhalten:

$$t = F\left(\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - 2y\sqrt{P}\right);$$

ferner hat man, weil $\left(\frac{du}{dy}\right) = P\left(\frac{du}{dx}\right)$ ist:

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right)(dx + Pdy) = \left(\frac{du}{dx}\right)(dPf'(P) - ydP),$$

und daher

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right)(f'(P) - y)\, dP;$$

also wird u einer Function von P gleich seyn. Bey dieser Rechnung kann man aber was immer für Functionen nehmen, weil erst bey der nachfolgenden Integration die allgemeine Auflösung erhalten wird. Setzen wir demnach

$$t = \int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - 2y\sqrt{P} \quad \text{und} \quad u = P, \quad \text{wobey}$$

$$x + Py = f(P)$$

ist. Um endlich das Integrale selbst zu finden, ist, weil

$$2\, l\left(\frac{dz}{du}\right) = \int \frac{dt\left(\frac{dP}{dx}\right)}{P\left(\frac{dt}{dx}\right)},$$

bey welcher Integration u oder P constant genommen wird, dem Vorhergehenden gemäß

$$\frac{dt}{\left(\frac{dt}{dx}\right)} = dPf'(P) - 2Pdy - ydP = -2Pdy,$$

weil P constant und $\left(\frac{dP}{dx}\right) = \frac{1}{f'(P) - y}$ ist, und daher wird

$$2\,l\left(\frac{dz}{dP}\right) = \int \frac{-2\,dy}{f'(P) - y} = 2\,l\,(f'(P) - y) + 2\,l\,F(P),$$

oder

$$\left(\frac{dz}{dP}\right) = (f'(P) - y)\,F(P),$$

und daher ferner

$$z = \int dP\,(f'(P) - y)\,F(P),$$

indem man hier t constant nimmt. Da also

$$y = +\frac{1}{2\sqrt{P}}\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - \frac{t}{2\sqrt{P}},$$

und daher

$$f'(P) - y = f'(P) - \frac{1}{2\sqrt{P}}\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) + \frac{t}{2\sqrt{P}}$$

ist, so erhält man

$$z = \int dP \left(f'(P) - \frac{1}{2\sqrt{P}}\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P)\right) F(P) +$$
$$+ \left(\tfrac{1}{2}\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - y\sqrt{P}\right)\int \frac{dP}{\sqrt{P}} F(P)$$
$$+ \Phi\left(\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - 2y\sqrt{P}\right),$$

welcher Ausdruck zwey willkürliche Functionen F und Φ enthält.

Zusatz 1.

§. 303. Das erste Glied dieses Ausdruckes läßt sich auf folgende Art umformen:

$$\int \frac{dP}{\sqrt{P}} \left(\sqrt{P}\,f'(P) - \tfrac{1}{2}\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P)\right) F(P),$$

allein es ist

$$\sqrt{P}\,f'(P) - \tfrac{1}{2}\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) = \int dP \sqrt{P}\,f''(P),$$

und daher wird das erste Glied seyn:

$$\int \frac{dP}{\sqrt{P}} F(P) \int dP \sqrt{P}\,f''(P).$$

Zusatz 2.

§. 304. Da aber dieses erste Glied eine unbestimmte Function von P ist, so wird man, wenn dieselbe durch $\Pi(P)$ angedeutet wird, erhalten:

$$\frac{dP}{\sqrt{P}} F(P) = \frac{dP\,\Pi'(P)}{\int dP \sqrt{P}\,f''(P)},$$

und daher ergibt sich folgender Integralausdruck:

$$z = \Pi(P) + \Phi\left(\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - 2y\sqrt{P}\right)$$
$$+ \left(\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - 2y\sqrt{P}\right) \int \frac{dP\, \Pi'(P)}{2\int dP \sqrt{P} f''(P)}.$$

Zusatz 3.

§. 305. Eine mehr particuläre Auflösung wird erhalten, wenn man $\Pi(P) = 0$ setzt, und daher wird z irgend einer Function der Größe $\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - 2y\sqrt{P}$ gleich werden, welche man sich durch x und y ausgedrückt denken muß, weil $x + Py = f(P)$ ist.

Anmerkung.

§. 306. Obgleich ich mich hier derselben Methode, wie bey dem vorhergehenden Probleme, bedient habe, so ist dennoch, der Fall der vorhergehenden Aufgabe, in welchem $P = a$ wär, in dieser Auflösung nicht enthalten, was wunderbar zu seyn scheint. Der Grund dieses Paradoxons liegt in der Auflösung der Gleichung $\left(\frac{dP}{dy}\right) = P\left(\frac{dP}{dx}\right)$, welcher offenbar der Werth $P = a$ Genüge leistet, obgleich er in der daraus abgeleiteten Gleichung $x + Py = f(P)$ nicht enthalten ist. Es ereignet sich nämlich hier etwas Ähnliches, was wir schon früher bemerkt haben, daß nämlich oft irgend ein Werth einer Differenzialgleichung Genüge leisten könne, welcher in dem Integrale nicht enthalten ist; so z. B. sehen wir, daß der Werth $x = a$ der Gleichung $dy\sqrt{a - x} = dx$ Genüge leiste, und dennoch ist derselbe in dem Integrale $y = C - 2\sqrt{a - x}$ nicht mit begriffen. Es erfordert daher auch in unserem Falle der Werth $P = a$ eine eigenthümliche Entwickelung, die in dem ersteren Probleme rücksichtlich der übrigen durchgeführt wurde, wo für $f(P)$ irgend eine bestimmte Function von P angenommen wird. Wir wollen nun einige Beyspiele entwickeln.

Beyspiel 1.

§. 307. Sey $f(P) = 0$, so daß $P = -\frac{x}{y}$ wird; man suche das vollständige Integrale der Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \frac{x^2}{y^2}\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right).$$

Da $f'(P) = 0$ ist, so gibt die gefundene Auflösung, weil

$$\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) = C \text{ ist:}$$

$$= \frac{-C}{2} \int \frac{dP}{\sqrt{P}} F(P) + (\tfrac{1}{2}C - y\sqrt{P}) \int \frac{dP}{\sqrt{P}} F(P) + \Phi(C - 2y\sqrt{P}).$$

Man setze $\int \frac{dP}{\sqrt{P}} F(P) = \Pi(P)$, so wird man erhalten:

$$z = -y\sqrt{P} \cdot \Pi(P) + \Phi(y\sqrt{P}).$$

Man setze für P wieder den Werth $-\frac{x}{y}$, so findet man, indem gen $y\sqrt{P} = \sqrt{-xy}$ die imaginäre Größe $\sqrt{-1}$ in die Functio- n gebracht wird:

$$z = \sqrt{xy}\, \Pi\left(\frac{x}{y}\right) + \Phi(\sqrt{xy}),$$

lche Formel leicht in folgende umgestaltet wird:

$$z = x\Gamma\left(\frac{x}{y}\right) + \Theta(xy),$$

$x\Gamma\left(\frac{x}{y}\right)$ irgend eine homogene Function einer Dimension von x d y bezeichnet. Zur Auflösung aber wird man gelangen, indem n statt x und y die neuen Veränderlichen t und u einführt, so daß $= C - 2\sqrt{-xy}$ und $u = -\frac{x}{y}$, oder auch noch einfacher $t = 2\sqrt{xy}$ d $u = \frac{x}{y}$ wird, und daher findet man:

$$\left(\frac{dt}{dx}\right) = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}; \left(\frac{dt}{dy}\right) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}; \left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) = \frac{-\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}}; \left(\frac{d^2t}{dy^2}\right) = \frac{-\sqrt{x}}{2y\sqrt{y}};$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{1}{y}; \left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{-x}{y^2}; \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = 0; \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = \frac{2x}{y^3};$$

d weil $P^2 = \frac{x^2}{y^2}$ ist, nimmt die vorgelegte Gleichung folgende rm an:

$$0 \cdot \left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{2x}{y^3}\left(\frac{dz}{du}\right) - \frac{4x\sqrt{x}}{y^2\sqrt{y}}\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) = 0.$$

Da nun

$$t^2 u = 4x^2 \text{ und } x = \tfrac{1}{2}t\sqrt{u} \text{ endlich } y = \frac{t}{2\sqrt{u}}$$

so werden wir erhalten:

$$\frac{u^2}{t}\left(\frac{dz}{du}\right) - \frac{8u^2}{t}\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) = 0 \text{ oder } \left(\frac{dz}{du}\right) = t\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right).$$

Sey nun $\left(\frac{dz}{du}\right) = v$, so daß $v = t\left(\frac{dv}{dt}\right)$, und, wenn u constant genommen wird, $\frac{dt}{t} = \frac{dv}{v}$, also $v = \left(\frac{dz}{du}\right) = tf'(u)$.

Sey jetzt t constant, so wird man

$$z = tf(u) + F(t) = 2\sqrt{xy}\, f\left(\frac{x}{y}\right) + F(\sqrt{xy})$$

finden, wie früher.

Zusatz.

§. 308. Wie aber der gefundene Ausdruck

$$z = x\Gamma\left(\frac{x}{y}\right) + \Theta(xy)$$

Genüge leistet, wird man einsehen, wenn die Differenzialien richtig genommen werden:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \Gamma\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\Gamma'\left(\frac{x}{y}\right) + y\Theta'(xy);$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{-x^2}{y^2}\Gamma'\left(\frac{x}{y}\right) + x\Theta'(xy);$$

und daher wird ferner

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{2}{y}\Gamma'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y^2}\Gamma''\left(\frac{x}{y}\right) + y^2\Theta''(xy) \text{ und}$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \frac{2x^2}{y^3}\Gamma'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^3}{y^4}\Gamma''\left(\frac{x}{y}\right) + x^2\Theta''(xy).$$

Beyspiel 2.

§. 309. Sey $f(P) = \frac{P^2}{2a}$, so daß

$$P^2 = 2aPy + 2ax \quad \text{und} \quad P = ay + \sqrt{a^2y^2 + 2ax}$$

ist, man bestimme das vollständige Integrale der Gleichung

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = (2a^2y^2 + 2ax + 2ay\sqrt{a^2y^2 + 2ax})\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right).$$

Da $f(P) = \frac{P^2}{2a}$ ist, so wird man finden:

$$f'(P) = \frac{P}{a} \quad \text{und} \quad \int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) = \int \frac{1}{a}\, dP\sqrt{P} = \frac{2}{3a}P\sqrt{P},$$

und daher geht der oben gefundene allgemeine Ausdruck über in

$$z = \int dP \cdot \frac{2P}{3a} F(P) + \left(\frac{P\sqrt{P}}{3a} - y\sqrt{P}\right) \int \frac{dP}{\sqrt{P}} F(P)$$
$$+ \Phi\left(\frac{2}{3a} P\sqrt{P} - 2y\sqrt{P}\right);$$

man setze

$$\int \frac{dP}{\sqrt{P}} F(P) = \Pi(P), \text{ so wird}$$
$$dP \cdot F(P) = dP \cdot \sqrt{P}\, \Pi'(P),$$

und

$$z = \frac{2}{3a} \int P^{\frac{3}{2}} dP\, \Pi'(P) + \left(\frac{P\sqrt{P}}{3a} - y\sqrt{P}\right) \Pi(P)$$
$$+ \Phi\left(\frac{P\sqrt{P}}{3a} - y\sqrt{P}\right);$$

es ist aber hierbey

$$\frac{P}{3a} - y = \frac{-2}{3} y + \frac{1}{3}\sqrt{y^2 + \frac{2x}{a}}.$$

Die Entwickelung dieser Formeln leitet auf zu verwickelte Ausdrücke; allein die zum Ziele führenden Substitutionen sind:

$$t = \frac{2}{3a} P\sqrt{P} - 2y\sqrt{P} \quad \text{und} \quad u = P.$$

Zusatz.

§. 310. Um eine mehr eingeschränkte Auflösung zu erhalten, setze man:

$$\Pi(P) = P^{n - \frac{1}{2}}, \text{ so wird}$$
$$\Pi'(P) = (n - \tfrac{1}{2}) P^{n - \frac{3}{2}},$$

und hieraus folgern wir

$$z = \frac{n}{(n+1)a} P^{n+1} - P^n y + \Phi\left(\frac{P\sqrt{P}}{3a} - y\sqrt{P}\right).$$

Sey $n = 1$ und die Function Φ verschwinde, so wird

$$z = \frac{1}{2a} P^2 - Py = x,$$

und für den Fall, wo $n = 2$ ist, findet man:

$$z = \frac{2}{3a} P^3 - P^2 y = \tfrac{2}{3} axy + \tfrac{4}{3} P(2x + ay^2), \text{ oder}$$
$$z = a^2 y^3 + 3axy + (ay^2 + 2x)\sqrt{a^2 y^2 + 2ax}.$$

Anmerkung.

§. 311. Der gefundene Integralausdruck läßt sich auf folgende

Weise einfacher darstellen. Man setze

$$\int \frac{dP}{\sqrt{P}} F(P) = \Pi(P), \text{ so wird}$$

$$F(P) = \sqrt{P}\,\Pi'(P),$$

und man findet durch Weglassung des letzten Gliedes

$$\Phi\left(\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - 2y\sqrt{P}\right)$$

welches keiner Reduction bedarf; die Gleichung

$$z = \int dP\left(\sqrt{P} f'(P) - \tfrac{1}{2}\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P)\right)\Pi'(P)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\Pi(P)\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - y\sqrt{P}\,\Pi(P),$$

aber

$$\tfrac{1}{2}\Pi(P)\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) = \int\left(\tfrac{1}{2} dP\,\Pi'(P)\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) + \tfrac{1}{2}\frac{dP}{\sqrt{P}}\Pi(P) f'(P)\right)$$

woraus man erhält:

$$z = \int \Pi'(P)\, dP\sqrt{P} f'(P) + \tfrac{1}{2}\int \Pi(P)\frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - y\sqrt{P}\,\Pi(P).$$

Es ist ferner

$$\int dP\,\Pi'(P)\sqrt{P} f'(P) = \Pi(P)\sqrt{P} f'(P) -$$
$$- \int \Pi(P)\left(\frac{dP}{2\sqrt{P}} f'(P) + dP\sqrt{P} f''(P)\right),$$

also

$$z = \Pi(P)\sqrt{P} f'(P) - \int dP\,\Pi(P)\sqrt{P} f''(P) - y\sqrt{\Pi}(P);$$

man setze ferner

$$\int dP\,\Pi(P)\sqrt{P} f''(P) = \Theta(P),$$

so wird

$$\Pi(P) = \frac{\Theta'(P)}{\sqrt{P} f''(P)} \text{ und}$$

$$z = \frac{\Theta'(P)}{f''(P)}\left(f'(P) - y\right) - \Theta(P) + \Phi\left(\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - 2y\sqrt{P}\right),$$

welche Formel ohne Zweifel weit einfacher ist, als die Anfangs gefundene.

Aufgabe 50.

§. 312. Sey gegeben die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) - P^2\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + Q\left(\frac{dz}{dy}\right) + R\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

man suche rücksichtlich der Größen P, Q, R jene Fälle

auf, in welchen die Integration mit Hülfe der vorher gebrauchten Reduction gelingt.

Auflösung.

Werden die beyden neuen Veränderlichen t und u eingeführt, so werden wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
0 = & \left(\frac{d^2 t}{dy^2}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right)\left(\frac{dz}{du}\right) + \left(\frac{dt}{dy}\right)^2\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) \\
& + 2\left(\frac{dt}{dy}\right)\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{d^2 z}{dt\,du}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)^2\left(\frac{d^2 z}{du^2}\right) \\
& - P^2\left(\frac{d^2 t}{dx^2}\right) - P^2\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right) - P^2\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - 2P^2\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) - P^2\left(\frac{du}{dx}\right)^2 \\
& + Q\left(\frac{dt}{dy}\right) + Q\left(\frac{du}{dy}\right) \\
& + R\left(\frac{dt}{dx}\right) + R\left(\frac{du}{dx}\right).
\end{aligned}
$$

Setzen wir also wie früher

$$\left(\frac{dt}{dy}\right) = P\left(\frac{dt}{dx}\right) \text{ und } \left(\frac{du}{dy}\right) = -P\left(\frac{du}{dx}\right),$$

so wird

$$\left(\frac{d^2 t}{dx\,dy}\right) = P\left(\frac{d^2 t}{dx^2}\right) + \left(\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right) \text{ und}$$

$$\left(\frac{d^2 t}{dy^2}\right) = P^2\left(\frac{d^2 t}{dx^2}\right) + P\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right) + \left(\frac{dP}{dy}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right),$$

endlich

$$\left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right) = P^2\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right) + P\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) - \left(\frac{dP}{dy}\right)\left(\frac{du}{dx}\right),$$

und die aufzulösende Gleichung wird seyn:

$$
\begin{aligned}
0 = & \left[P\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dP}{dy}\right) + PQ + R\right]\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right) - \\
& - 4P^2\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2 z}{dt\,du}\right) + \\
& + \left[P\left(\frac{dP}{dx}\right) - \left(\frac{dP}{dy}\right) - PQ + R\right]\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dz}{du}\right).
\end{aligned}
$$

Es leuchtet nun ein, daß man die Integration vornehmen könne, wenn eine der beyden Formeln $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ oder $\left(\frac{dz}{du}\right)$ aus der Rechnung verschwindet. Setzen wir also, es sey

$$P\left(\frac{dP}{dx}\right)-\left(\frac{dP}{dy}\right)-PQ+R=0, \text{ oder}$$

$$R=PQ+\left(\frac{dP}{dy}\right)-P\left(\frac{dP}{dx}\right),$$

so wird die hieraus hervorgehende Gleichung, wenn sie durch $\left(\frac{dt}{dx}\right)$ dividirt wird, seyn:

$$0=2\left[PQ+\left(\frac{dP}{dy}\right)\right]\left(\frac{dz}{dt}\right)-4P^2\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right).$$

Sey $\left(\frac{dz}{dt}\right)=v$, so wird man finden:

$$\left[PQ+\left(\frac{dP}{dy}\right)\right]v-2P^2\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dv}{du}\right)=0,$$

und man nehme t constant, damit

$$\frac{dv}{v}=\frac{\left[PQ+\left(\frac{dP}{dy}\right)\right]du}{2P^2\left(\frac{du}{dx}\right)}$$

werde, wobey aber die Größen P, Q, $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ und $\left(\frac{du}{dx}\right)$ durch die neuen Veränderlichen t und u ausgedrückt werden müssen. Es wird also gut seyn, diese zuerst zu bestimmen. Da

$$\left(\frac{dt}{dy}\right)=P\left(\frac{dt}{dx}\right) \text{ und } \left(\frac{du}{dy}\right)=-P\left(\frac{du}{dx}\right)$$

ist, so wird man erhalten:

$$dt=\left(\frac{dt}{dx}\right)\left[dx+Pdy\right] \text{ und } du=\left(\frac{du}{dx}\right)\left[dx-Pdy\right];$$

es sind also $\left(\frac{dt}{dx}\right)$ und $\left(\frac{du}{dx}\right)$ die Faktoren, welche die Ausdrücke $dx+Pdy$ und $dx-Pdy$ integrabel machen, denn es ist nicht nöthig, daß hieraus die Werthe t und u in der größten Allgemeinheit bestimmt werden. Seyen p und q solche Multiplicatoren, die durch x und y gegeben sind, so wird man haben:

$$t=\int p\,(dx+Pdy) \text{ und } u=\int q\,(dx-Pdy),$$

daher geht die obige Integration über in

$$\frac{dv}{v}=\frac{\left[PQ+\left(\frac{dP}{dy}\right)\right]du}{2P^2q}.$$

Bey welcher Integration die Größe $t = \int p\,(dx + Pdy)$ als unveränderlich anzusehen ist; oder man wird, weil $du = q\,(dx - Pdy)$ ist, erhalten:

$$\frac{dv}{v} = \frac{\left[PQ + \left(\frac{dP}{dy}\right)\right](dx - Pdy)}{2P^2}.$$

Allein wegen $dt = o$ ist $dx = -Pdy$, so daß man findet

$$\frac{dv}{v} = \frac{-dy}{P}\left[PQ + \left(\frac{dP}{dy}\right)\right],$$

und weil t constant und durch x und y gegeben ist, so kann der Werth von x durch y und t ausgedrückt substituirt werden, so daß y allein als veränderlich erscheint, und wenn das Integrale

$$-\int \frac{dy}{P}\left[PQ + \left(\frac{dP}{dy}\right)\right] = l.V$$

gefunden ist, so wird man haben:

$$v = Vf(t) = \left(\frac{dz}{dt}\right).$$

Nun nehme man u constant, so wird

$$z = \int V dt f(t) + F(u).$$

Soll aber diese Integration möglich seyn, so muß die Relation Statt finden:

$$R = PQ + \left(\frac{dP}{dy}\right) - P\left(\frac{dP}{dx}\right).$$

Zusatz 1.

§. 313. Auf dieselbe Art wird die vorgelegte Gleichung die Auflösung gestatten, wenn

$$R = -PQ - \left(\frac{dP}{dy}\right) - P\left(\frac{dP}{dx}\right)$$

seyn sollte, und es bleibt, wie früher:

$$t = \int p\,(dx + Pdy) \quad \text{und} \quad u = \int q\,(dx - Pdy);$$

dann aber wird

$$o = -\left[PQ + \left(\frac{dP}{dy}\right)\right]\left(\frac{dz}{du}\right) - 2P^2\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right),$$

und diese Gleichung gibt, wenn $\left(\frac{dz}{du}\right) = v$ gesetzt, und u constant

genommen wird:

$$\frac{dv}{v} = \frac{-\left[PQ + \left(\frac{dP}{dy}\right)\right] dt}{2P^2\left(\frac{dt}{dx}\right)} = \frac{-\left[PQ + \left(\frac{dP}{dy}\right)\right](dx + Pdy)}{2P^2}.$$

Zusatz 2.

§. 314. Wenn man ferner berücksichtiget, daß

$$u = \int q\,(dx - Pdy)$$

constant und $dx = Pdy$ ist, und man setzt

$$\int - \frac{dy\left[PQ + \left(\frac{dP}{dy}\right)\right]}{P} = l.V,$$

so wird man erhalten:

$$v = Vf(u) = \left(\frac{dz}{du}\right),$$

und wenn nun

$$t = \int p\,(dx + Pdy)$$

genommen wird, so findet man endlich

$$z = \int V du\, f(u) + F(t).$$

Beyspiel 1.

§. 315. Wenn $P = a$ und $R = aQ$ genommen wird, welche Function Q auch von den Veränderlichen x und y seyn mag, so integrire man die Gleichung:

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - a^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + Q\left(\frac{dz}{dy}\right) + aQ\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

Da hier $P = a$ ist, so wird $p = 1$; $q = 1$ und $t = x + ay$ und $u = x - ay$; daher wird, wenn man $\left(\frac{dz}{dt}\right) = v$ nimmt:

$$\frac{dv}{v} = \frac{aQdu}{2a^2} = \frac{Qdu}{2a}.$$

Weil man also hat

$$x = \frac{t + u}{2} \text{ und } y = \frac{t - u}{2a},$$

so erscheint nach Substitution dieser Werthe Q als eine Function von t und u, und wenn t als constant betrachtet wird, so wird man finden:

$$lv = \frac{1}{2a}\int Q\,du + lf(t) \quad \text{oder}$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = e^{\frac{1}{2a}\int Q\,du} f(t),$$

und wenn man nun u als unveränderlich ansieht:

$$z = \int e^{\frac{1}{2a}\int Q\,du}\, dt\, f(t) + F(u).$$

Zusatz 1.

§. 316. Wenn $Q = 2ab$ constant wird, so wird der Gleichung

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - a^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2ab\left(\frac{dz}{dy}\right) + 2a^2b\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$$

folgendes Integrale entsprechen:

$$z = e^{bu} f(t) + F(u) = e^{b(x-ay)} f(x+ay) + F(x-ay),$$

oder

$$z = e^{b(x-ay)}[f(x+ay) + F(x-ay)].$$

Zusatz 2.

§. 317. Wenn $Q = \frac{a}{x}$ ist, so wird der Gleichung

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - a^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{a}{x}\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{a^2}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

weil

$$\int Q\,du = \int\frac{a\,du}{x} = \int\frac{2a\,du}{t+u} = 2al(t+u)$$

ist, folgendes Integrale zugehören:

$$z = \int(t+u)\,dt\,f(t) + F(u) = \int t\,dt\,f(t) + u\int dt\,f(t) + F(u),$$

oder, es wird, wenn $f(t) = \Pi''(t)$ gesetzt wird, seyn:

$$\int dt\,f(t) = \Pi'(t) \quad \text{und}$$

$$\int t\,dt\,f(t) = \int t\,d.\Pi'(t) = t\Pi'(t) - \int dt\,\Pi'(t) = t\Pi'(t) - \Pi(t),$$

so

$$z = (t+u)\,\Pi'(t) - \Pi(t) + F(u), \quad \text{oder}$$

$$z = 2x\Pi'(x+ay) - \Pi(x+ay) + F(x-ay).$$

Beyspiel 2.

§. 318. Sey

$$P = \frac{x}{y} \quad \text{und} \quad R = \frac{-x}{y}Q + \frac{x}{y^2} - \frac{x}{y^2} = \frac{-x}{y}Q,$$

und man setze $Q = \frac{1}{x}$, damit $R = \frac{-1}{y}$ werde, so ist folgende Gleichung zu integriren:

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) - \frac{x^2}{y^2}\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) + \frac{1}{x}\left(\frac{d z}{d y}\right) - \frac{1}{y}\left(\frac{d z}{d x}\right) = 0.$$

Da also

$$t = \int p \left(dx + \frac{x d y}{y}\right) \text{ und } u = \int q \left(dx - \frac{x d y}{y}\right),$$

so nehme man $p = y$ und $q = \frac{1}{y}$, damit $t = xy$ und $u = \frac{x}{y}$ werde. Setzt man nun $\left(\frac{d z}{d u}\right) = v$ und nimmt man u als constant, so erhält man nach Zusatz 1:

$$\frac{d v}{v} = \frac{-\left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right) d t}{\frac{2 x^3}{y^2} \cdot y} = \frac{-(y - x) d t}{2 x^2 y}.$$

Es ist aber $t u = x^2$ und daher $x = \sqrt{t u}$ und $y = \sqrt{\frac{t}{u}}$, ferner $2 x^2 y = 2 t \sqrt{t u}$, woraus man findet:

$$\frac{d v}{v} = \frac{\left(\sqrt{t u} - \sqrt{\frac{t}{u}}\right) d t}{2 t \sqrt{t u}} = \frac{d t}{2 t} - \frac{d t}{2 t u},$$

und weil u constant ist:

$$l v = \tfrac{1}{2} l t - \frac{1}{2 u} l t, \text{ also}$$

$$\left(\frac{d z}{d u}\right) = t^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2 u}} f(u).$$

Wird nun t constant genommen, so wird man haben

$$z = t^{\frac{1}{2}} \int t^{-\frac{1}{2 u}} d u f(u) + F(t),$$

oder man setze $-\frac{1}{2 u} = s$, so daß $s = -\frac{y}{2 x}$ wird, und man wird erhalten:

$$z = t^{\frac{1}{2}} \int t^s d s f(s) + F(t).$$

Bey der Integration des Ausdrucks $\int t^s d s f(s)$ ist s allein veränderlich, und wenn das Integrale genommen ist, muß wieder $t = xy$ und $s = \frac{-y}{2 x}$ gesetzt werden. Übrigens ist klar, daß jede beliebige Function von xy als particuläre Auflösung gelten könne.

Aufgabe 51.

§. 319. Wenn die allgemeine Gleichung

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - 2P\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + (P^2 - Q^2)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + R\left(\frac{dz}{dy}\right) + S\left(\frac{dz}{dx}\right) + Tz + V = 0$$

gegeben ist, die Bedingungen für die Größen P, Q, R, S, T aufzufinden, damit die Integration mit Hülfe der angewandten Reduction gelinge.

Auflösung.

Wenn man dieselbe Substitution macht, indem man die zwey neuen Veränderlichen t und u einführt, so wird unsere Gleichung folgende Form annehmen:

$$\left.\begin{array}{l}
V + Tz + \left(\frac{d^2t}{dy^2}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{dz}{du}\right) + \left(\frac{dt}{dy}\right)^2\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + 2\left(\frac{dt}{dy}\right)\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)^2\left(\frac{d^2z}{du^2}\right) \\
\quad - 2P\left(\frac{d^2t}{dx\,dy}\right) - 2P\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) - 2P\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right) - 2P\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{du}{dy}\right) - 2P\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{du}{dy}\right) \\
\quad + (P^2-Q^2)\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) + (P^2-Q^2)\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + (P^2-Q^2)\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - 2P\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right) + (P^2-Q^2)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 \\
\quad + R\left(\frac{dt}{dy}\right) + R\left(\frac{du}{dy}\right) + 2(P^2-Q^2)\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) \\
\quad + S\left(\frac{dt}{dx}\right) + S\left(\frac{du}{dx}\right).
\end{array}\right\} = 0.$$

Man bestimme nun diese zwey neuen Veränderlichen t und u durch x und y so, daß die Formeln $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)$ und $\left(\frac{d^2z}{du^2}\right)$ verschwinden, so wird die Relation Statt finden müssen:

$$\left(\frac{dt}{dy}\right) = (P+Q)\left(\frac{dt}{dx}\right) \text{ und } \left(\frac{du}{dy}\right) = (P-Q)\left(\frac{du}{dx}\right),$$

und hieraus geht hervor, daß diese Veränderlichen auf folgende Art bestimmt werden:

$$t = \int p\,(dx + (P+Q)\,dy) \text{ und } u = \int q\,(dx + (P-Q)\,dy),$$

indem man p und q so nimmt, daß diese Ausdrücke die Integration gestatten. Nun ist:

$$\left(\frac{d^2 t}{dx\,dy}\right) = (P+Q)\left(\frac{d^2 t}{dx^2}\right) + \left[\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dQ}{dx}\right)\right]\left(\frac{dt}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{d^2 t}{dy^2}\right) = (P+Q)^2\left(\frac{d^2 t}{dx^2}\right) + (P+Q)\left[\left(\frac{dP}{dx}\right)+\left(\frac{dQ}{dx}\right)\right]\left(\frac{dt}{dx}\right) + \left[\left(\frac{dP}{dy}\right) + \left(\frac{dQ}{dy}\right)\right]\left(\frac{dt}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{d^2 u}{dx\,dy}\right) = (P-Q)\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right) + \left[\left(\frac{dP}{dx}\right) - \left(\frac{dQ}{dx}\right)\right]\left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right) = (P-Q)^2\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right) + (P-Q)\left[\left(\frac{dP}{dx}\right)-\left(\frac{dQ}{dx}\right)\right]\left(\frac{du}{dx}\right) + \left[\left(\frac{dP}{dy}\right) - \left(\frac{dQ}{dy}\right)\right]\left(\frac{du}{dx}\right).$$

Hieraus findet man für die Formel $2\left(\frac{d^2 z}{dt\,du}\right)$ den Coefficienten $-\,2\,Q^2\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$ und für den Ausdruck $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ aber folgenden Coefficienten:

$$\left[-(P-Q)\left(\frac{dP+dQ}{dx}\right)+\left(\frac{dP+dQ}{dy}\right)+R(P+Q)+S\right]\left(\frac{dt}{dx}\right)$$

endlich für das Glied $\left(\frac{dz}{du}\right)$ den Coefficienten

$$\left[-(P+Q)\left(\frac{dP-dQ}{dx}\right)+\left(\frac{dP-dQ}{dy}\right)+R(P-Q)+S\right]\left(\frac{du}{dx}\right).$$

Es ist aber $\left(\frac{dt}{dx}\right) = p$ und $\left(\frac{du}{dx}\right) = q$, wenn man daher der Kürze wegen

$$S + R\,(P+Q) + \left(\frac{dP+dQ}{dy}\right) - (P-Q)\left(\frac{dP+dQ}{dx}\right) = M$$

und

$$S + R\,(P-Q) + \left(\frac{dP-dQ}{dy}\right) - (P+Q)\left(\frac{dP-dQ}{dx}\right) = N$$

setzt, so wird unsere aufzulösende Gleichung seyn:

$$0 = V + Tz + Mp\left(\frac{dz}{dt}\right) + Nq\left(\frac{dz}{du}\right) - 4Q^2pq\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right),$$

oder um sie mit den oben §. 294 und 295 dargestellten Ausdrücken vergleichen zu können

$$\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) - \frac{M}{4Q^2q}\left(\frac{dz}{dt}\right) - \frac{N}{4Q^2p}\left(\frac{dz}{du}\right) - \frac{T}{4Q^2pq}z - \frac{V}{4Q^2pq} = 0,$$

und diese Gleichung kann, wenn man ferner Kürze wegen

$$\frac{M}{4Q^2q} = K \quad \text{und} \quad \frac{N}{4Q^2p} = L$$

setzt, in zwey Fällen integrirt werden; in dem einen, wenn

$$-\frac{T}{4Q^2pq} = KL - \left(\frac{dL}{du}\right) \quad \text{oder} \quad T = 4Q^2pq\left(\frac{dL}{du}\right) - \frac{MN}{4Q^2};$$

im andern aber, wenn

$$-\frac{T}{4Q^2pq} = KL - \left(\frac{dK}{dt}\right) \quad \text{oder} \quad T = 4Q^2pq\left(\frac{dK}{dt}\right) - \frac{MN}{4Q^2}$$

ist. Weil aber K und L durch x und y gegeben werden, so lassen sich die Formeln $\left(\frac{dK}{dt}\right)$ und $\left(\frac{dL}{du}\right)$ so reduciren, daß

$$\left(\frac{dK}{dt}\right) = \frac{Q-P}{2Qp}\left(\frac{dK}{dx}\right) + \frac{1}{2Qp}\left(\frac{dK}{dy}\right) \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{dL}{du}\right) = \frac{P+Q}{2Qp}\left(\frac{dL}{dx}\right) - \frac{1}{2Qq}\left(\frac{dL}{dy}\right)$$

wird. Allein wie die Integralien selbst in diesen Fällen gesucht werden müssen, dieses ist schon oben erklärt worden, und es wäre daher überflüssig, jene lästigen Rechnungen hier zu wiederholen; denn in einem jeden vorgelegten Falle wird sich die Auflösung daraus entnehmen lassen.

Anmerkung 1.

§. 320. Was diese Reduction der Ausdrücke betrifft, so läßt sich diese auf folgende Weise ausführen. Da allgemein

$$dz = dx\left(\frac{dz}{dx}\right) + dy\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

ist, so wird man aus den Gleichungen

$$dt = p\,dx + p(P+Q)\,dy \quad \text{und} \quad du = q\,dx + q(P-Q)\,dy$$

erhalten:

$$q\,dt - p\,du = 2pqQ\,dy \quad \text{oder} \quad dy = \frac{q\,dt - p\,du}{2Qpq},$$

und

$$q(P-Q)\,dt - p(P+Q)\,du = -2Qpq\,dx,$$

oder

$$dx = \frac{p(P+Q)\,du - q(P-Q)\,dt}{2Qpq}.$$

Durch Substitution dieser Werthe wird man finden:

$$dz = \left[\frac{(P+Q)\,du}{2Qq} - \frac{(P-Q)\,dt}{2Qp}\right]\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dt}{2Qp} - \frac{du}{2Qq}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

so daß dz durch die Differenzialien dt und du ausgedrückt wird. Wird demnach u constant, also $du = 0$ genommen, so findet man

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{Q-P}{2Qp}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{1}{2Qp}\left(\frac{dz}{dy}\right);$$

wenn aber t constant, also $dt = 0$ gesetzt wird, so ergibt sich

$$\left(\frac{dz}{du}\right) = \frac{P+Q}{2Qq}\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{1}{2Qq}\left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Anmerkung 2.

§. 321. Die in diesem Kapitel vorgetragene Methode besteht also darin, daß man derley Gleichungen durch Einführung der beyden neuen Veränderlichen t und u auf folgende Form zurückführt:

$$\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) + P\left(\frac{dz}{dt}\right) + Q\left(\frac{dz}{du}\right) + Rz + S = 0,$$

und wir haben im vorhergehenden Kapitel gesehen, in welchen Fällen dieselben integrirt werden könne. In eben diesen Fällen werden also auch alle Gleichungen, die sich auf eine solche Form zurückführen lassen, die Integration gestatten. Es gibt aber einen höchst besonderen Fall bey dieser Form, in welchem sich die Integration ausführen läßt, und daher entsteht von neuem eine unendliche Menge anderer Gleichungen, die sich eben darauf reduciren lassen und die eben so gut integrirt werden können. Der Entwicklung dieses Falles wollen wir daher im folgenden Kapitel eine sorgfältige Aufmerksamkeit widmen.

Kapitel IV.

Andere, eigenthümliche Methode, solche Gleichungen zu integriren.

Aufgabe 52.

§. 322. Wenn die vorgelegte Gleichung die Form hat:

$$(x+y)^2\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)+m(x+y)\left(\frac{dz}{dx}\right)+m(x+y)\left(\frac{dz}{dy}\right)+nz=0,$$

das vollständige Integrale derselben zu bestimmen.

Auflösung.

Da hier die beyden Veränderlichen x und y auf ganz gleiche Art in der Gleichung erscheinen, so setze man erstlich

$$z = A(x+y)^\lambda f(x) + B(x+y)^{\lambda+1} f'(x) + C(x+y)^{\lambda+2} f''(x) + D(x+y)^{\lambda+3} f'''(x) + \ldots$$

wo um der leichtern Substitution willen zu bemerken ist, daß, wenn

$$v = (x+y)^\mu F(x)$$

gesetzt wird,

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = \mu(x+y)^{\mu-1} F(x) + (x+y)^\mu F'(x),$$

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \mu(x+y)^{\mu-1} F(x) \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{d^2 v}{dx\,dy}\right) = \mu(\mu-1)(x+y)^{\mu-2} F(x) + \mu(x+y)^{\mu-1} F'(x)$$

seyn werde. Nach gemachter Substitution werden wir also folgende Gleichung erhalten:

$$\begin{array}{llll} 0 = nA(x+y)^\lambda f(x) & + nB(x+y)^{\lambda+1} f'(x) & + nC(x+y)^{\lambda+2} f''(x) & + \ldots \\ \quad + 2m\lambda A & + mA & + mB & \\ \quad + \lambda(\lambda-1)A & + 2m(\lambda+1)B & + 2m(\lambda+2)C & \\ & + \lambda A & + (\lambda+1)B & \\ & + (\lambda+1)\lambda B & + (\lambda+2)(\lambda+1)C, & \end{array}$$

wo die ganze Rechnung auf die Bestimmung der Coefficienten A, B, C, D ... zurückgeführt wird; es war aber leicht vorauszusehen, daß, wenn die obige Form angenommen wird, die Potenzen von $(x+y)$

in den einzelnen Gliedern zum Vorschein kommen werden. Es muß also seyn:

$$n + 2m\lambda + \lambda^2 - \lambda = 0$$

$$(n + 2m\lambda + 2m + \lambda^2 + \lambda) B + (m + \lambda) A = 0$$

$$(n + 2m\lambda + 4m + \lambda^2 + 3\lambda + 2) C + (m + \lambda + 1) B = 0$$

$$(n + 2m\lambda + 6m + \lambda^2 + 5\lambda + 6) D + (m + \lambda + 2) C = 0$$

u. s. w.

welche Bestimmungen mit Hülfe der ersten

$$n + 2m\lambda + \lambda^2 - \lambda = 0$$

bequemer auf folgende Art ausgedrückt werden:

$$B = -\frac{(m + \lambda) A}{2(m + \lambda)}$$

$$C = -\frac{(m + \lambda + 1) B}{2(2m + 2\lambda + 1)}$$

$$D = -\frac{(m + \lambda + 2) C}{3(2m + 2\lambda + 2)}$$

$$E = -\frac{(m + \lambda + 3) D}{4(2m + 2\lambda + 3)}$$

$$F = -\frac{(m + \lambda + 4) E}{5(2m + 2\lambda + 4)}$$

$$G = -\frac{(m + \lambda + 5) F}{6(2m + 2\lambda + 5)}$$

$$H = -\frac{(m + \lambda + 6) G}{7(2m + 2\lambda + 6)}$$

u. s. f.

woraus das Gesetz für das Fortschreiten der Coefficienten erhellt. Aber wir erhalten für den Exponenten λ einen doppelten Werth, nämlich

$$\lambda = \tfrac{1}{2} - m \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} - m - n + m^2},$$

wo jeder dieser beyden Werthe für λ genommen werden kann. Hier sind aber besonders jene Fälle zu bemerken, in welchen die angenommene Reihe abbricht, und dieß geschieht, so oft $m + \lambda + k = 0$ ist, wobey k jede beliebige ganze positive Zahl, die Nullen nicht ausgeschlossen, bezeichnet. Dieß ereignet sich also, so oft

$$\tfrac{1}{2} + k \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} - m - n + m^2} = 0$$

ist, was nur dann möglich ist, wenn $\frac{1}{4} - m - n + m^2$ ein Quadrat ist. Hat man aber eine solche Reihe gefunden, sie mag abbrechen oder ohne Ende fortgehen, so gibt es noch eine andere ähnliche Reihe für die Functionen von y, daher wird der Werth von z auf folgende Art ausgedrückt erhalten werden:

$$\begin{aligned} z = {} & A(x+y)^{\lambda}[f(x) + F(y)] + B(x+y)^{\lambda+1}[f'(x) + F'(y)] \\ & + C(x+y)^{\lambda+2}[f''(x)+F''(y)] + D(x+y)^{\lambda+3}[f'''(x)+F'''(y)] \\ & + E(x+y)^{\lambda+4}[f^{IV}(x)+F^{IV}(y)] + F(x+y)^{\lambda+5}[f^{V}(x)+F^{V}(y)] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

und da hier zwey willkürliche Functionen erscheinen, so ist dieß ein sicheres Zeichen, daß diese Formel das vollständige Integrale der vorgelegten Gleichung ist.

Zusatz 1.

§. 323. Wenn $\lambda = - m$, also $n - m^2 + m = o$ oder $n = m^2 - m$ ist, so wird das Integrale aus einem einzigen Gliede bestehen, weil $B = o$ ist, und das Integrale wird seyn:

$$z = A (x + y)^{-m} [f (x) + F (y)].$$

Zusatz 2.

§. 324. Das Integrale wird aber zwey Glieder enthalten, wenn $\lambda = - m - 1$ oder $n = m^2 - m - 2 = (m + 1) (m - 2)$ ist, dann wird $B = - \frac{1}{2} A$, und das Integrale wird seyn:

$$z = (x + y)^{-m-1} [f (x) + F (y)] - \tfrac{1}{2} (x + y)^{-m} [f' (x) + F' (y)].$$

Zusatz 3.

§. 325. Das Integrale wird aus drey Gliedern bestehen, wenn $\lambda = - m - 2$ oder $n = (m + 2) (m - 3)$ ist, dann wird man haben:

$$B = - \tfrac{2}{2} A \quad \text{und} \quad C = - \tfrac{1}{6} B = + \tfrac{1}{12} A;$$

das Integrale aber ist

$$z = (x + y)^{-m-2} [f (x) + F (y)] - \tfrac{1}{2} (x + y)^{-m-1} [f' (x) + F' (y)] + \tfrac{1}{12} (y + y)^{-m} [f'' (x) + F'' (y)].$$

Zusatz 4.

§. 326. Aus vier Gliedern aber wird das Integrale bestehen, wenn $\lambda = - m - 3$ oder $n = (m + 3) (m - 4)$ ist; in diesem Falle wird seyn:

$$B = - \tfrac{3}{2} A; \quad C = - \tfrac{1}{5} B = + \tfrac{1}{10} A; \quad D = - \tfrac{1}{12} C = - \tfrac{1}{120} A,$$

und das Integrale ist:

$$z = (x + y)^{-m-3} [f (x) + F (y)] - \tfrac{3}{2} (x + y)^{-m-2} [f' (x) + F' (y)] + \tfrac{3}{10} (x + y)^{-m-1} [f'' (x) + F'' (y)] - \tfrac{1}{120} (x + y)^{-m} [f''' (x) + F''' (y)].$$

Anmerkung.

§. 327. Wenn wir allgemein $\lambda + m = - k$ setzen, so wird $n = (m + k) (m - k - 1)$ seyn; dann aber ist

$$B = -\tfrac{1}{2}A;\ C = -\frac{(k-1)B}{2(2k-1)};\ D = -\frac{(k-2)C}{3(2k-2)};\ E = -\frac{(k-3)D}{4(2k-3)},$$

und daher wird, wenn wir alle Coefficienten auf den ersten zurückführen:

$$B = -\tfrac{1}{2}A;\quad C = \frac{(k-1)}{2.2(2k-1)}A;\quad D = \frac{-(k-2)}{2.2.2.3(2k-1)}A;$$

$$E = \frac{+(k-2)(k-3)}{2.2.2.3.4(2k-1)(2k-3)}A;\quad F = \frac{-(k-3)(k-4)}{2^4.3.4.5(2k-1)(2k-3)}A;$$

u. s. w., welche Werthe sich so verhalten:

	A	B	C	D	E	F
$k=1$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0
$k=2$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	0	0	0
$k=3$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{20}$	$-\frac{1}{120}$	0	0
$k=4$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{28}$	$-\frac{2}{7.24}$	$\frac{2.1}{96.7.5}$	0
$k=5$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{36}$	$-\frac{3}{9.24}$	$\frac{3.2}{96.9.7}$	$-\frac{2.1}{960.9.7}$
$k=6$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{44}$	$-\frac{4}{11.24}$	$\frac{4.3}{96.11.9}$	$-\frac{3.2}{960.11.9}$

und so wird der Gleichung

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + \frac{m}{x+y}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{m}{x+y}\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{(m+k)(m+k-1)}{(x+y)^2}z = 0$$

vollständiges Integrale folgendes seyn:

$$\begin{aligned} z = &+ (x+y)^{-m-k}\,[f(x) + F(y)] \\ &- \frac{k}{2k}(x+y)^{-m-k+1}\,[f'(x) + F'(y)] \\ &+ \frac{k(k-1)}{2k.2(2k-1)}(x+y)^{-m-k+2}\,[f''(x) + F''(y)] \\ &- \frac{k(k-1)(k-2)}{2k.2(2k-1).3(2k-2)}(x+y)^{-m-k+3}\,[f'''(x) + F'''(y)] \\ &+ \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{2k.2(2k-1)3.(2k-2).4(2k-3)}(x+y)^{-m-k+4}\,[f^{IV}(x) + F^{IV}(y)] \\ &- \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{2k.2(2k-1).3(2k-2).4(2k-3).5(2k-4)}(x+y)^{-m-k+5}\,[f^{V}(x) + F^{V}(y)] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

welcher Ausdruck eine endliche Anzahl von Gliedern hat, so oft k eine ganze positive Zahl bezeichnet, im entgegengesetzten Falle aber geht derselbe ohne Ende fort. Diese Integration hat aber besonders das Eigenthümliche, daß sie nicht allein die willkürlichen Functionen f (x) und F (y), sondern auch die Differenzialformeln derselben in das Resultat einführt.

Beyspiel.

§. 328. Wenn die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dx dx}\right) + \frac{m}{x+y}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{m}{x+y}\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$$

gegeben ist, die Fälle zu bestimmen, in welchen sich das Integrale derselben durch einen endlichen Ausdruck darstellen läßt.

Da hier $n = (m+k)(m-k-1) = 0$ ist, so wird man, wenn man für k ganze positive Zahlen nimmt, zweyerley Fälle erhalten, in welchen die Integration gelingt; je nachdem nämlich entweder $m = -k$ oder $m = k+1$ ist, so daß im Allgemeinen die Integration mittelst endlicher Größen bewerkstelligt wird, so oft m eine ganze positive oder negative Zahl bezeichnet. Wir werden also zuerst für $m = -k$ erhalten:

$$\begin{aligned} z = {} & 1\left(f(x) + F(y)\right) - \frac{k}{2k}(x+y)\left(f'(x) + F'(y)\right) \\ & + \frac{1}{2}\frac{k(k-1)}{2k(2k-1)}(x+y)^2\left(f''(x) + F''(y)\right) \\ & - \frac{1}{6}\frac{k(k-1)(k-2)}{2k(2k-1)(2k-2)}(x+y)^3\left(f'''(x) + F'''(y)\right) \\ & + \frac{1}{24}\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)}(x+y)^4\left(f^{IV}(x) + F^{IV}(y)\right). \end{aligned}$$

Ferner wird man für $m = k+1$ finden:

$$\begin{aligned} (x+y)^{2k+1} z = {} & 1\left(f(x) + F(y)\right) - \frac{k}{2k}(x+y)\left(f'(x) + F'(y)\right) \\ & + \frac{1}{2}\frac{k(k-1)}{2k(2k-1)}(x+y)^2\left(f''(x) + F''(y)\right) \\ & - \frac{1}{6}\frac{k(k-1)(k-2)}{2k(2k-1)(2k-2)}(x+y)^3\left(f'''(x) + F'''(y)\right) \\ & + \frac{1}{24}\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)}(x+y)^4\left(f^{IV}(x) + F^{IV}(y)\right) \end{aligned}$$

ꝛc.

man erhält nämlich in beyden Fällen denselben Ausdruck, welchem im ersten Falle die Größe z, im letztern aber die Größe $(x + y)^{2k+1} z$ gleich ist. Um nun diese einzelnen Fälle bestimmter zu entwickeln, setzen wir:

$$A = (f(x) + F(y))$$

$$B = (f(x) + F(y)) - \tfrac{1}{2}(x + y)\,(f'(x) + F'(y))$$

$$C = (f(x) + F(y)) - \tfrac{2}{4}(x + y)\,(f'(x) + F'(y)) + \frac{1}{4\cdot 3}(x + y)^2\,(f''(x) + F''(y))$$

$$D = (f(x) + F(y)) - \tfrac{3}{6}(x + y)\,(f'(x) + F'(y)) + \frac{3}{6\cdot 5}(x + y)^2\,(f''(x) + F''(y) - \frac{1}{6\cdot 5\cdot 4}(x + y)^3\,(f'''(x) + F'''(y))$$

$$\text{rc.}$$

oder wenn Kürze halber

$$\mathfrak{A} = f(x) + F(y);$$
$$\mathfrak{B} = (x + y)\,(f'(x) + F'(y));$$
$$\mathfrak{C} = (x + y)^2\,(f''(x) + F''(y));$$
$$\mathfrak{D} = (x + y)^3\,(f'''(x) + F'''(y));$$
$$\mathfrak{E} = (x + y)^4\,(f^{IV}(x) + F^{IV}(y));$$
$$\text{rc.}$$

gesetzt wird, so sey

$$A = \mathfrak{A}$$

$$B = \mathfrak{A} - \frac{1}{2}\mathfrak{B}$$

$$C = \mathfrak{A} - \frac{2}{4}\mathfrak{B} + \frac{1}{4\cdot 3}\mathfrak{C}$$

$$D = \mathfrak{A} - \frac{3}{6}\mathfrak{B} + \frac{3}{6\cdot 5}\mathfrak{C} - \frac{1}{6\cdot 5\cdot 4}\mathfrak{D}$$

$$E = \mathfrak{A} - \frac{4}{8}\mathfrak{B} + \frac{6}{8\cdot 7}\mathfrak{C} - \frac{4}{8\cdot 7\cdot 6}\mathfrak{D} + \frac{1}{8\cdot 7\ 6\cdot 5}\mathfrak{E}$$

$$F = \mathfrak{A} - \frac{5}{10}\mathfrak{B} + \frac{10}{10\cdot 9}\mathfrak{C} - \frac{10}{10\cdot 9\cdot 8}\mathfrak{D} + \frac{5}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}\mathfrak{E} - \frac{1}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}\mathfrak{F}$$

$$G = \mathfrak{A} - \frac{6}{12}\mathfrak{B} + \frac{15}{12\cdot 11}\mathfrak{C} - \frac{20}{12\cdot 11\cdot 10}\mathfrak{D} + \frac{15}{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}\mathfrak{E} - \frac{6}{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}\mathfrak{F} + \frac{1}{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}\mathfrak{G}$$

$$\text{rc.}$$

Sind diese Werthe gefunden, so wird man für beyde Gattungen von Fällen folgendes Schema erhalten:

wenn $m=0$ ist, so wird	$z=A$	w. $m=1$ ist, so wird	$(x+y)\,z=A$
» $m=-1$ »	$z=B$	» $m=2$ »	$(x+y)^3 z=B$
» $m=-2$ »	$z=C$	» $m=3$ »	$(x+y)^5 z=C$
» $m=-3$ »	$z=D$	» $m=4$ »	$(x+y)^7 z=D$
» $m=-4$ »	$z=E$	» $m=5$ »	$(x+y)^9 z=E$
» $m=-5$ »	$z=F$	» $m=6$ »	$(x+y)^{11} z=F$
» $m=-6$ »	$z=G$	» $m=7$ »	$(x+y)^{13} z=G$
ꝛc.		ꝛc.	

Anmerkung.

§. 329. Wenn für k eine negative Zahl genommen wird, so schreitet der Ausdruck ohne Ende fort; denn es sey $k=-k'$, so wird man aus der ersten Formel $m=k'$ erhalten, und daher

$$z=\mathfrak{A}-\frac{k'}{2k'}\mathfrak{B}+\frac{1}{2}\frac{k'(k'+1)}{2k'(2k'+1)}\mathfrak{C}-\frac{1}{6}\frac{k'(k'+1)(k'+2)}{2k'(2k'+1)(2k'+2)}\mathfrak{D}+\text{ꝛc.}$$

Für denselben Fall aber, wo $m=k'$ ist, gibt der zweyte Ausdruck, wegen $k=k'-1$:

$$(x+y)^{2k'-1}z=\mathfrak{A}-\frac{(k'-1)}{2k'-2}\mathfrak{B}+\frac{1}{2}\frac{(k'-1)(k'-2)}{(2k'-2)(2k'-3)}\mathfrak{C}$$
$$-\frac{1}{6}\frac{(k'-1)(k'-2)(k'-3)}{(2k'-2)(2k'-3)(2k'-4)}\mathfrak{D}+\ldots;$$

allein diese Ausdrücke sind nicht so anzusehen, als wären sie einander absolut gleich, denn in dem einen werden die Functionen $f(x)$ und $F_{,}(y)$ andere Formen erhalten, so daß demungeachtet beyde gleich gut Genüge leisten. In dem Falle, wo $k'=\frac{1}{2}$, stimmen zwar beyde Ausdrücke vollkommen überein, wir wollen aber $k'=0$ setzen, so daß der erstere

$$z=\mathfrak{A}=f(x)+F(y)$$

gibt, der letztere aber

$$\frac{z}{x+y}=\mathfrak{A}-\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}+\tfrac{1}{6}\mathfrak{C}-\tfrac{1}{24}\mathfrak{D}+\tfrac{1}{120}\mathfrak{E}-\ldots;$$

Damit nun die Übereinstimmung dieser beyden Ausdrücke in die Augen falle, sey in diesem letztern

$$f(x)=ax^3 \quad \text{und} \quad F(y)=by^2,$$

und man wird erhalten:

$$\mathfrak{A} = ax^3 + by^2;\quad \mathfrak{B} = (x+y)(3ax^2 + 2by);$$
$$\mathfrak{C} = (x+y)^2 (6ax + 2b);\quad \mathfrak{D} = (x+y)^3\, 6a;$$

die übrigen Theile aber verschwinden. Wir werden demnach aus dem letztern Ausdrucke finden:

$$z = (x+y)(ax^3 + by^2) - \tfrac{1}{2}(x+y)^2 (3ax^2 + 2by)$$
$$+ \tfrac{1}{3}(x+y)^3 (3ax + b) - \tfrac{1}{4}(x+y)^4 a,$$

und die Entwickelung hiervon gibt:

$$\tfrac{3}{4}ax^4 - \tfrac{1}{4}ay^4 + \tfrac{2}{3}bx^3 + \tfrac{1}{3}by^3 = z,$$

welche Form auch in dem ersten Ausdrucke $z = f(x) + F(y)$ enthalten ist. Die Übereinstimmung jener beyden allgemeinen Formeln ist also um so merkwürdiger.

Aufgabe 53.

§. 330. Die Fälle aufzufinden, in welchen die allgemeine Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) - Q^2 \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + R\left(\frac{dz}{dy}\right) + S\left(\frac{dz}{dx}\right) + Tz = 0$$

auf die vorhergehende Form zurückgeführt, und daher in eben diesen Fällen integrirt werden kann.

Auflösung.

Führt man die beyden neuen Veränderlichen t und u ein, damit die Reduction so wie im §. 319 angewendet werden kann, so findet man, weil $P = 0$ und $V = 0$ ist:

$$t = \int p\,(dx + Q\,dy) \quad \text{und} \quad u = \int q\,(dx - Q\,dy),$$

und wenn wir zur Abkürzung der Rechnung

$$M = S + QR + \left(\frac{dQ}{dy}\right) + Q\left(\frac{dQ}{dx}\right)$$
$$N = S - QR - \left(\frac{dQ}{dy}\right) + Q\left(\frac{dQ}{dx}\right)$$

setzen, so wird die Gleichung zum Vorschein kommen:

$$\left(\frac{d^2 z}{dt\,du}\right) - \frac{M}{4Q^2 q}\left(\frac{dz}{dt}\right) - \frac{N}{4Q^2 p}\left(\frac{dz}{du}\right) - \frac{T}{4Q^2 pq}\, z = 0,$$

welche wir also auf folgende Form bringen müssen:

$$\left(\frac{d^2 z}{dt\,du}\right) + \frac{m}{t+u}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{m}{t+u}\left(\frac{dz}{du}\right) + \frac{n}{(t+u)^2}\, z = 0.$$

Wir haben schon früher die Fälle angegeben, in welchen hier die Integrabilität Statt findet; so oft nämlich $x = (m+k)(m-k-1)$ ist, wobey k irgend eine ganze positive Zahl bezeichnet, selbst die o nicht ausgeschlossen. Zu diesem Zwecke muß also

$$M = \frac{-4mQ^2q}{t+u}; \quad N = \frac{-4mQ^2p}{t+u} \quad \text{und} \quad T = \frac{-4nQ^2pq}{(t+u)^2}$$

seyn. Weil man aber hier die Integrabilität der Ausdrücke t und u berücksichtigen muß, so wollen wir $Q = \frac{\Phi'(y)}{\pi'(x)}$ setzen, und es sey:

$$p = a\pi'(x) \quad \text{und} \quad q = b\pi'(x),$$

so wird man erhalten:

$$t = a\pi(x) + a\Phi(y) \quad \text{und} \quad u = b\pi(x) - b\Phi(y);$$

daher wird

$$M + N = 2S + 2Q\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{-4m(a+b)Q^2\pi'(x)}{t+u}$$

und

$$M - N = 2QR + 2\left(\frac{dQ}{dy}\right) = \frac{4m(a-b)Q^2\pi'(x)}{t+u},$$

also

$$R = \frac{2m(a-b)Q\pi'(x)}{t+u} - \frac{1}{Q}\left(\frac{dQ}{dy}\right),$$

$$S = \frac{-2m(a+b)Q^2\pi'(x)}{t+u} - Q\left(\frac{dQ}{dx}\right) \quad \text{und}$$

$$T = \frac{-4nabQ^2[\pi'(x)]^2}{(t+u)^2} = \frac{-4nab[\Phi'(y)]^2}{(t+u)^2};$$

weil $Q = \frac{\Phi'(y)}{\pi'(x)}$ ist, demnach erhält man:

$$\left(\frac{dQ}{dy}\right) = \frac{\Phi''(y)}{\pi'(x)} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{\pi''(x)\Phi'(y)}{[\pi'(x)]^2} \quad \text{und}$$

$$t + u = (a+b)\pi(x) + (a-b)\Phi(y);$$

so werden wir finden:

$$R = \frac{2m(a-b)\Phi'(y)}{t+u} - \frac{\Phi''(y)}{\Phi'(y)} \quad \text{und}$$

$$\frac{S}{Q^2} = \frac{-2m(a+b)\pi'(x)}{t+u} + \frac{\pi''(x)}{\pi'(x)}.$$

Um nun unsere Gleichung auf eine einfachere Form zu bringen, haben wir vorzüglich zwey Fälle zu betrachten, in deren einem $b = a$, in dem andern aber $b = -a$ ist. Im ersteren Falle ist

$t + u = 2a\pi(x)$, und unsere Gleichung wird dann seyn:

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) - \left[\frac{\Phi'(y)}{\pi'(x)}\right]^2 \cdot \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) - \frac{\Phi''(y)}{\Phi'(y)}\left(\frac{d z}{d y}\right) +$$

$$+ \left[\frac{\varphi'(y)}{\pi'(x)}\right]^2 \left(\frac{\pi''(x)}{\pi'(x)} - \frac{2m\pi'(x)}{\pi(x)}\right)\left(\frac{d z}{d x}\right) - n\left[\frac{\Phi'(y)}{\pi(x)}\right]^2 z = 0.$$

Im andern Falle dagegen, in welchem $b = -a$ ist, wird $t + u = 2a\Phi(y)$ und

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) - \left(\frac{\Phi'(y)}{\pi'(x)}\right)^2 \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) + \left[\left(\frac{2m\Phi'(y)}{\Phi(y)}\right) - \left(\frac{\Phi''(y)}{\Phi'(y)}\right)\right]\left(\frac{d z}{d y}\right)$$

$$+ \left(\frac{\Phi'(y)}{\pi'(x)}\right)^2 \cdot \frac{\pi''(x)}{\pi'(x)}\left(\frac{d z}{d x}\right) + n\left[\frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)}\right]^2 z = 0,$$

welche zwey Gleichungen in jenen Fällen, in welchen

$$n = (m + k)(m - k - 1)$$

ist, die Integration gestatten.

Zusatz 1.

§. 331. Die zuletzt gefundenen Gleichungen sind bloß dadurch von einander verschieden, daß die beyden Veränderlichen x und y mit einander verwechselt werden, und daher ist es hinreichend, nur eine einzige dieser Gleichungen zu betrachten. Die erstere aber wird transformirt, wenn man

$$t = \pi(x) + \Phi(y) \quad \text{und} \quad u = \pi(x) - \Phi(y)$$

setzt, die letztere dagegen, indem man

$$t = \pi(x) + \Phi(y) \quad \text{und} \quad u = \Phi(y) - \pi(x)$$

nimmt.

Zusatz 2.

§. 332. Diese Gleichungen lassen sich auch in folgender deutlicheren Form darstellen, und zwar die erstere

$$\frac{1}{[\Phi'(y)]^2}\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) - \frac{1}{[\pi'(x)]^2}\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) - \frac{\Phi''(y)}{[\Phi'(y)]^3}\left(\frac{d z}{d y}\right) +$$

$$+ \left[\frac{\pi''(x)}{(\pi'(x))^3} - \frac{2m}{\pi(x)\,\pi'(x)}\right]\left(\frac{d z}{d x}\right) - \frac{n}{[\pi(x)]^2} z = 0,$$

und die letztere

$$\frac{1}{[\Phi'(y)]^2}\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) - \frac{1}{[\pi'(x)]^2}\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) + \left(\frac{2m}{\Phi(y)\,\Phi'(y)} - \frac{\Phi''(y)}{(\Phi'(y))^3}\right)\left(\frac{d z}{d y}\right)$$

$$+ \frac{\pi''(x)}{[\pi'(x)]^3}\left(\frac{d z}{d x}\right) + \frac{n}{[\Phi(y)]^2} z = 0.$$

Erster Fall.

§. 333. Setzen wir $\pi'(x) = a$ und $\Phi'(y) = b$, so wird $\pi(x) = ax$ und $\Phi(y) = by$, dann aber $\pi''(x) = o$ und $\Phi''(y) = o$, und daher ergibt sich der erstere Ausdruck

$$\frac{1}{b^2}\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) - \frac{1}{a^2}\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) - \frac{2m}{a^2 x}\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{n}{a^2 x^2} z = o,$$

welcher sich auf die oben aufgelöste Formel zurückführen läßt, indem man

$$t = ax + by \quad \text{und} \quad u = ax - by$$

setzt. Die letztere Form aber ist:

$$\frac{1}{b^2}\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) - \frac{1}{a^2}\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) + \frac{2m}{b^2 y}\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{n}{b^2 y^2} z = o,$$

und diese bringt man auf die oben aufgelöste Form zurück, indem man

$$t = ax + by \quad \text{und} \quad u = by - ax$$

setzt; beyde Formeln aber sind integrabel, in dem Falle, wenn

$$n = (m + k)(m - k - 1);$$

denn hat man dieselben auf die Variablen t und u zurückgeführt, so erhält man die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dt\, du}\right) + \frac{m}{t+u}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{m}{t+u}\left(\frac{dz}{du}\right) + \frac{n}{(t+u)^2} z = o.$$

Zusatz 1.

§. 334. Wenn $n = o$ genommen wird, so sind die beyden Gleichungen

$$\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) - \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) = o \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) - \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) + \frac{2m}{y}\left(\frac{dz}{dy}\right) = o$$

integrabel, so oft m eine ganze Zahl und daher 2m eine gerade Zahl bezeichnet.

Zusatz 2.

§. 335. Dieß sind also die Gleichungen, welche wegen ihrer Einfachheit merkwürdig sind, nur aus drey Gliedern bestehen, und in unzähligen Fällen die Integration gestatten. Das Integrale aber läßt sich in jedem Falle leicht nach §. 328 bestimmen, wenn man daselbst statt x und y nur die Veränderlichen t und u schreibt.

Zweyter Fall.

§. 336. Sey $\pi'(x) = ax^{\mu}$ und $\Phi'(y) = b$, so wird man erhalten:

$$\pi(x) = \frac{1}{\mu+1} ax^{\mu+1} \quad \text{und} \quad \Phi(y) = by,$$

ferner

$$\pi''(x) = \mu a x^{\mu-1} \quad \text{und} \quad \Phi''(y) = 0,$$

und daher erhält man für die erstere Form:

$$\frac{1}{b^2}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \frac{1}{a^2x^{2\mu}}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{\mu - 2m\mu - 2m}{a^2x^{2\mu+1}}\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{n(\mu+1)^2}{a^2x^{2\mu+2}}z = 0,$$

welcher sich auf die oben aufgelöste Formel reducirt, wenn man

$$t = \frac{1}{\mu+1} ax^{\mu+1} + by \quad \text{und} \quad u = \frac{1}{\mu+1} ax^{\mu+1} - by$$

setzt. Die zweyte Formel aber geht über in

$$\frac{1}{b^2}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \frac{1}{a^2x^{2\mu}}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{2m}{b^2y}\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{\mu}{a^2x^{2\mu+1}}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{n}{b^2y^2}z = 0$$

und hier wird die Reduction bewerkstelligt, wenn

$$t = \frac{1}{\mu+1} ax^{\mu+1} + by \quad \text{und} \quad u = by - \frac{1}{\mu+1} ax^{\mu+1}$$

genommen wird. Diese beyden Gleichungen lassen sich integriren, so oft $n = (m+k)(m-k-1)$ ist.

Zusatz 1.

§. 337. Die erstere Formel biethet einen höchst merkwürdigen Fall dar, wenn $m = \frac{\mu}{2\mu+2}$ und $n = 0$ genommen wird; denn dann wird

$$\frac{a^2}{b^2} x^{2\mu}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right),$$

welche Gleichung integrabel ist, so oft $\frac{\mu}{2\mu+2}$ eine ganze positive oder negative Zahl m wird.

Zusatz 2.

§. 338. Oder wenn $\mu = \frac{-2m}{2m-1}$ ist, so wird sich die Gleichung

$$\frac{a^2}{b^2} x^{\frac{-4m}{2m-1}}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) \quad \text{oder}$$

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{4m}{2m-1}} \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$$

integriren lassen, so oft m eine ganze positive oder negative Größe bezeichnet, und man erhält die Reduction, wenn

$$t = -(2m-1) a x^{\frac{-1}{2m-1}} + by \quad \text{und}$$

$$t = -(2m-1) a x^{\frac{-1}{2m-1}} - by$$

gesetzt wird.

Dritter Fall.

§. 339. Sey $\pi'(x) = a x^\mu$ und $\Phi'(y) = b y^\nu$, so erhält man

$$\pi(x) = \frac{1}{\mu+1} a x^{\mu+1} \quad \text{und} \quad \Phi(y) = \frac{1}{\nu+1} b y^{\nu+1};$$

dann aber wird

$$\pi''(x) = \mu a x^{\mu-1} \quad \text{und} \quad \Phi''(y) = \nu b y^{\nu-1}.$$

Daher gibt die erstere Form

$$\frac{1}{b^2 y^{2\nu}}\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) - \frac{1}{a^2 x^{2\mu}}\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) - \frac{\nu}{b^2 y^{2\nu+1}}\left(\frac{d z}{d y}\right)$$
$$+ \frac{\mu - 2m\mu - 2m}{a^2 x^{2\mu+1}}\left(\frac{d z}{d x}\right) - \frac{n(\mu+1)^2}{a^2 x^{2\mu+2}} z = 0,$$

welche Gleichung reducirt wird, indem man

$$t = \frac{1}{\mu+1} a x^{\mu+1} + \frac{1}{\nu+1} b y^{\nu+1} \quad \text{und}$$

$$u = \frac{1}{\mu+1} a x^{\mu+1} - \frac{1}{\nu+1} b y^{\nu+1}$$

setzt. Die letztere Formel aber gibt:

$$\frac{1}{b^2 y^{2\mu}}\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) - \frac{1}{a^2 x^{2\mu}}\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) + \frac{2m\nu + 2m - \nu}{b^2 y^{2\nu+1}}\left(\frac{d z}{d y}\right)$$
$$+ \frac{\mu}{a^2 x^{2\mu+1}}\left(\frac{d z}{d x}\right) + \frac{n(\nu+1)^2}{b^2 y^{2\nu+2}} z = 0,$$

und diese Gleichung reducirt man durch die Substitution

$$t = \frac{1}{\mu+1} a x^{\mu+1} + \frac{1}{\nu+1} b y^{\nu+1} \quad \text{und}$$

$$u = \frac{-1}{\mu+1} a x^{\mu+1} + \frac{1}{\nu+1} b y^{\nu+1},$$

oder da hier bloß das Verhältniß zwischen a und b in Rechnung zu bringen ist, kann man für die erstere Form setzen:

$$t = \tfrac{1}{2} x^{\mu+1} + \frac{(\mu + 1)\, b}{2\, (\nu + 1)\, a}\, y^{\nu+1} \quad \text{und}$$

$$u = \tfrac{1}{2} x^{\mu+1} - \frac{(\mu + 1)\, b}{2\, (\nu + 1)\, a}\, y^{\nu+1},$$

damit $t + u = x^{\mu+1}$ werde, um so den Integralausdruck in einer einfacheren Form zu erhalten.

Zusatz 1.

§. 340. Wenn man in dem ersteren Ausdrucke $\mu = \frac{-2m}{2m-1}$ setzt, so wird derselbe um ein Glied kürzer, und man wird erhalten:

$$\frac{1}{b^2 y^{2\nu}} \left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) - \frac{1}{a^2} x^{\frac{4m}{2m-1}} \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) - \frac{\nu}{b^2 y^{2\nu+1}} \left(\frac{d z}{d y}\right) - \frac{n}{(2m - 1)^2 a^2} x^{\frac{2}{2m-1}} z = 0.$$

Man setze $a = b$ und nehme auch $\nu = \frac{-2m}{2m-1}$, damit man erhalte:

$$y^{\frac{4m}{2m-1}} \left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) - x^{\frac{4m}{2m-1}} \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) + \frac{2m}{2m - 1}\, y^{\frac{2m+1}{2m-1}} \left(\frac{d z}{d y}\right) - \frac{n}{(2m - 1)^2} x^{\frac{2}{2m-1}} z = 0.$$

Zusatz 2.

§. 341. Man nehme ferner in dem ersten Ausdrucke $\nu = \mu$, aber $\mu - 2m\mu - 2m = -\mu$ oder $m = \frac{\mu}{\mu + 1}$, damit man erhalte:

$$\frac{1}{b^2 y^{2\mu}} \left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) - \frac{1}{a^2 x^{2\mu}} \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) - \frac{\mu}{b^2 y^{2\mu+1}} \left(\frac{d z}{d y}\right) - \frac{\mu}{a^2 x^{2\mu+1}} \left(\frac{d z}{d x}\right) - \frac{n\, (\mu + 1)^2}{a^2 x^{2\mu+2}} z = 0,$$

welche Gleichung integrabel ist, so oft

$$n = -\frac{[\mu + (\mu + 1)\, k]\, [(\mu + 1)\, k + 1]}{(\mu + 1)^2} \quad \text{oder}$$

$$n = -\left(k + \frac{\mu}{\mu + 1}\right)\left(k + \frac{1}{\mu + 1}\right) \text{ ist.}$$

Anmerkung.

§. 342. Es biethet sich uns hier also eine sehr große Menge von sehr schönen Gleichungen dar, welche man mit Hülfe der hier vorgetragenen Methode integriren kann. Hier sind vorzüglich zwey Fälle unserer Aufmerksamkeit würdig, wovon der eine

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{4m}{2m-1}} \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$$

für die Bestimmung der Bewegung der Saiten von ungleicher Dicke aufgefunden worden ist, der andere aber, welcher in der Gleichung

$$\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) - \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{d z}{d x}\right) = 0$$

enthalten ist, deßhalb merkwürdig ist, weil man in der Rechnung für die Fortpflanzung des Schalles auf eine solche Form stößt. Diese beyden Gleichungen verdienen es also vorzugsweise, daß wir für die Fälle der Integrabilität die Integralien wirklich darstellen.

Aufgabe 54.

§. 343. Sey die Differenzialgleichung

$$\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) - \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{d z}{d x}\right) = 0$$

gegeben; man soll für die Fälle, in welchen m eine ganze positive oder negative Zahl ist, das vollständige Integrale derselben auffinden.

Auflösung.

Macht man die Substitution

$$t = \tfrac{1}{2}x + \frac{b}{2a}y \quad \text{und} \quad u = \tfrac{1}{2}x - \frac{b}{2a}y,$$

so nimmt unsere Gleichung folgende Form an:

$$\left(\frac{d^2 z}{d t\, d u}\right) + \frac{m}{t+u}\left(\frac{d z}{d t}\right) + \frac{m}{t+u}\left(\frac{d z}{d u}\right) = 0.$$

Da also $t + u = x$ ist, so werden, wenn wir

$$\mathfrak{A} = f\left(\frac{ax+by}{2a}\right) + F\left(\frac{ax-by}{2a}\right)$$

$$\mathfrak{B} = x\left[f'\left(\frac{ax+by}{2a}\right) + F'\left(\frac{ax-by}{2a}\right)\right]$$

$$\mathfrak{C} = x^2 \left[f''\left(\frac{ax+by}{2a}\right) + F''\left(\frac{ax-by}{2a}\right)\right]$$

$$\mathfrak{D} = x^3 \left[f'''\left(\frac{ax+by}{2a}\right) + F'''\left(\frac{ax-by}{2a}\right)\right]$$

$$\mathfrak{E} = x^4 \left[f^{IV}\left(\frac{ax+by}{2a}\right) + F^{IV}\left(\frac{ax-by}{2a}\right)\right]$$

$$\mathfrak{F} = x^5 \left[f^{V}\left(\frac{ax+by}{2a}\right) + F^{V}\left(\frac{ax-by}{2a}\right)\right]$$

ꝛc.

setzen, die integrabeln Fälle, und zwar erstens für die negativen Werthe von m, auf folgende Weise sich darstellen:

für $m = 0$ wird $z = \mathfrak{A}$

» $m = -1$ » $z = \mathfrak{A} - \frac{1}{2}\mathfrak{B}$

» $m = -2$ » $z = \mathfrak{A} - \frac{2}{4}\mathfrak{B} + \frac{1}{4.3}\mathfrak{C}$

» $m = -3$ » $z = \mathfrak{A} - \frac{3}{6}\mathfrak{B} + \frac{3}{6.5}\mathfrak{C} - \frac{1}{6.5.4}\mathfrak{D}$

» $m = -4$ » $z = \mathfrak{A} - \frac{4}{8}\mathfrak{B} + \frac{6}{8.7}\mathfrak{C} - \frac{4}{8.7.6}\mathfrak{D} + \frac{1}{8.7.6.5}\mathfrak{E}$

» $m = -5$ » $z = \mathfrak{A} - \frac{5}{10}\mathfrak{B} + \frac{10}{10.9}\mathfrak{C} - \frac{10}{10.9.8}\mathfrak{D} + \frac{5}{10.9.8.7}\mathfrak{E} - \frac{1}{10.9.8.7.6}\mathfrak{F}$;

dann aber erhält man für die positiven Werthe von m:

für $m = 1$; $xz = \mathfrak{A}$

» $m = 2$; $x^3 z = \mathfrak{A} - \frac{1}{2}\mathfrak{B}$

» $m = 3$; $x^5 z = \mathfrak{A} + \frac{2}{4}\mathfrak{B} + \frac{1}{4.3}\mathfrak{C}$

» $m = 4$; $x^7 z = \mathfrak{A} - \frac{3}{6}\mathfrak{B} + \frac{3}{6.5}\mathfrak{C} - \frac{1}{6.5.4}\mathfrak{D}$

» $m = 5$; $x^9 z = \mathfrak{A} - \frac{4}{8}\mathfrak{B} + \frac{6}{8.7}\mathfrak{C} - \frac{4}{8.7.6}\mathfrak{D} + \frac{1}{8.7.6.5}\mathfrak{E}$

» $m = 6$; $x^{11} z = \mathfrak{A} - \frac{5}{10}\mathfrak{B} + \frac{10}{10.9}\mathfrak{C} - \frac{10}{10.9.8}\mathfrak{D} + \frac{5}{10.9.8.7}\mathfrak{E} - \frac{1}{10.9.8.7.6}\mathfrak{F}$.

ꝛc.

...cher Ausdruck eine endliche Anzahl von Gliedern hat, so oft k eine ... positive Zahl bezeichnet, im entgegengesetzten Falle aber geht ... ohne Ende fort. Diese Integration hat aber besonders das ...enthümliche, daß sie nicht allein die willkürlichen Functionen f (x) ... F (y), sondern auch die Differenzialformeln derselben in das Re...ltat einführt.

Beyspiel.

§. 328. Wenn die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dx\,dx}\right) + \frac{m}{x+y}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{m}{x+y}\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$$

...geben ist, die Fälle zu bestimmen, in welchen sich ... Integrale derselben durch einen endlichen Aus...ck darstellen läßt.

Da hier $n = (m+k)(m-k-1) = 0$ ist, so wird man, ...n man für k ganze positive Zahlen nimmt, zweyerley Fälle erhalten, ... welchen die Integration gelingt; je nachdem nämlich entweder $m = -k$ oder $m = k+1$ ist, so daß im Allgemeinen die Inte...tion mittelst endlicher Größen bewerkstelligt wird, so oft m eine ... positive oder negative Zahl bezeichnet. Wir werden also zuerst ... $m = -k$ erhalten:

$$\ldots = 1\,(f(x) + F(y)) - \frac{k}{2k}(x+y)\,(f'(x) + F'(y))$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{k(k-1)}{2k(2k-1)}(x+y)^2\,(f''(x) + F''(y))$$
$$- \frac{1}{6}\frac{k(k-1)(k-2)}{2k(2k-1)(2k-2)}(x+y)^3\,(f'''(x) + F'''(y))$$
$$+ \frac{1}{24}\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)}(x+y)^4\,(f^{IV}(x) + F^{IV}(y)).$$

Ferner wird man für $m = k+1$ finden:

$$\ldots + y)^{2k+1}\,z = 1\,(f(x) + F(y)) - \frac{k}{2k}(x+y)\,(f'(x) + F'(y))$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{k(k-1)}{2k(2k-1)}(x+y)^2\,(f''(x) + F''(y))$$
$$- \frac{1}{6}\frac{k(k-1)(k-2)}{2k(2k-1)(2k-2)}(x+y)^3\,(f'''(x) + F'''(y))$$
$$+ \frac{1}{24}\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)}(x+y)^4\,(f^{IV}(x) + F^{IV}(y))$$

ꝛc.

$$t = \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2m-1}} - \frac{b}{2(2m-1)a} y \quad \text{und}$$

$$u = \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2m-1}} + \frac{b}{2(2m-1)a} y$$

wird, so erhält unsere Gleichung folgende Form:

$$\left(\frac{d^2 z}{dt\,du}\right) + \frac{m}{t+u}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{m}{t+u}\left(\frac{dz}{du}\right) = 0,$$

und hierbey ist

$$t + u = x^{\frac{-1}{2m-1}}.$$

Man setze also

$\mathfrak{A} = f(x) + F(u)$; $\quad \mathfrak{B} = x^{\frac{-1}{2m-1}} [f'(t) + F'(u)]$

$\mathfrak{C} = x^{\frac{-2}{2m-1}} [f''(t) + F''(u)]$; $\quad \mathfrak{D} = x^{\frac{-3}{2m-1}} [f'''(t) + F'''(u)]$

$\mathfrak{E} = x^{\frac{-4}{2m-1}} [f^{IV}(t) + F^{IV}(u)]$; $\quad \mathfrak{F} = x^{\frac{-5}{2m-1}} [f^{V}(t) + F^{V}(u)]$

ꝛc.

Wir wollen nun zuerst jene Fälle durchgehen, in welchen der Werth der Größe m von Null an durch die negativen Zahlen abnehmend fortschreitet.

I. Sey $m = 0$, so wird der Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$$

folgendes Integrale entsprechen:

$$z = f\left(\frac{1}{2}x + \frac{b}{2a}y\right) + F\left(\frac{1}{2}x - \frac{b}{2a}y\right).$$

II. Sey $m = -1$, so wird, weil

$$t = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}} + \frac{b}{6a}y \quad \text{und} \quad u = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}} - \frac{b}{6a}y$$

ist, der Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{4}{3}} \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$$

nachstehendes Integrale zukommen:

$$z = f(t) + F(u) - \frac{1}{2} x^{\frac{1}{3}} (f'(t) + F'(u)).$$

III. Sey $m = -2$, so wird wegen

$$t = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{5}} + \frac{b}{10a}y \quad \text{und} \quad u = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{5}} - \frac{b}{10a}y$$

e Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{8}{5}} \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$$

lgende Gleichung zum Integrale haben:

$$= f(t) + F(u) - \tfrac{2}{4} x^{\frac{1}{5}} (f'(t) + F'(u)) + \frac{1}{4.3} x^{\frac{2}{5}} (f''(t) + F''(u)).$$

IV. Sey $m = -3$, so wird wegen

$$t = \tfrac{1}{2} x^{\frac{1}{7}} + \frac{b}{14 a} y \quad \text{und} \quad u = \tfrac{1}{2} x^{\frac{1}{7}} - \frac{b}{14 a} y$$

as Integrale der Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{12}{7}} \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$$

olgendes seyn:

$$= f(t) + F(u) - \frac{3}{6} x^{\frac{1}{7}} (f'(t) + F'(u)) + \frac{3}{6.5} x^{\frac{2}{7}} (f''(t) + F''(u))$$

$$- \frac{1}{6.5.4} x^{\frac{3}{7}} (f'''(t) + F'''(u)).$$

V. Wenn $m = -4$ ist, also

$$t = \tfrac{1}{2} x^{\frac{1}{9}} + \frac{b}{18 a} y \quad \text{und} \quad u = \tfrac{1}{2} x^{\frac{1}{9}} - \frac{b}{18 a} y,$$

so wird der Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{16}{9}} \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$$

Integrale folgendes seyn:

$$z = f(t) + F(u) - \frac{4}{8} x^{\frac{1}{9}} (f'(t) + F'(u)) + \frac{6}{8.7} x^{\frac{2}{9}} (f''(t) + F''(u))$$

$$- \frac{4}{8.7.6} x^{\frac{3}{9}} (f'''(t) + F'''(u)) + \frac{1}{8.7.6.5} x^{\frac{4}{9}} (f^{IV}(t) + F^{IV}(u))$$

und so ferner.

Für den andern Fall aber, in welchem m positive Werthe hat, werden sich die Integralien auf folgende Weise ausdrücken lassen:

I. Sey $m = 1$ oder $\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^4 \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$, so wird, weil

$$t = \tfrac{1}{2} x^{-1} - \frac{b}{2 a} y \quad \text{und} \quad u = \tfrac{1}{2} x^{-1} + \frac{b}{2 a} y$$

ist, das Integrale seyn:

$$x^{-1} z = f(t) + F(u) \quad \text{oder} \quad z = x (f(t) + F(u)).$$

II. Sey $m = 2$, oder $\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{8}{3}} \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$, so erhält man wegen

$$t = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{3}} - \frac{b}{6a} y \quad \text{und} \quad u = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{b}{6a} y$$

zum Integrale:

$$z = x\,(f(t) + F(u)) - \tfrac{1}{2} x^{\frac{2}{3}} (f'(t) + F'(u)).$$

III. Wenn $m = 3$ ist, oder $\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{12}{5}} \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$, so wird, weil

$$t = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{5}} - \frac{b}{10a} y \quad \text{und} \quad u = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{5}} + \frac{b}{10a} y$$

ist, das Integrale folgender Ausdruck seyn:

$$z = x(f(t) + F(u)) - \frac{2}{4} x^{\frac{4}{5}} (f'(t) + F'(u)) + \frac{1}{4.3} x^{\frac{3}{5}} (f''(t) + F''(u)).$$

IV. Für $m = 4$, oder $\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{16}{7}} \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$ entspricht wegen

$$t = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{7}} - \frac{b}{14a} y \quad \text{und} \quad u = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{7}} + \frac{b}{14a} y$$

folgendes Integrale:

$$z = x\,(f(t) + F(u)) - \frac{3}{6} x^{\frac{6}{7}} (f'(t) + F'(u)) + \frac{3}{6.5} x^{\frac{5}{7}} (f''(t) + F''(u))$$
$$- \frac{1}{6.5.4} x^{\frac{4}{7}} (f'''(t) + F'''(u)).$$

V. Ist $m = 5$ oder $\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{20}{9}} \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$, so wird, weil

$$t = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{9}} - \frac{b}{18a} y \quad \text{und} \quad u = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{9}} + \frac{b}{18a} y$$

ist, der Ausdruck

$$z = x(f(t) + F(u)) - \frac{4}{8} x^{\frac{8}{9}} (f'(t) + F'(u)) + \frac{6}{8.7} x^{\frac{7}{9}} (f''(t) + F''(u))$$
$$- \frac{4}{8.7.6} x^{\frac{6}{9}} (f'''(t) + F'''(u)) + \frac{1}{8.7.6.5} x^{\frac{5}{9}} (f^{IV}(t) + F^{IV}(u))$$

das Integrale seyn, u. s. w.; und daher ist das Gesetz, nach welchem man diese Ausdrücke weiter fortsetzen kann, für sich klar.

Anmerkung 1.

§. 346. Diese Fälle der Integrabilität stimmen mit jenen überein, welche in der sogenannten Riccati'schen Gleichung vorkommen. Wir haben nämlich gesehen, daß sich die Gleichung

$$dy + y^2 dx = a x^{\frac{-4m}{2m-1}} dx$$

grîren lasse, so oft m eine ganze positive oder negative Zahl be= hnet; diese Gleichung aber ist mit unserer Formel auf eine versteckte ise verknüpft, welches auf folgende Art gezeigt werden kann. nn die allgemeine Formel

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = X \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$$

gelegt ist, so setze man zum Behufe der Auffindung particulärer tegralien $z = e^{\alpha y} v$, so daß v bloß eine Function von x bezeichnet, man wird erhalten:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = e^{\alpha y} \frac{dv}{dx} \quad \text{und} \quad \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) = e^{\alpha y} \frac{d^2 v}{d x^2};$$

n aber ist $\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \alpha^2 e^{\alpha y} v$, und daher findet man die Gleichung

$$\alpha^2 v = \frac{X d^2 v}{d x^2}.$$

Setzt man in diese ferner $v = e^{\int p dx}$, so erhält man

$$\frac{\alpha^2 dx}{X} = dp + p^2 dx,$$

wenn $X = A x^{\frac{4m}{2m-1}}$ ist, wie in unserem Falle, so geht diese ichung über in:

$$dp + p^2 dx = a x^{\frac{-4m}{2m-1}} dx.$$

Es läßt sich daher nicht ohne Grund erwarten, daß beyde Glei= ngen in eben denselben Fällen die Integrabilität besitzen. Indessen t dennoch der merkwürdige Umstand ein, daß der Fall, in welchem $= \infty$, und der in der Riccati'schen Formel der leichteste ist, in erer Gleichung keineswegs die Integration zuläßt. Man erhält ulich die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^2 \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right),$$

n Reduction nach der oben §. 330 angeführten Methode nicht ge= t. Denn weil

$$Q = \frac{bx}{a}, \quad R = 0, \quad S = 0 \quad \text{und} \quad T = 0$$

ist, so setzt man für die neuen Veränderlichen

$$t = \int p \left(dx + \frac{bxdy}{a}\right) \quad \text{und} \quad u = \int q \left(dx - \frac{bxdy}{a}\right),$$

und daher ergibt sich wegen $M = \frac{b^2 x}{a^2} = N$ folgende Gleichung:

$$\left(\frac{d^2 z}{dt\,du}\right) - \frac{1}{4qx}\left(\frac{dz}{dt}\right) - \frac{1}{4px}\left(\frac{dz}{du}\right) = 0,$$

welche, wenn man

$$p = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad q = \frac{1}{x}$$

nimmt, so daß

$$t = lx + \frac{by}{a} \quad \text{und} \quad u = lx - \frac{by}{a}$$

übergeht in

$$\left(\frac{d^2 z}{dt\,du}\right) - \tfrac{1}{4}\left(\frac{dz}{dt}\right) - \tfrac{1}{4}\left(\frac{dz}{du}\right) = 0,$$

deren Integration sich nicht absehen läßt.

Anmerkung 2.

§. 347. Von der Gleichung $\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = x^2 \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$ aber lassen sich unzählige particuläre Integralien angeben, welche in der Form $z = Ax^\lambda e^{\mu y}$ enthalten sind. Denn da hier

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \mu A x^\lambda e^{\mu y} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dx}\right) = \lambda A x^{\lambda - 1} e^{\mu y}$$

ist, so wird man haben:

$$\mu^2 A x^\lambda e^{\mu y} = \lambda(\lambda - 1) A x^\lambda e^{\mu y}, \quad \text{also} \quad \mu = \sqrt{\lambda(\lambda - 1)},$$

und daher wird man für jeden für λ angenommenen Werth zwey Werthe für μ erhalten, so daß man findet:

$$z = Ax^\lambda e^{y\sqrt{\lambda(\lambda-1)}} + Bx^\lambda e^{-y\sqrt{\lambda(\lambda-1)}},$$

und so kann man die Anzahl dieser Glieder durch die Veränderung von λ ins Unendliche vervielfältigen. Indessen lassen sich dennoch diese einzelnen Glieder noch allgemeiner darstellen; denn wird $z = x^\lambda e^{\mu y} v$ gesetzt, so wollen wir sehen, ob v nothwendig constant seyn muß. Es ist aber

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \mu x^\lambda e^{\mu y} v + x^\lambda e^{\mu y}\left(\frac{dv}{dy}\right) \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \lambda x^{\lambda-1} e^{\mu y} v + x^{\lambda} e^{\mu y} \left(\frac{dv}{dx}\right),$$

ıd daher gibt unsere Gleichung, wenn sie durch $x^{\lambda} e^{\mu y}$ dividirt wird:

$$v + 2\mu\left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = \lambda(\lambda-1)v + 2\lambda x\left(\frac{dv}{dx}\right) + x^2\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)$$

Man setze, wie früher, $\mu^2 = \lambda(\lambda-1)$ und es sey $v = \alpha l x + \beta y$, wird man erhalten:

$$2\beta\mu = 2\alpha\lambda - \alpha \quad \text{oder} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2\mu}{2\lambda-1} = \frac{2\sqrt{\lambda(\lambda-1)}}{2\lambda-1},$$

nd daher wird jedes aus der Zahl λ entsprungene Glied folgende orm haben:

$$= x^{\lambda}\left[e^{y\sqrt{\lambda(\lambda-1)}}\left(A + \frac{2\sqrt{\lambda(\lambda-1)}}{\mathfrak{A}} l x + \frac{2\lambda-1}{\mathfrak{A}} y\right) + e^{-y\sqrt{\lambda(\lambda-1)}}\left(B - \frac{2\sqrt{\lambda(\lambda-1)}}{\mathfrak{B}} l x + \frac{2\lambda-1}{\mathfrak{B}} y\right)\right].$$

Wie man auch sowohl den Exponenten λ als auch die Größen , $\mathfrak{A}$, B, $\mathfrak{B}$ verändern mag, so können unzählige solche Glieder bildet werden, welche, in einen Ausdruck zusammengenommen, als r vollständige Werth der Function z anzusehen sind. Ja man kann gar imaginäre Ausdrücke für λ setzen, denn nimmt man

$$\lambda = a + b\sqrt{-1}, \quad \text{so wird}$$
$$\mu = p + q\sqrt{-1},$$

d hierbey ist:

$$p^2 - q^2 = a^2 - a - b^2 \quad \text{und}$$
$$p^2 + q^2 = \sqrt{a^2 + b^2}\,(a^2 - 2a + 1 + b^2),$$

nn aber ist

$$x^{\lambda} = x^{a}(\cos. b l x + \sqrt{-1}\,\sin. b l x) \quad \text{und}$$
$$e^{\mu y} = e^{py}(\cos. q y + \sqrt{-1}\,\sin. q y),$$

d hieraus ergibt sich der reelle Ausdruck:

$$= x^{a} e^{py}\left\{\begin{array}{l} A\cos.(blx+qy) + B(2plx+(2a-1)y)\cos.(blx+qy) \\ \qquad - B(2qlx+2by)\sin.(blx+qy) \\ \mathfrak{A}\sin.(blx+qy) + \mathfrak{B}(2plx+(2a-1)y)\sin.(blx+qy) \\ \qquad + \mathfrak{B}(2qlx+2by)\cos.(blx+qy) \end{array}\right\}$$

, die Größen a und b nach Belieben angenommen werden können, durch sich zugleich die Werthe von p und q ergeben. Wenn wir

oder da hier bloß das Verhältniß zwischen a und b in Rechnung zu bringen ist, kann man für die erstere Form setzen:

$$t = \tfrac{1}{2} x^{\mu+1} + \frac{(\mu+1)\, b}{2(\nu+1)\, a} y^{\nu+1} \quad \text{und}$$

$$u = \tfrac{1}{2} x^{\mu+1} - \frac{(\mu+1)\, b}{2(\nu+1)\, a} y^{\nu+1},$$

damit $t + u = x^{\mu+1}$ werde, um so den Integralausdruck in einer einfacheren Form zu erhalten.

Zusatz 1.

§. 340. Wenn man in dem ersteren Ausdrucke $\mu = \frac{-2m}{2m-1}$ setzt, so wird derselbe um ein Glied kürzer, und man wird erhalten:

$$\frac{1}{b^2 y^{2\nu}} \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) - \frac{1}{a^2} x^{\frac{4m}{2m-1}} \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) - \frac{\nu}{b^2 y^{2\nu+1}} \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

$$- \frac{n}{(2m-1)^2 a^2} x^{\frac{2}{2m-1}} z = 0.$$

Man setze $a = b$ und nehme auch $\nu = \frac{-2m}{2m-1}$, damit man erhalte:

$$y^{\frac{4m}{2m-1}} \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) - x^{\frac{4m}{2m-1}} \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + \frac{2m}{2m-1} y^{\frac{2m+1}{2m-1}} \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

$$- \frac{n}{(2m-1)^2} x^{\frac{2}{2m-1}} z = 0.$$

Zusatz 2.

§. 341. Man nehme ferner in dem ersten Ausdrucke $\nu = \mu$, aber $\mu - 2m\mu - 2m = -\mu$ oder $m = \frac{\mu}{\mu+1}$, damit man erhalte:

$$\frac{1}{b^2 y^{2\mu}} \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) - \frac{1}{a^2 x^{2\mu}} \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) - \frac{\mu}{b^2 y^{2\mu+1}} \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

$$- \frac{\mu}{a^2 x^{2\mu+1}} \left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{n(\mu+1)^2}{a^2 x^{2\mu+2}} z = 0,$$

welche Gleichung integrabel ist, so oft

$$n = -\frac{[\mu + (\mu+1) k]\,[(\mu+1) k + 1]}{(\mu+1)^2} \quad \text{oder}$$

$$n = -\left(k + \frac{\mu}{\mu+1}\right)\left(k + \frac{1}{\mu+1}\right) \text{ ist.}$$

Anmerkung.

§. 342. Es biethet sich uns hier also eine sehr große Menge von sehr schönen Gleichungen dar, welche man mit Hülfe der hier vorgetragenen Methode integriren kann. Hier sind vorzüglich zwey Fälle unserer Aufmerksamkeit würdig, wovon der eine

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{4m}{2m-1}} \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$$

für die Bestimmung der Bewegung der Saiten von ungleicher Dicke aufgefunden worden ist, der andere aber, welcher in der Gleichung

$$\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) - \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{d z}{d x}\right) = 0$$

enthalten ist, deßhalb merkwürdig ist, weil man in der Rechnung für die Fortpflanzung des Schalles auf eine solche Form stößt. Diese beyden Gleichungen verdienen es also vorzugsweise, daß wir für die Fälle der Integrabilität die Integralien wirklich darstellen.

Aufgabe 54.

§. 343. Sey die Differenzialgleichung

$$\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) - \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{d z}{d x}\right) = 0$$

gegeben; man soll für die Fälle, in welchen m eine ganze positive oder negative Zahl ist, das vollständige Integrale derselben auffinden.

Auflösung.

Macht man die Substitution

$$t = \tfrac{1}{2}x + \frac{b}{2a}y \quad \text{und} \quad u = \tfrac{1}{2}x - \frac{b}{2a}y,$$

so nimmt unsere Gleichung folgende Form an:

$$\left(\frac{d^2 z}{dt\,du}\right) + \frac{m}{t+u}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{m}{t+u}\left(\frac{dz}{du}\right) = 0.$$

Da also $t + u = x$ ist, so werden, wenn wir

$$\mathfrak{A} = f\left(\frac{ax+by}{2a}\right) + F\left(\frac{ax-by}{2a}\right)$$

$$\mathfrak{B} = x\left[f'\left(\frac{ax+by}{2a}\right) + F'\left(\frac{ax-by}{2a}\right)\right]$$

$$\mathfrak{C} = x^2 \left[f''\left(\frac{ax+by}{2a}\right) + F''\left(\frac{ax-by}{2a}\right)\right]$$

$$\mathfrak{D} = x^3 \left[f'''\left(\frac{ax+by}{2a}\right) + F'''\left(\frac{ax-by}{2a}\right)\right]$$

$$\mathfrak{E} = x^4 \left[f^{IV}\left(\frac{ax+by}{2a}\right) + F^{IV}\left(\frac{ax-by}{2a}\right)\right]$$

$$\mathfrak{F} = x^5 \left[f^{V}\left(\frac{ax+by}{2a}\right) + F^{V}\left(\frac{ax-by}{2a}\right)\right]$$

rc.

setzen, die integrabeln Fälle, und zwar erstens für die negativen We[rthe] von m, auf folgende Weise sich darstellen:

für $m = 0$ wird $z = \mathfrak{A}$

» $m = -1$ » $z = \mathfrak{A} - \frac{1}{2}\mathfrak{B}$

» $m = -2$ » $z = \mathfrak{A} - \frac{2}{4}\mathfrak{B} + \frac{1}{4.3}\mathfrak{C}$

» $m = -3$ » $z = \mathfrak{A} - \frac{3}{6}\mathfrak{B} + \frac{3}{6.5}\mathfrak{C} - \frac{1}{6.5.4}$

» $m = -4$ » $z = \mathfrak{A} - \frac{4}{8}\mathfrak{B} + \frac{6}{8.7}\mathfrak{C} - \frac{4}{8.7.6}$
$+ \frac{1}{8.7.6.5}$

» $m = -5$ » $z = \mathfrak{A} - \frac{5}{10}\mathfrak{B} + \frac{10}{10.9}\mathfrak{C} - \frac{10}{10.9.8}$
$+ \frac{5}{10.9.8.7}\mathfrak{E} - \frac{1}{10.9.8.7.6}$

dann aber erhält man für die positiven Werthe von m:

für $m = 1$; $xz = \mathfrak{A}$

» $m = 2$; $x^3 z = \mathfrak{A} - \frac{1}{2}\mathfrak{B}$

» $m = 3$; $x^5 z = \mathfrak{A} + \frac{2}{4}\mathfrak{B} + \frac{1}{4.3}\mathfrak{C}$

» $m = 4$; $x^7 z = \mathfrak{A} - \frac{3}{6}\mathfrak{B} + \frac{3}{6.5}\mathfrak{C} - \frac{1}{6.5.4}\mathfrak{D}$

» $m = 5$; $x^9 z = \mathfrak{A} - \frac{4}{8}\mathfrak{B} + \frac{6}{8.7}\mathfrak{C} - \frac{4}{8.7.6}\mathfrak{D}$
$+ \frac{1}{8.7.6.5}$

» $m = 6$; $x^{11} z = \mathfrak{A} - \frac{5}{10}\mathfrak{B} + \frac{10}{10.9}\mathfrak{C} - \frac{10}{10.9.8}\mathfrak{D}$
$+ \frac{5}{10.9.8.7}\mathfrak{E} - \frac{1}{10.9.8.7.6}$

rc.

Diesem Ausdrucke ist demnach in dem Falle, wo $m = -k$ ist, der Werth von z gleich, und derselben Größe der Werth von $x^{2k+1}z$ für den Fall, wo $m = k + 1$ ist.

Anmerkung.

§. 344. Ich habe die Werthe von t und u hier so angenommen, daß $t + u = x$ wurde, und eben diese Werthe muß man auch in den Functionen anwenden. Denn obgleich $f\left(\frac{ax + by}{2a}\right)$ auch eine Function von $ax + by$ ist, so sind dennoch die daraus durch Differenziation abgeleiteten Functionen verschieden; denn setzen wir

$$f\left(\frac{ax + by}{2a}\right) = \Phi(ax + by),$$

so erhalten wir durch Differenziation:

$$\frac{(adx + bdy)}{2a} f'\left(\frac{ax + by}{2a}\right) = (adx + bdy)\ \Phi'(ax + by);$$

und daher wird

$$f'\left(\frac{ax + by}{2a}\right) = 2a\,\Phi'(ax + by).$$

Es sind also diese Differenzial-Functionen nicht gleich, obgleich es die angenommenen ursprünglichen Functionen sind. Auf ähnliche Weise wird man erhalten:

$$f''\left(\frac{ax + by}{2a}\right) = 4a^2\,\Phi''(ax + by) \quad \text{und}$$

$$f'''\left(\frac{ax + by}{2a}\right) = 8a^3\,\Phi'''(ax + by) \quad \text{rc.}$$

und so weiter.

Aufgabe 55.

§. 345. Wenn die Differenzialgleichung

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \frac{b^2}{a^2}\,x^{\frac{4m}{2m-1}}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$$

gegeben ist; in den Fällen, in welchen m eine ganze positive oder negative Zahl bezeichnet, das vollständige Integrale darzustellen.

Auflösung.

Werden die neuen Veränderlichen t und u eingeführt, so daß

$$t = \tfrac{1}{2} x^{\frac{-1}{2m-1}} - \frac{b}{2(2m-1)a} y \quad \text{und}$$

$$u = \tfrac{1}{2} x^{\frac{-1}{2m-1}} + \frac{b}{2(2m-1)a} y$$

wird, so erhält unsere Gleichung folgende Form:

$$\left(\frac{d^2 z}{dt\,du}\right) + \frac{m}{t+u}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{m}{t+u}\left(\frac{dz}{du}\right) = 0,$$

und hierbey ist

$$t + u = x^{\frac{-1}{2m-1}}.$$

Man setze also

$\mathfrak{A} = f(x) + F(u);$ $\qquad \mathfrak{B} = x^{\frac{-1}{2m-1}} [f'(t) + F'(u)]$

$\mathfrak{C} = x^{\frac{-2}{2m-1}} [f''(t) + F''(u)];$ $\qquad \mathfrak{D} = x^{\frac{-3}{2m-1}} [f'''(t) + F'''(u)]$

$\mathfrak{E} = x^{\frac{-4}{2m-1}} [f^{IV}(t) + F^{IV}(u)];$ $\qquad \mathfrak{F} = x^{\frac{-5}{2m-1}} [f^{V}(t) + F^{V}(u)]$

rc.

Wir wollen nun zuerst jene Fälle durchgehen, in welchen der Werth der Größe m von Null an durch die negativen Zahlen abnehmend fortschreitet.

I. Sey $m = 0$, so wird der Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$$

folgendes Integrale entsprechen:

$$z = f\left(\tfrac{1}{2} x + \frac{b}{2a} y\right) + F\left(\tfrac{1}{2} x - \frac{b}{2a} y\right).$$

II. Sey $m = -1$, so wird, weil

$$t = \tfrac{1}{2} x^{\frac{1}{3}} + \frac{b}{6a} y \quad \text{und} \quad u = \tfrac{1}{2} x^{\frac{1}{3}} - \frac{b}{6a} y$$

ist, der Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{4}{3}} \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$$

nachstehendes Integrale zukommen:

$$z = f(t) + F(u) - \tfrac{1}{2} x^{\frac{1}{3}} (f'(t) + F'(u)).$$

III. Sey $m = -2$, so wird wegen

$$t = \tfrac{1}{2} x^{\frac{1}{5}} + \frac{b}{10a} y \quad \text{und} \quad u = \tfrac{1}{2} x^{\frac{1}{5}} - \frac{b}{10a} y$$

die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{8}{5}} \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$$

folgende Gleichung zum Integrale haben:

$$z = f(t) + F(u) - \tfrac{2}{4} x^{\frac{1}{5}} (f'(t) + F'(u)) + \frac{1}{4.3} x^{\frac{2}{5}} (f''(t) + F''(u)).$$

IV. Sey $m = -3$, so wird wegen

$$t = \tfrac{1}{2} x^{\frac{1}{7}} + \frac{b}{14a} y \quad \text{und} \quad u = \tfrac{1}{2} x^{\frac{1}{7}} - \frac{b}{14a} y$$

das Integrale der Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{12}{7}} \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$$

folgendes seyn:

$$z = f(t) + F(u) - \frac{3}{6} x^{\frac{1}{7}} (f'(t) + F'(u)) + \frac{3}{6.5} x^{\frac{2}{7}} (f''(t) + F''(u))$$
$$- \frac{1}{6.5.4} x^{\frac{3}{7}} (f'''(t) + F'''(u)).$$

V. Wenn $m = -4$ ist, also

$$t = \tfrac{1}{2} x^{\frac{1}{9}} + \frac{b}{18a} y \quad \text{und} \quad u = \tfrac{1}{2} x^{\frac{1}{9}} - \frac{b}{18a} y,$$

so wird der Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{16}{9}} \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$$

Integrale folgendes seyn:

$$z = f(t) + F(u) - \frac{4}{8} x^{\frac{1}{9}} (f'(t) + F'(u)) + \frac{6}{8.7} x^{\frac{2}{9}} (f''(t) + F''(u))$$
$$- \frac{4}{8.7.6} x^{\frac{3}{9}} (f'''(t) + F'''(u)) + \frac{1}{8.7.6.5} x^{\frac{4}{9}} (f^{IV}(t) + F^{IV}(u))$$

und so ferner.

Für den andern Fall aber, in welchem m positive Werthe hat, werden sich die Integralien auf folgende Weise ausdrücken lassen:

I. Sey $m = 1$ oder $\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^4 \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$, so wird, weil

$$t = \tfrac{1}{2} x^{-1} - \frac{b}{2a} y \quad \text{und} \quad u = \tfrac{1}{2} x^{-1} + \frac{b}{2a} y$$

ist, das Integrale seyn:

$$x^{-1} z = f(t) + F(u) \quad \text{oder} \quad z = x (f(t) + F(u)).$$

II. Sey $m = 2$, oder $\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{8}{3}} \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$, so erhält man wegen

$$t = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{3}} - \frac{b}{6a} y \quad \text{und} \quad u = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{b}{6a} y$$

zum Integrale:

$$z = x\,(f(t) + F(u)) - \tfrac{1}{2} x^{\frac{2}{3}} (f'(t) + F'(u)).$$

III. Wenn $m = 3$ ist, oder $\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{12}{5}} \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$, so wird, weil

$$t = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{5}} - \frac{b}{10a} y \quad \text{und} \quad u = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{5}} + \frac{b}{10a} y$$

ist, das Integrale folgender Ausdruck seyn:

$$z = x\,(f(t) + F(u)) - \frac{2}{4} x^{\frac{4}{5}} (f'(t) + F'(u)) + \frac{1}{4.3} x^{\frac{3}{5}} (f''(t) + F''(u)).$$

IV. Für $m = 4$, oder $\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{16}{7}} \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$ entspricht wegen

$$t = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{7}} - \frac{b}{14a} y \quad \text{und} \quad u = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{7}} + \frac{b}{14a} y$$

folgendes Integrale:

$$z = x\,(f(t) + F(u)) - \frac{3}{6} x^{\frac{6}{7}} (f'(t) + F'(u)) + \frac{3}{6.5} x^{\frac{5}{7}} (f''(t) + F''(u))$$
$$- \frac{1}{6.5.4} x^{\frac{4}{7}} (f'''(t) + F'''(u)).$$

V. Ist $m = 5$ oder $\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{20}{9}} \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$, so wird, weil

$$t = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{9}} - \frac{b}{18a} y \quad \text{und} \quad u = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{9}} + \frac{b}{18a} y$$

ist, der Ausdruck

$$z = x\,(f(t) + F(u)) - \frac{4}{8} x^{\frac{8}{9}} (f'(t) + F'(u)) + \frac{6}{8.7} x^{\frac{7}{9}} (f''(t) + F''(u))$$
$$- \frac{4}{8.7.6} x^{\frac{6}{9}} (f'''(t) + F'''(u)) + \frac{1}{8.7.6.5} x^{\frac{5}{9}} (f^{IV}(t) + F^{IV}(u))$$

das Integrale seyn, u. s. w.; und daher ist das Gesetz, nach welchem man diese Ausdrücke weiter fortsetzen kann, für sich klar.

Anmerkung 1.

§. 346. Diese Fälle der Integrabilität stimmen mit jenen überein, welche in der sogenannten Riccati'schen Gleichung vorkommen. Wir haben nämlich gesehen, daß sich die Gleichung

$$dy + y^2 dx = a x^{\frac{-4m}{2m-1}} dx$$

grirèn lasse, so oft m eine ganze positive oder negative Zahl be-
hnet; diese Gleichung aber ist mit unserer Formel auf eine versteckte
ise verknüpft, welches auf folgende Art gezeigt werden kann.
nn die allgemeine Formel

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = X \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$$

gelegt ist, so setze man zum Behufe der Auffindung particulärer
tegralien $z = e^{\alpha y} v$, so daß v bloß eine Function von x bezeichnet,
) man wird erhalten:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = e^{\alpha y} \frac{dv}{dx} \text{ und } \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = e^{\alpha y} \frac{d^2 v}{dx^2};$$

n aber ist $\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \alpha^2 e^{\alpha y} v$, und daher findet man die Gleichung

$$\alpha^2 v = \frac{X d^2 v}{d x^2}.$$

Setzt man in diese ferner $v = e^{\int p dx}$, so erhält man

$$\frac{\alpha^2 dx}{X} = dp + p^2 dx,$$

wenn $X = A x^{\frac{4m}{2m-1}}$ ist, wie in unserem Falle, so geht diese
ichung über in:

$$dp + p^2 dx = a x^{\frac{-4m}{2m-1}} dx.$$

Es läßt sich daher nicht ohne Grund erwarten, daß beyde Glei-
ngen in eben denselben Fällen die Integrabilität besitzen. Indessen
t dennoch der merkwürdige Umstand ein, daß der Fall, in welchem
$= \infty$, und der in der Riccati'schen Formel der leichteste ist, in
erer Gleichung keineswegs die Integration zuläßt. Man erhält
lich die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^2 \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right),$$

n Reduction nach der oben §. 330 angeführten Methode nicht ge-
t. Denn weil

$$Q = \frac{bx}{a}, \quad R = 0, \quad S = 0 \text{ und } T = 0$$

ist, so setzt man für die neuen Veränderlichen

$$t = \int p \left(dx + \frac{bx\,dy}{a} \right) \quad \text{und} \quad u = \int q \left(dx - \frac{bx\,dy}{a} \right),$$

und daher ergibt sich wegen $M = \frac{b^2 x}{a^2} = N$ folgende Gleichung:

$$\left(\frac{d^2 z}{dt\,du}\right) - \frac{1}{4qx}\left(\frac{dz}{dt}\right) - \frac{1}{4px}\left(\frac{dz}{du}\right) = 0,$$

welche, wenn man

$$p = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad q = \frac{1}{x}$$

nimmt, so daß

$$t = lx + \frac{by}{a} \quad \text{und} \quad u = lx - \frac{by}{a}$$

übergeht in

$$\left(\frac{d^2 z}{dt\,du}\right) - \tfrac{1}{4}\left(\frac{dz}{dt}\right) - \tfrac{1}{4}\left(\frac{dz}{du}\right) = 0,$$

deren Integration sich nicht absehen läßt.

Anmerkung 2.

§. 347. Von der Gleichung $\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = x^2 \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$ aber lassen sich unzählige particuläre Integralien angeben, welche in der Form $z = Ax^\lambda e^{\mu y}$ enthalten sind. Denn da hier

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \mu A x^\lambda e^{\mu y} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dx}\right) = \lambda A x^{\lambda - 1} e^{\mu y}$$

ist, so wird man haben:

$$\mu^2 A x^\lambda e^{\mu y} = \lambda(\lambda - 1) A x^\lambda e^{\mu y}, \quad \text{also} \quad \mu = \sqrt{\lambda(\lambda - 1)},$$

und daher wird man für jeden für λ angenommenen Werth zwey Werthe für μ erhalten, so daß man findet:

$$z = A x^\lambda e^{y\sqrt{\lambda(\lambda-1)}} + B x^\lambda e^{-y\sqrt{\lambda(\lambda-1)}},$$

und so kann man die Anzahl dieser Glieder durch die Veränderung von λ ins Unendliche vervielfältigen. Indessen lassen sich dennoch diese einzelnen Glieder noch allgemeiner darstellen; denn wird $z = x^\lambda e^{\mu y} v$ gesetzt, so wollen wir sehen, ob v nothwendig constant seyn muß. Es ist aber

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \mu x^\lambda e^{\mu y} v + x^\lambda e^{\mu y} \left(\frac{dv}{dy}\right) \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \lambda x^{\lambda-1} e^{\mu y} v + x^{\lambda} e^{\mu y} \left(\frac{dv}{dx}\right),$$

ıd daher gibt unsere Gleichung, wenn sie durch $x^{\lambda} e^{\mu y}$ dividirt wird:

$$v + 2\mu\left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = \lambda(\lambda-1)v + 2\lambda x\left(\frac{dv}{dx}\right) + x^2\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)$$

Man setze, wie früher, $\mu^2 = \lambda(\lambda-1)$ und es sey $v = \alpha l x + \beta y$, wird man erhalten:

$$2\beta\mu = 2\alpha\lambda - \alpha \quad \text{oder} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2\mu}{2\lambda-1} = \frac{2\sqrt{\lambda(\lambda-1)}}{2\lambda-1},$$

ıd daher wird jedes aus der Zahl λ entsprungene Glied folgende orm haben:

$$= x^{\lambda}\left[e^{y\sqrt{\lambda(\lambda-1)}}\left(A + \frac{2\sqrt{\lambda(\lambda-1)}}{\mathfrak{A}} l x + \frac{2\lambda-1}{\mathfrak{A}} y\right) + e^{-y\sqrt{\lambda(\lambda-1)}}\left(B - \frac{2\sqrt{\lambda(\lambda-1)}}{\mathfrak{B}} l x + \frac{2\lambda-1}{\mathfrak{B}} y\right)\right].$$

Wie man auch sowohl den Exponenten λ als auch die Größen , $\mathfrak{A}$, B, $\mathfrak{B}$ verändern mag, so können unzählige solche Glieder bildet werden, welche, in einen Ausdruck zusammengenommen, als r vollständige Werth der Function z anzusehen sind. Ja man kann jar imaginäre Ausdrücke für λ setzen, denn nimmt man

$$\lambda = a + b\sqrt{-1}, \quad \text{so wird}$$
$$\mu = p + q\sqrt{-1},$$

d hierbey ist:

$$p^2 - q^2 = a^2 - a - b^2 \quad \text{und}$$
$$p^2 + q^2 = \sqrt{a^2 + b^2}\,(a^2 - 2a + 1 + b^2),$$

nn aber ist

$$x^{\lambda} = x^{a}(\cos. b l x + \sqrt{-1}\sin. b l x) \quad \text{und}$$
$$e^{\mu y} = e^{py}(\cos. q y + \sqrt{-1}\sin. q y),$$

ıd hieraus ergibt sich der reelle Ausdruck:

$$= x^a e^{py}\left\{\begin{matrix} A\cos.(blx+qy) + B(2plx+(2a-1)y)\cos.(blx+qy) \\ - B(2qlx+2by)\sin.(blx+qy) \\ \mathfrak{A}\sin.(blx+qy) + \mathfrak{B}(2plx+(2a-1)y)\sin.(blx+qy) \\ + \mathfrak{B}(2qlx+2by)\cos.(blx+qy) \end{matrix}\right\}$$

› die Größen a und b nach Belieben angenommen werden können, ›durch sich zugleich die Werthe von p und q ergeben. Wenn wir

hier die Größen b und q als gegeben betrachten, so werden die beyden übrigen a und p aus denselben so bestimmt, daß

$$2a - 1 = q\sqrt{\left[\frac{1}{q^2 - b^2} - 4\right]} \text{ und } p = \frac{b}{2}\sqrt{\left[\frac{1}{q^2 - b^2} - 4\right]}$$

wird; es muß also hier $q^2 > b^2$ und $q^2 < b^2 + \frac{1}{4}$ seyn, oder q^2 zwischen den engen Grenzen b^2 und $b^2 + \frac{1}{4}$ liegen. Man setze

$$q = c \quad \text{und} \quad \sqrt{\left[\frac{1}{q^2 - b^2} - 4\right]} = 2f,$$

so daß

$$\frac{1}{q^2 - b^2} = 4(1 + f^2) \quad \text{oder} \quad c^2 - b^2 = \frac{1}{4(1 + f^2)}$$

$$2a - 1 = 2cf \quad \text{und} \quad p = bf$$

wird, und es wird daher die Form der particulären Integralien seyn:

$$z = x^{cf + \frac{1}{2}} e^{bfy} \left\{ \begin{array}{r} A \cos.(blx + cy) + 2Bf(blx + cy) \cos.(blx + cy) \\ - 2B(clx + by) \sin.(blx + cy) \\ \mathfrak{A} \sin.(blx + cy) + 2\mathfrak{B}f(bly + cy) \sin.(blx + cy) \\ + 2\mathfrak{B}(clx + by) \cos.(blx + cy) \end{array} \right\}$$

welche sich, wenn Kürze halber der Winkel $blx + cy = \varphi$ gesetzt wird, in folgende verwandelt:

$$z = x^{cf + \frac{1}{2}} e^{bfy} \left(A \cos.(\varphi + \alpha) + Bf(blx + cy) \sin.(\varphi + \beta) \right.$$
$$\left. + B(clx + by) \cos.(\varphi + \beta) \right),$$

wo die Größen b, c, A, B, α, β unserer Willkür überlassen sind.

Anmerkung 3.

§. 348. Die Auflösung der Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = x^2 \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$$

läßt sich so durchführen, daß man

$$z = x^\lambda e^{\mu y} (mlx + ny)$$

setzt, wodurch

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \lambda x^{\lambda - 1} e^{\mu y} (mlx + ny) + m x^{\lambda - 1} e^{\mu y} \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \mu x^\lambda e^{\mu y} (mlx + ny) + n x^\lambda e^{\mu y}$$

wird, daher weiter durch Differenziation

$$\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) = x^{\lambda-2} e^{\mu y} \left(m(2\lambda - 1) + \lambda(\lambda - 1) m l x + \lambda(\lambda - 1) n y\right)$$

und

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = x^{\lambda} e^{\mu y} \left(2\mu n + \mu^2 m l x + \mu^2 n y\right).$$

Und daher ergibt sich erstens

$$\mu = \sqrt{\lambda(\lambda - 1)}, \quad \text{dann}$$

$$2 n \sqrt{\lambda(\lambda - 1)} = m(2\lambda - 1), \quad \text{so daß}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{2\sqrt{\lambda(\lambda - 1)}}{2\lambda - 1}$$

wird; und auf diese Art erhält man dieselbe Integration, welche wir früher angegeben haben.

Kapitel V.
Besondere Transformation derselben Gleichungen.

Aufgabe 56.

§. 349. Wenn die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = P \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) + Q \left(\frac{d z}{d x}\right) + R z,$$

in welcher P, Q, R Functionen von x allein bezeichnen sollen, gegeben ist, sie mittelst der Substitution

$$z = M \left(\frac{d v}{d x}\right) + N v,$$

wo auch M und N bloß Functionen von x seyn sollen, in eine andere Gleichung von derselben Form zu verwandeln, so daß man erhält:

$$\left(\frac{d^2 v}{d y^2}\right) = F \left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) + G \left(\frac{d v}{d x}\right) + H v,$$

wobey F, G, H, Functionen von x allein sind.

Auflösung.

Weil die Größen M und N kein y enthalten, so wird man haben:

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = M \left(\frac{d^3 v}{d x d y^2}\right) + N \left(\frac{d^2 v}{d y^2}\right),$$

welche Form, vermöge der Gleichung, welche unserer Annahme gemäß endlich zum Vorschein kommt, in folgende übergeht:

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = MF \left(\frac{d^3 v}{d x^3}\right) + \begin{matrix}\frac{M dF}{dx} \\ + MG \\ + NF\end{matrix} \left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) + \begin{matrix}\frac{M dG}{dx} \\ + MH \\ + NG\end{matrix} \left(\frac{d v}{d x}\right) + \begin{matrix}\frac{M dH}{dx} \\ + NH\end{matrix} v;$$

dann aber gibt unsere Substitution für das andere Glied der vorgelegten Gleichung

$$\left(\frac{d z}{d x}\right) = M \left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) + \begin{matrix}\frac{dM}{dx} \\ + N\end{matrix} \left(\frac{d v}{d x}\right) + \frac{dN}{dx} v$$

und daher ferner

$$\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) = M \left(\frac{d^3 v}{d x^3}\right) + \left(\frac{2 d M}{d x} + N\right) \left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) + \left(\frac{d^2 M}{d x^2} + \frac{2 d N}{d x^2}\right) \left(\frac{d v}{d x}\right) + \frac{d^2 N}{d x^2} v.$$

Da nun der Voraussetzung gemäß

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = P \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) + Q \left(\frac{d z}{d x}\right) + R z$$

ist, so werden, wenn die eben gefundenen Werthe substituirt, und die einzelnen Glieder $\left(\frac{d^3 v}{d x^3}\right)$; $\left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right)$; $\left(\frac{d v}{d x}\right)$ und v auf Null gebracht werden, folgende vier Gleichungen entstehen, nämlich:

aus	ergibt sich die Gleichung
$\left(\frac{d^3 v}{d x^3}\right)$	$MF = MP$
$\left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right)$	$\frac{MdF}{dx} + MG + NF = \left(\frac{2dM}{dx} + N\right) P + MQ$
$\left(\frac{d v}{d x}\right)$	$\frac{MdG}{dx} + MH + NG = \left(\frac{d^2M}{dx^2} + \frac{2dN}{dx}\right) P + \left(\frac{dM}{dx} + N\right) Q + MR$
v	$\frac{MdH}{dx} + NH = \frac{d^2N}{dx^2} P + \frac{dN}{dx} Q + NR,$

woraus äußerst bequem zuerst P, Q und R gefunden werden; allein die erste gibt sogleich $P = F$, und daher wird die zweyte

$$\frac{M d F - 2 F d M}{M d x} + G = Q;$$

aus den beyden letzten aber erhält man durch Elimination der Größe R

$$\frac{M (N d G - M d H)}{d x} + N^2 G = \left(\frac{N d^2 M - M d^2 N}{d x^2} + \frac{2 N d N}{d x}\right) F + \left(\frac{N d M - M d N}{d x} + N^2\right) Q,$$

und durch Substitution jenes Werthes für Q:

$$o = \frac{M^2 d H}{d x} - \frac{M N d G}{d x} + \left(\frac{N d^2 M - M d^2 N}{d x^2}\right) F + \frac{2 N F d N}{d x} + \frac{N d M - M d N}{d x} G + \left(\frac{N d M - M d N}{d x^2}\right) dF + \frac{N^2 d F}{d x} - 2 F d M \frac{N d M - M d N}{M d x^2} - \frac{2 N^2 F d M}{M d x}.$$

Wird diese Gleichung durch $\frac{d x}{M^2}$ multiplicirt, so läßt sie sich bequem in-

tegriren, und man erhält das Integrale

$$C = H - \frac{N}{M} G + \frac{N\,dM - M\,dN}{M^2\,dx} F + \frac{N^2 F}{M^2}.$$

Wenn wir also Kürze halber $N = Ms$ setzen, so wird

$$C = H - Gs - F\frac{ds}{dx} + Fs^2 \quad \text{oder}$$

$$ds + \frac{G}{F} s\,dx - s^2 dx + \frac{(C-H)\,dx}{F} = o,$$

oder man bestimme hieraus die Größe $s = \frac{N}{M}$ oder eine der Functionen F, G und H, so werden sich für die vorgelegte Gleichung die Größen P, Q und R so bestimmen, daß

$$\text{I. } P = F$$

$$\text{II. } Q = G + \frac{dF}{dx} - \frac{2F\,dM}{M\,dx}$$

ist, und aus der letzten Gleichung findet man:

$$R = H + \frac{M\,dH}{N\,dx} - \frac{F\,d^2N}{N\,dx^2} - \frac{dN}{N\,dx}\left(G + \frac{dF}{dx} - \frac{2F\,dM}{M\,dx}\right),$$

welcher Werth wegen $N = Ms$ übergeht in:

$$R = H + \frac{dH}{s\,dx} - \frac{G\,ds}{s\,dx} - \frac{G\,dM}{M\,dx} - \frac{F\,d^2s}{s\,dx^2} - \frac{F\,d^2M}{M\,dx^2}$$
$$+ \frac{2F\,dM^2}{M^2\,dx^2} - \frac{dF\,ds}{s\,dx^2} - \frac{dF\,dM}{M\,dx^2},$$

und da die gefundene Gleichung, wenn sie differenzirt wird,

$$o = dH - G\,ds - s\,dG - \frac{F\,d^2s}{dx} - \frac{dF\,ds}{dx} + 2Fs\,ds + s^2 dF$$

gibt, so wird man erhalten:

$$\text{III. } R = H - \frac{G\,dM}{M\,dx} + \frac{dG}{dx} - \frac{F\,d^2M}{M\,dx^2} - \frac{2F\,ds}{dx}$$
$$+ \frac{2F\,dM^2}{M^2\,dx^2} - \frac{s\,dF}{dx} - \frac{dF\,dM}{M\,dx^2},$$

und daher wird, wenn die Gleichung

$$\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = F\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + G\left(\frac{dv}{dx}\right) + Hv$$

die Auflösung gestattet, auch die Auflösung folgender Gleichung gelingen:

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = P\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + Q\left(\frac{dz}{dx}\right) + Rz,$$

denn es wird

$$z = M\left(\frac{dv}{dx}\right) + Nv = M\left(sv + \left(\frac{dv}{dx}\right)\right).$$

Zusatz 1.

§. 350. Wird $M = 1$ gesetzt, so daß $z = sv + \left(\frac{dv}{dx}\right)$, so wird man haben:

$$P = F,\quad Q = G + \frac{dF}{dx} \text{ und } R = H + \frac{dG}{dx} - \frac{2Fds - sdF}{dx},$$

und auf diese Art wird die Anwendung jener Reduction nicht eingeschränkt; weil, wenn dann Mz statt z gesetzt wird, auch die Auflösung der daraus entstandenen Gleichung in unserer Macht ist.

Zusatz 2.

§. 351. So oft also die Auflösung der Gleichung

$$\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = F\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + G\left(\frac{dv}{dx}\right) + Hv$$

in unserer Gewalt steht, so oft gelingt auch die Auflösung der Gleichung

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = F\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \left(G + \frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(H + \frac{dG}{dx} - \frac{2Fds - sdF}{dx}\right)z,$$

wenn man nur die Größe s aus der Gleichung

$$Fds + Gsdx - Fs^2dx + (C - H)\,dx = 0$$

bestimmt, denn dann wird man erhalten $z = sv + \left(\frac{dv}{dx}\right)$; es sind aber die Größen F, G, H bloß Functionen von x.

Anmerkung.

§. 352. Diese Reduction scheint die natürlichste Methode darzubiethen, solche Integrationen auszuführen, bey welchen zugleich die Differenzialien der Functionen erscheinen; denn es sey das Integrale der für v gegebenen Gleichung $v = \varphi(t)$, wobey t eine Function von x und y ist, so wird man wegen $dv = dt\varphi'(t)$ erhalten:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = \left(\frac{dt}{dx}\right)\varphi'(t),$$

und wir werden als Integrale der hieraus abgeleiteten Gleichung für z finden:

$$z = s\varphi(t) + \left(\frac{dt}{dx}\right)\varphi'(t).$$

Wenn man ferner allgemeiner $v = u\varphi(t)$ setzt, so wird man haben:

$$s = su\varphi(t) + \left(\frac{du}{dx}\right)\varphi(t) + u\left(\frac{dt}{dx}\right)\varphi'(t),$$

und hieraus leuchtet nun die Art und Weise ein, zu solchen Gleichungen zu gelangen, deren Integralien außer der Function $\varphi(t)$ auch die durch Differenziation derselben entstandenen Functionen $\varphi'(t)$ und sogar auch die folgenden $\varphi''(t)$, $\varphi'''(t)$ ꝛc. enthalten. Es wird sich deßhalb der Mühe lohnen, diese Reduction näher zu untersuchen.

Aufgabe 57.

§. 353. Wenn die Auflösung der Gleichung

$$\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{n}{x^2}v$$

als bekannt angesehen wird, eine andere Gleichung von der Form

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = P\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + Q\left(\frac{dz}{dx}\right) + Rz$$

aufzufinden, für welche die Relation Statt findet:

$$z = sv + \left(\frac{dv}{dx}\right).$$

Auflösung.

Vergleicht man diese Aufgabe mit der vorhergehenden, so findet man

$$F = 1,\quad G = \frac{m}{x}\quad \text{und}\quad H = \frac{n}{x^2},$$

daher muß die Größe s aus folgender Gleichung bestimmt werden:

$$ds + \frac{msdx}{x} - s^2dx + \left(f - \frac{n}{x^2}\right)dx = 0,$$

und hat man diese gefunden, so wird, wegen $\frac{dG}{dx} = -\frac{m}{x^2}$ die gesuchte Gleichung

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{n-m}{x^2} - \frac{2ds}{dx}\right)z,$$

oder wenn man den hieraus für ds gefundenen Werth substituirt:

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(2f - \frac{m-n}{x^2} + \frac{2ms}{x} - 2s^2\right)z,$$

ür welche die Relation Statt hat:

$$z = sv + \left(\frac{dv}{dx}\right).$$

I. Setzen wir zuerst die constante Größe $f = o$, so ist:

$$ds + \frac{msdx}{x} - s^2 dx - \frac{ndx}{x^2} = o,$$

welche Gleichung $s = \frac{\alpha}{x}$ zum particulären Integrale hat, wobey

$- \alpha + m\alpha - \alpha^2 - n = o$ oder $\alpha^2 - (m-1)\alpha + n = o$

ist, und aus dieser Gleichung erhält man, weil $\frac{ds}{dx} = \frac{-\alpha}{x^2}$ ist, folgende:

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{2\alpha - m + n}{x^2} z,$$

ür welche

$$z = \frac{\alpha}{x} v + \frac{dv}{dx}$$

ist, oder schließt man $n = \alpha(m - 1 - \alpha)$ aus, so wird, wenn man die Auflösung der Gleichung

$$\left(\frac{d^2 v}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{\alpha(m - 1 - \alpha)}{x^2} v.$$

ngibt, für diese:

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{(\alpha - 1)(m - \alpha)}{x^2} z,$$

das Integrale

$$z = \frac{\alpha}{x} v + \left(\frac{dv}{dx}\right)$$

seyn.

II. Es bleibe $f = o$, und wir wollen für s den vollständigen Werth suchen, indem wir $s = \frac{\alpha}{x} + \frac{1}{t}$ setzen, so werden wir finden wegen

$$n = (m - 1)\alpha - \alpha^2; \quad dt + \frac{(2\alpha - m)tdx}{x} + dx = o,$$

welche Gleichung mit $x^{2\alpha - m}$ multiplicirt und integrirt

$$t = \frac{cx^{m - 2\alpha}}{2\alpha - m + 1} - \frac{x}{2\alpha - m + 1}$$

gibt; daher

hier die Größen b und q als gegeben betrachten, so werden die bey[den] übrigen a und p aus denselben so bestimmt, daß

$$2a - 1 = q\sqrt{\left[\frac{1}{q^2 - b^2} - 4\right]} \text{ und } p = \frac{b}{2}\sqrt{\left[\frac{1}{q^2 - b^2} - 4\right]}$$

wird; es muß also hier $q^2 > b^2$ und $q^2 < b^2 + \frac{1}{4}$ seyn, oder [q²] zwischen den engen Grenzen b^2 und $b^2 + \frac{1}{4}$ liegen. Man setze

$$q = c \text{ und } \sqrt{\left[\frac{1}{q^2 - b^2} - 4\right]} = 2f,$$

so daß

$$\frac{1}{q^2 - b^2} = 4(1 + f^2) \text{ oder } c^2 - b^2 = \frac{1}{4(1 + f^2)}$$

$$2a - 1 = 2cf \text{ und } p = bf$$

wird, und es wird daher die Form der particulären Integralien seyn:

$$z = x^{cf + \frac{1}{2}} e^{bfy} \left\{ \begin{array}{l} A\cos.(blx + cy) + 2Bf(blx + cy)\cos.(blx + cy) \\ \qquad - 2B(clx + by)\sin.(blx + cy) \\ \mathfrak{A}\sin.(blx + cy) + 2\mathfrak{B}f(bly + cy)\sin.(blx + cy) \\ \qquad + 2\mathfrak{B}(clx + by)\cos.(blx + cy) \end{array} \right.$$

welche sich, wenn Kürze halber der Winkel $blx + cy = \varphi$ gesetzt wird, in folgende verwandelt:

$$z = x^{cf + \frac{1}{2}} e^{bfy} (A\cos.(\varphi + \alpha) + Bf(blx + cy)\sin.(\varphi + \beta) + B(clx + by)\cos.(\varphi + \beta)),$$

wo die Größen b, c, A, B, α, β unserer Willkür überlassen sind.

Anmerkung 3.

§. 348. Die Auflösung der Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = x^2 \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$$

läßt sich so durchführen, daß man

$$z = x^\lambda e^{\mu y} (mlx + ny)$$

setzt, wodurch

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \lambda x^{\lambda - 1} e^{\mu y} (mlx + ny) + m x^{\lambda - 1} e^{\mu y} \text{ und}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \mu x^\lambda e^{\mu y} (mlx + ny) + n x^\lambda e^{\mu y}$$

wird, daher weiter durch Differenziation

$$ds + \frac{msdx}{x} - s^2dx - \frac{\alpha(m-1-\alpha)dx}{x^2} + \frac{dx}{a^2} = 0,$$

ıd diese Gleichung geht für $s = \frac{\alpha}{x} + \frac{1}{t}$ in

$$dt - \frac{(m-2\alpha)tdx}{x} + dx = \frac{t^2}{a^2}dx$$

ber. Sey $m - 2\alpha = \gamma$, damit die gegebene Gleichung wird:

$$\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \frac{2\alpha+\gamma}{x}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{\alpha(\alpha+\gamma-1)}{x^2}v,$$

nd hat man die Größe s gefunden, so erhält man folgende Gleichung:

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{2\alpha+\gamma}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{\alpha^2-3\alpha+\alpha\gamma-\gamma}{x^2} - \frac{2ds}{dx}\right)z$$

der

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{2\alpha+\gamma}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{(\alpha-1)(\alpha+\gamma)}{x^2} + \frac{2dt}{t^2dx}\right)z,$$

ir welche

$$z = \left(\frac{a}{x}+\frac{1}{t}\right)v + \left(\frac{dv}{dx}\right)$$

, wobey es nur darauf ankömmt, die Größe t aus der Gleichung

$$dt - \frac{\gamma tdx}{x} + dx = \frac{t^2}{a^2}dx$$

ı finden. Zu diesem Zwecke setze man $t = a - \frac{a^2du}{udx}$, und man ıdet:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\gamma du}{xdx} - \frac{2du}{adx} + \frac{\gamma u}{ax} = 0,$$

nd von der zweyfachen Auflösung dieser Gleichung erhält man die eine, ıenn man

$$u = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \dots$$

ȷt, wobey

$$B = \frac{\gamma A}{\gamma a};\quad C = \frac{(\gamma-2)B}{2(\gamma-1)a};\quad D = \frac{(\gamma-4)C}{3(\gamma-2)a};\quad E = \frac{(\gamma-6)D}{4(\gamma-3)a}\dots$$

t, die andere aber, wenn man

$$= Ax^{\gamma+1} + Bx^{\gamma+2} + Cx^{\gamma+3} + Dx^{\gamma+4} + Ex^{\gamma+5}\dots$$

immt, wo

$$B = \frac{(\gamma+2)A}{(\gamma+2)a};\quad C = \frac{(\gamma+1)B}{2(\gamma+3)a};\quad D = \frac{(\gamma+6)C}{3(\gamma+4)a};\quad E = \frac{(\gamma+8)D}{4(\gamma+5)a};\dots$$

ist; die erstere hiervon bricht ab, wenn γ eine ganze gerade positive, die letztere aber, wenn γ eine negative Zahl ist. Obschon diese Werthe nur particulär sind, so haben wir doch oben schon gezeigt, wie man hieraus die vollständigen finden könne.

Zusatz 1.

§. 354. Wir haben aber oben (§. 333) gesehen, daß die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 v}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) + \frac{2m}{x}\left(\frac{d v}{d x}\right) + \frac{(m + k)(m - k - 1)}{x^2} v$$

integrabel sey, wenn k was immer für eine ganze Zahl ist, und daher schließen wir, daß die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 v}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{d v}{d x}\right) + \frac{\alpha(m - 1 - \alpha)}{x^2} v$$

die Integration gestatte, so oft entweder

$$\alpha = \tfrac{1}{2}m + k \quad \text{oder} \quad \alpha = \tfrac{1}{2}m - k - 1 \quad \text{oder} \quad m - 2\alpha$$

eine ganze, gerade, positive oder negative Zahl ist; diese Fälle stimmen wegen $m - 2\alpha = \gamma$ mit den Fällen der Integrabilität für die Bestimmung des allgemeinen Werthes von s überein.

Zusatz 2.

§. 355. Wenn man aber aus dieser Gleichung die Function v bestimmen kann, so werden sich auch die folgenden zwey ihr ähnlichen Gleichungen auflösen lassen:

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{d z}{d x}\right) + \frac{(\alpha - 1)(m - \alpha)}{x^2} z \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{d z}{d x}\right) + \frac{(\alpha + 2)(m - \alpha - 1)}{x^2} z,$$

denn für die erstere hat man:

$$z = \frac{\alpha}{x} v + \left(\frac{d v}{d x}\right),$$

für die letztere aber:

$$z = \frac{m - \alpha - 1}{x} v + \left(\frac{d v}{d x}\right).$$

Zusatz 3.

§. 356. Überdieß lassen sich auch Gleichungen einer anderen Art, bey welchen das letzte Glied nicht die Form $\frac{n}{x^2} z$ hat, auflösen, und

e werden gefunden, wenn man den Werth der Größe s allgemeiner
immt, und auch die Constante f berücksichtigt.

Beyspiel 1.

§. 357. Die Gleichung $\left(\frac{d^2 v}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$, für welche

$$v = \pi (x + y) + \varphi (x - y)$$

, sey gegeben; man suche die verwickelteren Glei-
ıngen auf, welche sich mit Hülfe derselben integri-
n lassen.

Da hier $F = 1$, $G = o$ und $H = o$ ist, so löse man die
eichung

$$ds - s^2 dx + C dx = o$$

:, und die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) - \frac{2 ds}{dx} z$$

rd dann seyn:

$$z = sv + \left(\frac{dv}{dx}\right).$$

Wird aber zuerst die Constante $C = o$ genommen, so wird
$= dx$ und $\frac{1}{s} = c - x$, oder $s = \frac{1}{c - x}$ und $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{(c - x)^2}$,
man zwar ohne alle Einschränkung $c = o$ setzen kann, damit der
eichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) - \frac{2}{x^2} z$$

tegrale wird:

$$= -\frac{1}{x} (\pi (x + y) + \varphi (x - y)) + \pi' (x + y) + \varphi' (x - y).$$

Sey ferner $C = a^2$, so wird man, weil $ds = dx (s^2 - a^2)$
, erhalten:

$$x = \frac{1}{2a} l \frac{s - a}{s + a},$$

d daher

$$\frac{s - a}{s + a} = A e^{2ax} \text{ und } s = \frac{a (1 + A e^{2ax})}{1 - A e^{2ax}},$$

o

$$\frac{ds}{dx} = \frac{4 A a^2 e^{2ax}}{(1 - A e^{2ax})^2},$$

ist; die erstere hiervon bricht ab, wenn γ eine ganze gerade positive, die letztere aber, wenn γ eine negative Zahl ist. Obschon diese Werthe nur particulär sind, so haben wir doch oben schon gezeigt, wie man hieraus die vollständigen finden könne.

Zusatz 1.

§. 354. Wir haben aber oben (§. 333) gesehen, daß die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 v}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) + \frac{2 m}{x}\left(\frac{d v}{d x}\right) + \frac{(m + k)(m - k - 1)}{x^2} v$$

integrabel sey, wenn k was immer für eine ganze Zahl ist, und daher schließen wir, daß die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 v}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{d v}{d x}\right) + \frac{\alpha (m - 1 - \alpha)}{x^2} v$$

die Integration gestatte, so oft entweder

$$\alpha = \tfrac{1}{2} m + k \quad \text{oder} \quad \alpha = \tfrac{1}{2} m - k - 1 \quad \text{oder} \quad m - 2\alpha$$

eine ganze, gerade, positive oder negative Zahl ist; diese Fälle stimmen wegen $m - 2\alpha = \gamma$ mit den Fällen der Integrabilität für die Bestimmung des allgemeinen Werthes von s überein.

Zusatz 2.

§. 355. Wenn man aber aus dieser Gleichung die Function v bestimmen kann, so werden sich auch die folgenden zwey ihr ähnlichen Gleichungen auflösen lassen:

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{d z}{d x}\right) + \frac{(\alpha - 1)(m - \alpha)}{x^2} z \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{d z}{d x}\right) + \frac{(\alpha + 2)(m - \alpha - 1)}{x^2} z,$$

denn für die erstere hat man:

$$z = \frac{\alpha}{x} v + \left(\frac{d v}{d x}\right),$$

für die letztere aber:

$$z = \frac{m - \alpha - 1}{x} v + \left(\frac{d v}{d x}\right).$$

Zusatz 3.

§. 356. Überdieß lassen sich auch Gleichungen einer anderen Art, bey welchen das letzte Glied nicht die Form $\frac{n}{x^2} z$ hat, aus un-

diese werden gefunden, wenn man den Werth der Größe s allgemeiner bestimmt, und auch die Constante f berücksichtigt.

Beyspiel 1.

§. 357. Die Gleichung $\left(\frac{d^2 v}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$, für welche

$$v = \pi(x + y) + \varphi(x - y)$$

ist, sey gegeben; man suche die verwickelteren Gleichungen auf, welche sich mit Hülfe derselben integriren lassen.

Da hier $F = 1$, $G = 0$ und $H = 0$ ist, so löse man die Gleichung

$$ds - s^2 dx + C dx = 0$$

auf, und die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) - \frac{2 ds}{dx} z$$

wird dann seyn:

$$z = sv + \left(\frac{dv}{dx}\right).$$

Wird aber zuerst die Constante $C = 0$ genommen, so wird $\frac{ds}{s^2} = dx$ und $\frac{1}{s} = c - x$, oder $s = \frac{1}{c - x}$ und $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{(c - x)^2}$, wo man zwar ohne alle Einschränkung $c = 0$ setzen kann, damit der Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) - \frac{2}{x^2} z$$

Integrale wird:

$$z = -\frac{1}{x}(\pi(x + y) + \varphi(x - y)) + \pi'(x + y) + \varphi'(x - y).$$

Sey ferner $C = a^2$, so wird man, weil $ds = dx(s^2 - a^2)$ ist, erhalten:

$$x = \frac{1}{2a} l \frac{s - a}{s + a},$$

und daher

$$\frac{s - a}{s + a} = A e^{2ax} \quad \text{und} \quad s = \frac{a(1 + A e^{2ax})}{1 - A e^{2ax}},$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{4 A a^2 e^{2ax}}{(1 - A e^{2ax})^2},$$

und die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) - \frac{8 A a^2 e^{2ax}}{(1 - A e^{2ax})^2} z$$

hat das Integrale

$$z = \frac{a (1 + A e^{2ax})}{1 - A e^{2ax}} v + \left(\frac{dv}{dx}\right).$$

Sey endlich $C = - a^2$, so wird, wegen $ds = dx (a^2 + s^2)$

$$a x + b = \text{arc. tang.} \frac{s}{a},$$

und daher

$$s = a \text{ tang.} (a x + b) \quad \text{und} \quad \frac{ds}{dx} = \frac{a^2}{\cos. (a x + b)^2};$$

demnach entspricht der Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) - \frac{2 a^2}{\cos. (a x + b)^2} z$$

das Integrale:

$$z = \frac{a \sin. (a x + b)}{\cos. (a x + b)} v + \left(\frac{dv}{dx}\right).$$

Beyspiel 2.

§. 358. Die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 v}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) - \frac{2}{x^2} v$$

sey gegeben, und ihr Integrale bekannt; man soll mit Hülfe derselben andere integrable Gleichungen auffinden.

In diesem Falle haben wir

$$ds - s^2 dx + \left(C + \frac{2}{x^2}\right) dx = 0,$$

und ist diese aufgelöst, so wird das Integrale der Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) - 2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{ds}{dx}\right) z$$

seyn:

$$z = s v + \left(\frac{dv}{dx}\right).$$

I. Sey erstlich $C = 0$, und man erhalte aus der Gleichung

$$ds - s^2 dx + \frac{2 dx}{x^2} = 0$$

en particulären Werth $s = \frac{1}{x}$ oder $s = -\frac{2}{x}$. Man setze nun

$$s = \frac{1}{x} + \frac{1}{t},$$

o wird man erhalten:

$$dt + \frac{2tdx}{x} + dx = 0,$$

aher

$$tx^2 + \tfrac{1}{3}x^3 = \tfrac{1}{3}a^3;$$

lso

$$t = \frac{a^3 - x^3}{3x^2} \quad \text{und} \quad s = \frac{a^3 + 2x^3}{x(a^3 - x^3)},$$

olglich:

$$\frac{ds}{dx} + \frac{1}{x^2} = \frac{3x(2a^3 + x^3)}{(a^3 - x^3)^2},$$

nd das Integrale der Gleichung

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - \frac{6x(2a^3 + x^3)}{(a^3 - x^3)^2}z$$

wird daher seyn:

$$z = \frac{a^3 + 2x^3}{x(a^3 - x^3)}v + \left(\frac{dv}{dx}\right).$$

II. Sey $C = \frac{1}{c^2}$, und setzt man $s = \frac{1}{x} + \frac{1}{t}$, so wird

$$dt + \frac{2tdx}{x} + dx = \frac{t^2dx}{c^2},$$

elcher Gleichung der particuläre Werth $t = c + \frac{c^2}{x}$, entspricht, so daß

$$s = \frac{c^2 + cx + x^2}{cx(c + x)} \quad \text{und} \quad \frac{ds}{dx} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(c + x)^2}$$

:, und der Gleichung

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - \frac{2}{(c + x)^2}z$$

ntspricht das Integrale

$$z = \frac{c^2 + cx + x^2}{cx(c + x)}v + \left(\frac{dv}{dx}\right).$$

Um nun das vollständige Integrale für t zu finden, setze man

$$t = c + \frac{c^2}{x} + \frac{1}{u},$$

nd man wird erhalten:

$$du + \frac{2u\,dx}{c} + \frac{dx}{c^2} = 0 \quad \text{oder} \quad dx = \frac{-c^2\,du}{1+2cu},$$

daher

$$x = b - \frac{c}{2}\,l\,(1+2cu),$$

also

$$u = \frac{e^{\frac{2(b-x)}{c}} - 1}{2c};$$

hieraus

$$t = c + \frac{c^2}{x} + \frac{2c}{e^{\frac{2(b-x)}{c}} - 1} \quad \text{und}$$

$$s = \frac{1}{x} + \frac{x\left(e^{\frac{2(b-x)}{c}} - 1\right)}{c\left((c+x)\,e^{\frac{2(b-x)}{c}} - c + x\right)},$$

endlich,

$$\frac{ds}{dx} + \frac{1}{x^2} = \frac{-dt}{t^2\,dx} = \frac{1}{t^2}\left(1 + \frac{2t}{x} - \frac{t^2}{c^2}\right) = \frac{1}{t^2}\left(\frac{c^2}{x^2} - \frac{4\,e^{\frac{2(b-x)}{c}}}{\left(e^{\frac{2(b-x)}{c}} - 1\right)^2}\right).$$

Anmerkung.

§. 359. Weil wir oben gefunden haben, daß die Gleichung

$$\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) - \frac{k\,(k+1)}{x^2}\,v$$

die Integration zulasse, welcher Fall nämlich aus dem allgemeine Ausdrucke (§. 354) entsteht, wenn $m = 0$ genommen wird, so wir man, wenn die Aufgabe darauf bezogen wird, erhalten:

$$ds - s^2\,dx + \left(f + \frac{k\,(k+1)}{x^2}\right)dx = 0,$$

und hat man daher die Größe s gefunden, so wird der Gleichung

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \left(2f + \frac{k\,(k+1)}{x^2} - 2s^2\right)z$$

das Integrale zukommen:

$$z = sv + \left(\frac{dv}{dx}\right).$$

I. Wenn wir jetzt $f = 0$ nehmen, so wird

$$s = \frac{k}{x} \quad \text{oder} \quad s = \frac{-k-1}{x}$$

ein particulärer Werth seyn, und daher wird zwar die Form der integrabeln Gleichung nicht geändert, allein für $s = \frac{k}{x} + \frac{1}{t}$ ergibt sich die Gleichung

$$dt + \frac{2ktdx}{x} + dx = o,$$

deren Integrale ist:

$$x^{2k}t + \frac{1}{2k+1}x^{2k+1} = \frac{g}{2k+1},$$

und daher

$$s = \frac{kg + (k+1)x^{2k+1}}{x(g - x^{2k+1})},$$

und die integrable Gleichung wird seyn:

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - \frac{[k(k-1)g^2 + 6k(k+1)gx^{2k+1} + (k+1)(k+2)x^{4k+2}]z}{x^2(g - x^{2k+1})^2}$$

II. Läßt man aber f nicht verschwinden, so wird $s = \frac{k}{x} + u$, und man wird erhalten:

$$-du + \frac{2kudx}{x} + u^2dx = fdx;$$

um nun diese Gleichung mit einer auflöslichen Reihe leicht in eine Differenzialgleichung des zweyten Grades zu verwandeln, setze man:

$$u = \sqrt{f} - \frac{k}{x} - \frac{dr}{rdx},$$

und man erhält:

$$\frac{d^2r}{dx^2} - \frac{2dr\sqrt{f}}{dx} - \frac{k(k+1)r}{x^2} = o.$$

Sey $\sqrt{f} = a$, und man setze

$$r = Ax^{k+1} + Bx^{k+2} + Cx^{k+3} + Dx^{k+4} + \ldots$$

so findet man:

$$B = \frac{2(k+1)a}{1(2k+2)}A; \quad C = \frac{2(k+2)a}{2(2k+3)}B;$$

$$D = \frac{2(k+3)a}{3(2k+4)}C; \quad E = \frac{2(k+4)a}{4(2k+5)}D; \quad \text{ꝛc.}$$

und die Gleichung bricht ab, so oft k eine ganze negative Zahl ist. Wenn man aber

$$r = Ax^{-k} + Bx^{1-k} + Cx^{2-k} + Dx^{3-k} + \ldots$$

setzt, so ergibt sich nachstehende Relation:

und die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) - \frac{8 A a^2 e^{2ax}}{(1 - A e^{2ax})^2} z$$

hat das Integrale

$$z = \frac{a (1 + A e^{2ax})}{1 - A e^{2ax}} v + \left(\frac{d v}{d x}\right).$$

Sey endlich $C = - a^2$, so wird, wegen $ds = dx (a^2 +$

$$a x + b = \text{arc. tang.} \frac{s}{a},$$

und daher

$$s = a \text{ tang.} (a x + b) \text{ und } \frac{d s}{d x} = \frac{a^2}{\cos. (a x + b)^2};$$

demnach entspricht der Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) - \frac{2 a^2}{\cos. (a x + b)^2} z$$

das Integrale:

$$z = \frac{a \sin. (a x + b)}{\cos. (a x + b)} v + \left(\frac{d v}{d x}\right).$$

Beyspiel 2.

§. 358. Die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 v}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) - \frac{2}{x^2} v$$

sey gegeben, und ihr Integrale bekannt; man mit Hülfe derselben andere integrable Gleichun auffinden.

In diesem Falle haben wir

$$d s - s^2 d x + \left(C + \frac{2}{x^2}\right) d x = 0,$$

und ist diese aufgelöst, so wird das Integrale der Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) - 2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{d s}{d x}\right) z$$

seyn:

$$z = s v + \left(\frac{d v}{d x}\right).$$

I. Sey erstlich $C = 0$, und man erhalte aus der Gleichun

$$d s - s^2 d x + \frac{2 d x}{x^2} = 0$$

$$C = -(n+1)\,a^2 = -m^2 a^2$$

ist. Jenes gefundene Integrale aber läßt sich auf folgende Form zurückführen:

$$\frac{s}{a} = -\text{tang.}\,\omega + \frac{(m^2-1)\,\text{tang.}\,m\omega}{m + \text{tang.}\,m\omega\;\text{tang.}\,\omega},$$

und die Substitution dieses Ausdruckes zeigt, daß er jener Gleichung vollkommen Genüge leiste. Schreiben wir für denselben den Buchstaben Θ und setzen $\frac{s}{a} = \Theta + \frac{1}{t}$, so werden wir für die Bestimmung des vollständigen Integrales erhalten:

$$-\frac{dt}{t^2\,d\omega} - \frac{2\Theta}{t} - \frac{1}{t^2} = 0, \text{ oder}$$

$$dt + 2\Theta t\,d\omega + d\omega = 0.$$

Es war aber gerade vorher

$$\Theta = \frac{s}{a} = -\text{tang.}\,\omega - \frac{du}{u\,d\omega},$$

und daher

$$\int\Theta\,d\omega = l\cos.\,\omega - l\,u \quad \text{und} \quad e^{2\int\Theta\,d\omega} = \frac{\cos.^2\omega}{u^2},$$

welches der Factor für jene Gleichung ist, und so wird

$$\frac{t\cos.^2\omega}{u^2} = C - \int\frac{d\omega\,\cos.^2\omega}{u^2};$$

es ist aber

$$u = 2m\cos.\,m\omega\,\cos.\,\omega + 2\sin.\,m\omega\,\sin.\,\omega,$$

und daher

$$\frac{t}{(m\cos.\,m\omega + \sin.\,m\omega\,\text{tang.}\,\omega)^2} = A - \int\frac{d\omega}{(m\cos.\,m\omega + \sin.\,m\omega\,\text{tang.}\,\omega)^2},$$

und das Integrale des letzten Gliedes ist:

$$\frac{-m\,\text{tang.}\,m\omega + \text{tang.}\,\omega}{m(m^2-1)(m+\text{tang.}\,m\omega\,\text{tang.}\,\omega)} = \frac{-m\sin.\,m\omega + \text{tang.}\,\omega\,\cos.\,m\omega}{m(m^2-1)(m\cos.\,m\omega + \sin.\,m\omega\,\text{tang.}\,\omega)}$$

so daß

$$\frac{t}{(m\cos.\,m\omega+\sin.\,m\omega\,\text{tang.}\,\omega)^2} = A + \frac{\cos.\,m\omega\,\text{tang.}\,\omega - m\sin.\,m\omega}{m(m^2-1)(m\cos.\,m\omega+\sin.\,m\omega\,\text{tang.}\,\omega)}$$

ist, oder

$$\frac{1}{t} = \frac{m(m^2-1)}{\left\{\begin{matrix}[C(m\cos.\,m\omega + \sin.\,m\omega\,\text{tang.}\,\omega) + \cos.\,m\omega\,\text{tang.}\,\omega - m\sin.\,m\omega] \\ (m\cos.\,m\omega + \sin.\,m\omega\,\text{tang.}\,\omega)\end{matrix}\right\}},$$

hierzu addire man

$$\theta = -\,\text{tang.}\,\omega + \frac{(m^2-1)\,\text{sin.}\,m\omega}{m\,\text{cos.}\,m\omega + \text{sin.}\,m\omega\,\text{tang.}\,\omega},$$

so daß man erhält $\frac{s}{a}$, und es wird

$$\frac{s}{a} = -\,\text{tang.}\,\omega + \frac{(m^2-1)\,(C\,\text{sin.}\,m\omega + \text{cos.}\,m\omega)}{C\,(m\,\text{cos.}\,m\omega + \text{sin.}\,m\omega\,\text{tang.}\,\omega) + \text{cos.}\,m\omega\,\text{tang.}\,\omega - m\,\text{sin.}\,m\omega}$$

oder

$$\frac{s}{a} = \frac{(m^2-1-\text{tg.}^2\omega)\,(C\,\text{sin.}\,m\omega + \text{cos.}\,m\omega) - m\,\text{tg.}\,\omega\,(C\,\text{cos.}\,m\omega - \text{sin.}\,m\omega)}{C\,(m\,\text{cos.}\,m\omega + \text{sin.}\,m\omega\,\text{tang.}\,\omega) + \text{cos.}\,m\omega\,\text{tang.}\,\omega - m\,\text{sin.}\,m\omega}.$$

Zusatz 1.

§. 361. Hier ist vorzüglich zu bemerken, daß

$$u = m\,\text{cos.}\,\omega\,\text{cos.}\,m\omega + \text{sin.}\,m\omega\,\text{sin.}\,\omega$$

ein particuläres Integrale von der Gleichung

$$\frac{d^2u}{d\omega^2} + \frac{2\,du}{d\omega}\,\text{tang.}\,\omega + (m^2-1)\,u = 0$$

ist; ein anderes particuläres Integrale aber wird auf ähnliche Weise gefunden:

$$u = m\,\text{sin.}\,m\omega\,\text{cos.}\,\omega - \text{cos.}\,m\omega\,\text{sin.}\,\omega,$$

woraus man das vollständige erhält:

$$u = A\,(m\,\text{cos.}\,m\omega\,\text{cos.}\,\omega + \text{sin.}\,m\omega\,\text{sin.}\,\omega) + B\,(m\,\text{sin.}\,m\omega\,\text{cos.}\,\omega - \text{cos.}\,m\omega\,\text{sin.}\,\omega).$$

Zusatz 2.

§. 362. Setzt man hier

$$A = C\,\text{cos.}\,\alpha \quad \text{und} \quad B = -\,C\,\text{sin.}\,\alpha,$$

so wird das vollständige Integrale auf die Form gebracht:

$$u = C\,\big(m\,\text{cos.}\,(m\omega+\alpha)\,\text{cos.}\,\omega + \text{sin.}\,(m\omega+\alpha)\,\text{sin.}\,\omega\big),$$

welches man zwar aus dem zuerst gefundenen particulären Integrale sogleich hätte schließen können, da man daselbst $m\omega + \alpha$ statt des Winkels $m\omega$ schreiben kann.

Zusatz 3.

§. 363. Daher findet man weit leichter den Werth

$$\frac{s}{a} = -\,\text{tang.}\,\omega - \frac{du}{u\,d\omega};$$

denn da

$$\frac{du}{d\omega} = - C\,(m^2 - 1)\,\sin.(m\omega + \alpha)\,\cos.\omega$$

ist, so wird man erhalten:

$$\frac{s}{a} = - \,\mathrm{tang.}\,\omega + \frac{(m^2 - 1)\,\sin.(m\omega + \alpha)\,\cos.\omega}{m\cos.(m\omega + \alpha)\,\cos.\omega + \sin.(m\omega + \alpha)\,\sin.\omega}$$

und daher

$$\frac{ds}{a\,d\omega} = \frac{ds}{a^2\,dx} = \frac{-1}{\cos.^2\omega} + \frac{(m^2 - 1)\,(m^2\cos.^2\omega - \sin.^2(m\omega + \alpha))}{[m\cos.(m\omega + \alpha)\cos.\omega + \sin.(m\omega + \alpha)\sin.\omega]^2}$$

und die Gleichung, deren Integration wir gefunden haben, wird seyn:

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) - \frac{2\,(m^2 - 1)\,a^2\,(m^2\cos.^2\omega - \sin^2(m\omega + \alpha))}{[m\cos.(m\omega + \alpha)\cos.\omega + \sin.(m\omega + \alpha)\sin.\omega]^2}\,z$$

und ihr Integrale ist:

$$z = \frac{ma^2(m\sin.(m\omega + \alpha)\sin.\omega + \cos.(m\omega + \alpha)\cos.\omega)}{m\cos.(m\omega + \alpha)\cos.\omega + \sin.(m\omega + \alpha)\sin.\omega}\,(\pi(x+y) + \varphi(x-y))$$
$$+ \frac{(m^2 - 1)\,a\,\sin.(m\omega + \alpha)\cos.\omega}{m\cos.(m\omega + \alpha)\cos.\omega + \sin.(m\omega + \alpha)\sin.\omega}\,(\pi'(x+y) + \varphi'(x-y))$$
$$+ (\pi''(x+y) + \varphi''(x-y)),$$

wobey $\omega = ax + b$ ist.

Anmerkung 1.

§. 364. Die Integration der Gleichung

$$\frac{d^2 u}{d\omega^2} + \frac{2\,du}{d\omega}\,\mathrm{tang.}\,\omega + (m^2 - 1)\,u = 0$$

ist allerdings merkwürdig, und ich werde daher die Gelegenheit benutzen, folgende allgemeinere Gleichung zu behandeln:

$$\frac{d^2 u}{d\omega^2} + \frac{2f\,du}{d\omega}\,\mathrm{tang.}\,\omega + gu = 0,$$

und ich bemerke zuerst, daß diese Gleichung, wenn

$$\frac{du}{u} = -(2f + 1)\,d\omega\,\mathrm{tang.}\,\omega + \frac{dv}{v}$$

gesetzt wird, so daß

$$u = \cos.\omega^{2f+1}\,v$$

wird, übergehe in die Gleichung

$$\frac{d^2 v}{d\omega^2} - \frac{2(f+1)\,dv}{d\omega}\,\mathrm{tang.}\,\omega + (g - 2f - 1)\,v = 0,$$

so daß, wenn dieselbe für $f = n$ integrabel ist, auch für $f = -n - 1$

integrirt werden kann. Nun setze man für jene Gleichung

$$u = A \sin. \lambda\omega + B \sin. (\lambda + 2)\,\omega + C \sin. (\lambda + 4)\,\omega + D \sin. (\lambda + 6)\,\omega + \ldots$$

und substituire in der Gleichung

$$\frac{2\,d^2 u}{d\omega^2} \cos. \omega + \frac{4 f d u}{d\omega} \sin. \omega + 2 g u \cos. \omega = 0,$$

so findet man:

$$\begin{array}{llll}
-\lambda^2 A \sin. (\lambda - 1)\,\omega & -(\lambda+2)^2 B \sin. (\lambda+1)\,\omega & -(\lambda+4)^2 C \sin. (\lambda+3)\,\omega & -(\lambda+6)^2 D \sin. (\lambda+5)\,\omega \\
-2\lambda A f & -\lambda^2 A & -(\lambda+2)^2 B & -(\lambda+4)^2 C \\
+A g & +2\lambda A f & +2(\lambda+2) B f & +2(\lambda+4) C f \\
 & -2(\lambda+2) B f & -2(\lambda+4) C f & -2(\lambda+6) D f \\
 & +A g & +B g & +C g \\
 & +B g & +C g & +D g
\end{array}$$

Es muß also $g = \lambda^2 + 2\lambda f$ seyn, dann aber bestimmen sich die angenommenen Coefficienten auf folgende Art:

$$B = \frac{\lambda f A}{\lambda + f + 1}; \quad C = \frac{(\lambda + 1)(f - 1) B}{2(\lambda + f + 2)}; \quad D = \frac{(\lambda + 2)(f - 2) C}{3(\lambda + f + 3)}; \quad \text{ꝛc.}$$

Setzen wir also $g = m^2 - f^2$, damit $\lambda = m - f$ werde, und unsere Gleichungen übergehen in

$$\frac{d^2 u}{d\omega^2} + \frac{2 f d u}{d\omega} \operatorname{tang.} \omega + (m^2 - f^2)\, u = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{d^2 v}{d\omega^2} - \frac{2(f + 1)\, d v}{d\omega} \operatorname{tang.} \omega + (m^2 - (f + 1)^2)\, v = 0,$$

wobey

$$u = v \cos.\omega^{2f+1} \quad \text{oder} \quad v = \frac{u}{\cos.\omega^{2f+1}}$$

ist. Weil nun unsere Reihe abbricht, so oft f eine ganze Zahl bezeichnet, so wollen wir die einfacheren Fälle durchgehen.

I. Sey $f = 0$, so wird

$$\lambda = m \quad \text{und} \quad B = 0, \quad C = 0, \quad \text{etc.}$$

und daher

$$u = A \sin.m\omega \quad \text{und} \quad v = \frac{A \sin.m\omega}{\cos.\omega}.$$

II. Sey $f = 1$, so wird

$$\lambda = m - 1 \quad \text{und} \quad B = \frac{(m-1)A}{m+1}, \quad C = 0 \quad \text{etc.}$$

also

$$\frac{u}{a} = (m+1)\sin.(m-1)\omega + (m-1)\sin.(m+1)\omega \quad \text{und} \quad v = \frac{u}{\cos.^3\omega}$$

oder

$$\frac{u}{2a} = m \sin.m\omega \cos.\omega - \cos.m\omega \sin.\omega.$$

III. Für $f = 2$ wird $\lambda = m - 2$ und

$$B = \frac{2(m-2)A}{m+1}; \quad C = \frac{(m-1)B}{2(m+2)} = \frac{(m-1)(m-2)A}{(m+1)(m+2)}; \quad D = 0; \text{ etc.}$$

also

$$\frac{u}{a} = (m+1)(m+2)\sin.(m-2)\omega + 2(m-2)(m+2)\sin.m\omega + (m-1)(m-2)\sin.(m+2)\omega,$$

und daher

$$v = \frac{u}{\cos.^5\omega}, \quad \text{oder}$$

$$\frac{u}{2a} = (m^2+2)\sin.m\omega\cos.2\omega + 2(m^2-4)\sin.m\omega - 3m\cos.m\omega\sin.2\omega.$$

IV. Für $f = 3$ wird $\lambda = m - 3$ und

$$B = \frac{3(m-3)A}{m+1}; \quad C = \frac{2(m-2)B}{2(m+2)} \quad \text{und} \quad D = \frac{(m-1)C}{3(m+3)}; \quad E = 0; \text{ etc.}$$

also

$$\frac{u}{a} = +(m+1)(m+2)(m+3)\sin.(m-3)\omega + 3(m+2)(m^2-9)\sin.(m-1)\omega + (m-1)(m-2)(m-3)\sin.(m+3)\omega + 3(m-2)(m^2-9)\sin.(m+1)\omega$$

wobey $v = \frac{u}{\cos.^7\omega}$ ist.

V. Sey $f = 4$, so wird $\lambda = m - 4$, und man findet

$$\frac{u}{a} = +(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)\sin.(m-4)\omega$$
$$+4(m+2)(m+3)(m^2-16)\sin.(m-2)\omega$$
$$+(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)\sin.(m+4)\omega$$
$$+4(m-2)(m-3)(m^2-16)\sin.(m+2)\omega$$
$$+6(m^2-9)(m^2-16)\sin.m\omega,$$

wobey $v = \frac{u}{\cos.^9 \omega}$ ist; woraus das Gesetz des Fortschreitens für sich klar ist; es ist aber zweckmäßig, zu bemerken, daß, wenn wir

$$u = A\cos.\lambda\omega + B\cos.(\lambda+2)\omega + C\cos.(\lambda+4)\omega + \ldots$$

gesetzt hätten, dieselben Bestimmungen der Coefficienten zum Vorschein gekommen wären. Verbindet man demnach diese beyden Werthe mit einander, so werden sie das vollständige Integrale darstellen, welches sich auch aus der gefundenen Form ergibt, wenn man nur statt des Winkels $m\omega$ allgemeiner $m\omega + \alpha$ schreibt.

Anmerkung 2.

§. 365. Allein man kann dieselbe Gleichung

$$\frac{d^2u}{d\omega^2} + \frac{2f\,du}{d\omega}\tang.\omega + gu = 0$$

nach mehreren Methoden behandeln, und ihr Integrale durch Reihen ausdrücken, woraus sich andere Fälle der Integrabilität ergeben. Zu diesem Ende bemerke man erstlich, daß man für $u = (\sin.\omega)^\lambda$ erhalten werde:

$$\frac{du}{d\omega} = \lambda(\sin.\omega)^{\lambda-1}\cos.\omega \quad \text{und daher}$$

$$\frac{du}{d\omega}\tang.\omega = \lambda(\sin.\omega)^\lambda \quad \text{und}$$

$$\frac{d^2u}{d\omega^2} = \lambda(\lambda-1)(\sin.\omega)^{\lambda-2}\cos.^2\omega - \lambda(\sin.\omega)^\lambda$$
$$= \lambda(\lambda-1)(\sin.\omega)^{\lambda-2} - \lambda^2(\sin.\omega)^\lambda.$$

Setzen wir daher

$$u = A(\sin.\omega)^\lambda + B(\sin.\omega)^{\lambda+2} + C(\sin.\omega)^{\lambda+4} + D(\sin.\omega)^{\lambda+6} + \ldots$$

so erhalten wir nach geschehener Substitution:

$$0 = \lambda(\lambda-1)A(\sin.\omega)^{\lambda-2} + \begin{matrix}(\lambda+2)(\lambda+1)B\\ -\lambda^2 A\\ +2\lambda f A\\ +gA\end{matrix}(\sin.\omega)^\lambda + \begin{matrix}(\lambda+4)(\lambda+3)C\\ -(\lambda+2)^2 B\\ +2(\lambda+2)fB\\ +gB\end{matrix}(\sin.\omega)^{\lambda+2} + \ldots$$

hier muß entweder $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ genommen werden; dann r erhält man

$$= \frac{\lambda^2 - 2\lambda f - g}{(\lambda+1)(\lambda+2)} A; \quad C = \frac{(\lambda+2)^2 - 2(\lambda+2) f - g}{(\lambda+3)(\lambda+4)} B; \text{ ꝛc.}$$

n hat demnach die zwey Fälle zu entwickeln:

$\lambda = 0$	$\lambda = 1$
$B = \frac{-g}{1 \cdot 2} A$	$B = \frac{1 - 2f - g}{2 \cdot 3} A$
$C = \frac{4 - 4f - g}{3 \cdot 4} B$	$C = \frac{9 - 6f - g}{4 \cdot 5} B$
$D = \frac{16 - 8f - g}{5 \cdot 6} C$	$D = \frac{25 - 10f - g}{6 \cdot 7} C$
$E = \frac{36 - 12f - g}{7 \cdot 8} D$	$E = \frac{49 - 14f - g}{8 \cdot 9} D$
ꝛc.	ꝛc.

Die Integration wird also gelingen, so oft $g = k^2 - 2kf$ ist, bey k eine ganze positive Zahl bezeichnet. Da demnach für

$$u = v (\cos. \omega)^{2f+1}$$

transformirte Gleichung

$$\frac{d^2 v}{d\omega^2} - \frac{2(f+1) dv}{d\omega} \text{tang. } \omega + (g - 2f - 1) v = 0$$

, so ist diese und daher auch jene Gleichung integrabel, so oft

$$g = (k+1)^2 + 2(k+1) f,$$

lche beyde Fälle so in einem verbunden werden können, daß die Inzration gelingt, wenn $g = k^2 \pm 2kf$ ist.

Anmerkung 3.

§. 366. Da wir uns noch bey dieser Gleichung aufhalten wollen, d für $u = (\cos. \omega)^\lambda$

$$\frac{du}{d\omega} = -\lambda (\cos. \omega)^{\lambda-1} \sin. \omega$$

, und daher

$$\frac{du}{d\omega} \text{tang. } \omega = -\lambda (\cos. \omega)^{\lambda-2} + \lambda (\cos. \omega)^\lambda \quad \text{und}$$

$$\frac{d^2 u}{d\omega^2} = \lambda (\lambda - 1) (\cos. \omega)^{\lambda-2} - \lambda^2 (\cos. \omega)^\lambda$$

rd, so setzen wir

$$u = A(\cos.\omega)^{\lambda} + B(\cos.\omega)^{\lambda+2} + C(\cos.\omega)^{\lambda+4} + D(\cos.\omega)^{\lambda+6} + \ldots$$

und man wird durch Substitution dieses Werthes erhalten:

$$\begin{array}{lll} o = \lambda(\lambda-1)A(\cos.\omega)^{\lambda-2} & + (\lambda+2)(\lambda+1)B(\cos.\omega)^{\lambda} & + (\lambda+4)(\lambda+3)C(\cos\omega)^{\lambda+2} + \ldots \\ \quad - 2\lambda f A & - \lambda^2 A & - (\lambda+2)^2 B \\ & - 2(\lambda+2) f B & - 2(\lambda+4) f C \\ & + 2\lambda f A & + 2(\lambda+2) f B \\ & + g A & + g B. \end{array}$$

Es muß also entweder $\lambda = 0$ oder $\lambda = 2f + 1$ seyn; dann aber ist

$$B = \frac{\lambda^2 - 2\lambda f - g}{(\lambda+2)(\lambda+1-2f)} A; \; C = \frac{(\lambda+2)^2 - 2(\lambda+2)f - g}{(\lambda+4)(\lambda+3-2f)} B; \text{ rc.}$$

und die beyden Fälle werden sich so darstellen:

$\lambda = 0$	$\lambda = 2f + 1$
$B = \frac{-g}{2(1-2f)} A$	$B = \frac{1+2f-g}{2(2f+3)} A$
$C = \frac{4-4f-g}{4(3-2f)} B$	$C = \frac{9+6f-g}{4(2f+5)} B$
$D = \frac{16-8f-g}{6(5-2f)} C$	$D = \frac{25-10f-g}{6(2f+7)} C$
rc.	rc.

Im ersteren Falle gelingt die Integration, wenn

$$g = 4k^2 - 4kf$$

ist, in dem letztern aber, wenn

$$g = (2k+1)^2 + 2(2k+1)f$$

ist, und diese Fälle, verbunden mit jenen, welche aus der transformirten Gleichung sich ergeben, laufen auf dasselbe hinaus, wie die im vorigen Paragraph gefundenen. Alle bisher gefundenen Fälle der Integrabilität werden demnach darauf zurückgeführt, daß, wenn $g = m^2 - f^2$ gesetzt wird, entweder $f = \pm k$ oder $m = k \pm f$, d. i. entweder $f = \pm k$ oder $f = \mp k \pm m$ wird. Übrigens folgen diese letztern Fälle auch aus der erstern Auflösung (§. 364), wo die Reihe ebenfalls abbricht, wenn $\lambda = -k$ und daher

$$g = m^2 - f^2 = k^2 - 2kf,$$

also $k - f = \pm m$, und wenn man die Transformation zu Hülfe nimmt, $f = \mp k \pm m$ wird. Im entgegengesetzten Falle aber kommen die anfangs gefundenen Fälle in den letztern Auflösungen nicht vor.

Aufgabe 59.

§. 367. Die Integration der Gleichung

$$\left(\frac{d^2 v}{d y^2}\right) = F \left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) + G \left(\frac{d v}{d x}\right) + H v$$

y bekannt; man suche eine Gleichung von der Form

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = P \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) + Q \left(\frac{d z}{d x}\right) + R z,$$

r welche

$$z = \left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) + r \left(\frac{d v}{d x}\right) + s v$$

yn soll, wobey F, G, H; P, Q, R; und r, s bloß unctionen von x bezeichnen.

Auflösung.

Da

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^4 v}{d x^2 d y^2}\right) + r \left(\frac{d^3 v}{d x d y^2}\right) + s \left(\frac{d^2 v}{d y^2}\right)$$

, so wird, weil

$$\left(\frac{d^2 v}{d y^2}\right) = F \left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) + G \left(\frac{d v}{d x}\right) + H v$$

$$\left(\frac{d^3 v}{d x d y^2}\right) = F \left(\frac{d^3 v}{d x^3}\right) + \frac{d F}{d x}\left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) + \frac{d G}{d x}\left(\frac{d v}{d x}\right) + \frac{d H}{d x} v$$
$$\qquad\qquad + G \qquad\qquad\qquad + H$$

$$\left(\frac{d^4 v}{d x^2 d y^2}\right) = F\left(\frac{d^4 v}{d x^4}\right) + \frac{2 d F}{d x}\left(\frac{d^3 v}{d x^3}\right) + \frac{d^2 F}{d x^2}\left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) + \frac{d^2 G}{d x^2}\left(\frac{d v}{d x}\right) + \frac{d^2 H}{d x^2} v$$
$$\qquad + G \qquad\qquad + \frac{2 d G}{d x} \qquad\quad + \frac{2 d H}{d x}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad + H.$$

Ferner wird wegen

$$z = \left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) + r \left(\frac{d v}{d x}\right) + s v$$

$$\left(\frac{d z}{d x}\right) = \left(\frac{d^3 v}{d x^3}\right) + r \left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) + \frac{d r}{d x}\left(\frac{d v}{d x}\right) + \frac{d s}{d x} v \quad \text{und}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + s$$

$$\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) = \left(\frac{d^4 v}{d x^4}\right) + r \left(\frac{d^3 v}{d x^3}\right) + \frac{2 d r}{d x}\left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) + \frac{d^2 r}{d x^2}\left(\frac{d v}{d x}\right) + \frac{d^2 s}{d x^2} v$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad + s \qquad\qquad + \frac{2 d s}{d x}.$$

Werden diese Werthe substituirt, so müssen alle Glieder, welche

durch die Größen $\left(\frac{d^4 v}{d x^4}\right)$, $\left(\frac{d^3 v}{d x^3}\right)$, $\left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right)$, $\left(\frac{d v}{d x}\right)$ und v multiplicirt sind, für sich verschwinden, woraus sich nachstehende Gleichungen ergeben:

aus	
$\left(\frac{d^4 v}{d x^4}\right)$	I. $F = P$
$\left(\frac{d^3 v}{d x^3}\right)$	II. $G + \frac{2 d F}{d x} + F r = P r + Q$
$\left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right)$	III. $H + \frac{2 d G}{d x} + \frac{d^2 F}{d x^2} + G r + \frac{r d F}{d x} + F s = P\left(s + \frac{2 d r}{d x}\right) + Q r + R$
$\left(\frac{d v}{d x}\right)$	IV. $\frac{2 d H}{d x} + \frac{d^2 G}{d x^2} + H r + \frac{r d G}{d x} + G s = P\left(\frac{2 d s}{d x} + \frac{d^2 r}{d x^2}\right) + Q\left(s + \frac{d r}{d x}\right) + R r$
v	V. $\frac{d^2 H}{d x^2} + \frac{r d H}{d x} + H s = P \frac{d^2 s}{d x^2} + Q \frac{d s}{d x} + R s.$

Aus der ersteren Gleichung erhält man $P = F$, aus der zweyten $Q = G + \frac{2 d F}{d x}$, und aus der dritten

$$R = H + \frac{2 d G}{d x} + \frac{d^2 F}{d x^2} - \frac{r d F - 2 F d r}{d x},$$

und diese Werthe, in den beyden letzten Ausdrücken substituirt, geben:

$$\frac{2 d H}{d x} + \frac{d^2 G}{d x^2} - \frac{r d G + G d r}{d x} - \frac{r d^2 F}{d x^2} - \frac{2 d F d r}{d x^2} - \frac{2 s d F + 2 F d s}{d x} + \frac{r^2 d F - 2 F r d r}{d x} - \frac{F d^2 r}{d x^2} = 0$$ und

$$\frac{d^2 H}{d x^2} + \frac{r d H}{d x} - \frac{s d^2 F + 2 d F d s + F d^2 s}{d x^2} - \frac{2 s d G + G d s}{d x} + \frac{s (r d F - 2 F d r)}{d x} = 0;$$

die erste hiervon ist für sich integrabel, denn sie gibt

$$2 H + \frac{d G}{d x} - G r - \frac{r d F - F d r}{d x} - 2 F s + F r^2 = A.$$

Ferner stelle man jene zwey Gleichungen auf folgende Art dar:

$$-\frac{d^2 . F r}{d x^2} - \frac{2 d . F s}{d x} + \frac{d . F r^2}{d x} + \frac{d^2 G}{d x^2} - \frac{d . G r}{d x} + \frac{2 d H}{d x} = 0$$

$$-\frac{d^2 . F s}{d x^2} + \frac{s}{r} . \frac{d . F r^2}{d x} - \frac{2 s d G + G d s}{d x} + \frac{r d H}{d x} + \frac{d^2 H}{d x^2} = 0$$

oder auch unter folgender Form:

$$\frac{d^2.(G-Fr)}{dx} - d.r(G-Fr) + 2d.(H-Fs) = 0$$

$$\frac{d^2.(H-Fs)}{dx} + 2Fsdr + rsdF - Gds - 2sdG + rdH = 0;$$

die letzte aber kann man so darstellen:

$$\frac{d^2.(H-Fs)}{dx} - 2sd.(G-Fr) - ds(G-Fr) + rd.(H-Fs) = 0.$$

Multiplicirt man nun die erstere Gleichung durch $H - Fs$, letztere aber durch $-(G-Fr)$, so gibt ihre Summe:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{(H-Fs)d^2.(G-Fr)-(G-Fr)d^2.(H-Fs)}{dx} - (G-Fr)(H-Fs)dr \\ + 2(H-Fs)d.(H-Fs) \quad - r(H-Fs)d.(G-Fr) \\ + 2s(G-Fr)d.(G-Fr) + (G-Fr)^2 ds - r(G-Fr)d.(H-Fs) \end{array}\right\} = 0$$

und das Integrale hiervon ist offenbar:

$$\frac{(H-Fs)d.(G-Fr) - (G-Fr)d.(H-Fs)}{dx} + (H-Fs)^2$$
$$+ (G-Fr)^2 s - (G-Fr)(H-Fs)r = B,$$

das früher gefundene Integrale aber ist:

$$\frac{d.(G-Fr)}{dx} - (G-Fr)r + 2(H-Fs) = A,$$

und wird dieser Ausdruck mit $H - Fs$ multiplicirt, und von jenem abgezogen, so bleibt:

$$-\frac{(G-Fr)d.(H-Fs)}{dx} - (H-Fs)^2 + (G-Fr)^2 s = B - A(H-Fs)$$

und so erhält man geradezu zwey Differenzialgleichungen, aus welchen man die beyden Größen r und s bestimmen muß, und sind diese gefunden, so sind auch die Functionen P, Q und R bekannt.

Zusatz 1.

§. 368. Wenn $F = 1$, $G = 0$ und $H = 0$ ist, so werden die gefundenen Gleichungen seyn:

$$-\frac{dr}{dx} + r^2 - 2s = a \quad \text{und} \quad \frac{sdr - rds}{dx} + s^2 = b,$$

und wenn man dx eliminirt, erhält man:

$$\frac{rds - sdr}{dr} = \frac{b - s^2}{a + 2s - r^2} \quad \text{oder}$$

$$\frac{r\,ds}{dr} = \frac{b + as + s^2 - r^2 s}{a + 2s - r^2},$$

und es scheint, daß man diese Gleichung im Allgemeinen kaum auflösen könne. Nimmt man aber die Constanten $a = o$ und $b = o$, so geht die Gleichung $\frac{r\,ds}{dr} = \frac{s^2 - r^2 s}{2s - r^2}$, wenn man $s = r^2 t$ setzt, über in

$$\frac{r\,dt + 2t\,dr}{dr} = \frac{t^2 - t}{2t - 1} \quad \text{oder}$$

$$\frac{r\,dt}{dr} = \frac{-3t^2 + t}{2t - 1},$$

man findet daher:

$$\frac{dr}{r} = \frac{dt\,(1 - 2t)}{t\,(3t - 1)} = \frac{-dt}{t} + \frac{dt}{3t - 1} \quad \text{und}$$

$$r = \frac{\alpha\sqrt[3]{3t - 1}}{t}, \quad \text{also}$$

$$s = \frac{\alpha^2\sqrt[3]{(3t - 1)^2}}{t}.$$

Zusatz 2.

§. 369. Für eben diesen speciellen Fall setzen wir $3t - 1 = u^3$, so wird

$$r = \frac{3\alpha u}{1 + u^3} \quad \text{und} \quad s = \frac{3\alpha^2 u^2}{1 + u^3}.$$

Wegen $a = o$ ist

$$dx = \frac{dr}{r^2 - 2s} = \frac{dr}{r^2(1 - 2t)} = \frac{3\,dr}{r^2(1 - 2u^3)} \quad \text{aber}$$

$$\frac{dr}{r^2} = \frac{du}{3\alpha u^2} - \frac{2u\,du}{3\alpha} = \frac{du\,(1 - 2u^3)}{3\alpha u^2},$$

so daß

$$dx = \frac{du}{\alpha u^2}$$

ist, und daher

$$\frac{1}{u} = \beta - \alpha x \quad \text{und} \quad u = \frac{1}{\beta - \alpha x};$$

wo man der Allgemeinheit unbeschadet setzen kann:

$$\beta = o \quad \text{und} \quad u = \frac{-1}{\alpha x};$$

Hieraus erhält man:

$$r = \frac{-3x^2}{x^3 + c^3},$$

wenn

$$\alpha = -\frac{1}{c} \text{ und } s = \frac{3x}{x^3 + c^3}$$

gesetzt wird; man findet also endlich:

$$P = 1, \; Q = 0 \text{ und } R = -\frac{2dr}{dx} = -\frac{6x(2c^3 - x^3)}{(c^3 + x^3)^2}.$$

Zusatz 3.

§. 370. Ist demnach die Gleichung $\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)$, welche zum Integrale

$$v = \Gamma(x + y) + \Delta(x - y)$$

hat, gegeben, so kann das Integrale der Gleichung

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{6x(2c^3 - x^3)}{(c^3 + x^3)^2} z$$

angegeben werden; es ist nämlich:

$$z = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) - \frac{3x^2}{c^3 + x^3}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{3x}{c^3 + x^3} v.$$

Anmerkung 1.

§. 371. Die Rechnung läßt sich für den Fall, in welchem $F = 1$, $G = 0$ und $H = 0$ ist, weit leichter und allgemeiner ausführen, für jeden beliebigen Werth der Größe a, wenn nur $b = 0$; denn dann gibt die andere Gleichung sogleich:

$$dx = \frac{rds - sdr}{s^2}, \text{ also}$$

$$x = \frac{-r}{s} \text{ und } s = \frac{-r}{x},$$

und daher nimmt die erste Gleichung die Form an:

$$\frac{dr}{dx} - r^2 - \frac{2r}{x} + a = 0.$$

Setzen wir $r = \frac{a}{t}$, so wird:

$$dt + \frac{2tdx}{x} - t^2dx + adx = 0,$$

und dieser Gleichung entspricht der particuläre Werth

$$t = \sqrt{a} + \frac{1}{x}.$$

Man setze also

$$t = \sqrt{a} + \frac{1}{x} + \frac{1}{u},$$

so ergibt sich

$$du + dx + 2udx\sqrt{a} = o.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $e^{2x\sqrt{a}}$ und integrirt sie, so erhält man:

$$e^{2x\sqrt{a}}u + \frac{1}{2\sqrt{a}}e^{2x\sqrt{a}} = \frac{n}{2\sqrt{a}},$$

also

$$\frac{1}{u} = \frac{2e^{2x\sqrt{a}}\sqrt{a}}{n - e^{2x\sqrt{a}}} = \frac{2\sqrt{a}}{ne^{-2x\sqrt{a}} - 1} \text{ und}$$

$$t = \frac{1}{x} + \frac{ne^{-2x\sqrt{a}} + 1}{ne^{-2x\sqrt{a}} - 1}\sqrt{a} = \frac{1}{x} + \frac{n + e^{2x\sqrt{a}}}{n - e^{2x\sqrt{a}}}\sqrt{a} \text{ und}$$

$$r = \frac{ax(n - e^{2x\sqrt{a}})}{n(x\sqrt{a} + 1) + e^{2x\sqrt{a}}(x\sqrt{a} - 1)}$$

und daher

$$s = \frac{-a(n - e^{2x\sqrt{a}})}{n(x\sqrt{a} + 1) + e^{2x\sqrt{a}}(x\sqrt{a} - 1)}.$$

dann aber endlich:

$$P = -1, \quad Q = o \quad \text{und} \quad R = -\frac{2dr}{dx} = -2r^2 - \frac{4r}{x} + 2a$$

oder

$$R = \frac{-2a(n^2 - 4nax^2e^{2x\sqrt{a}} - 2ne^{2x\sqrt{a}} + e^{4x\sqrt{a}})}{[n(x\sqrt{a} + 1) + e^{2x\sqrt{a}}(x\sqrt{a} - 1)]^2}$$

$$= \frac{-2a(n - e^{2x\sqrt{a}})^2 + 8na^2x^2e^{2x\sqrt{a}}}{[n(x\sqrt{a} + 1) + e^{2x\sqrt{a}}(x\sqrt{a} - 1)]^2}.$$

Läßt man nun a verschwinden, und nimmt $n = 1 + \frac{2}{3}ac^3\sqrt{a}$, so kommen die vorhin gefundenen Formeln zum Vorschein. Wenn aber a eine negative Zahl bezeichnet, ist z. B. $a = -m^2$, und man nimmt $n = \frac{\alpha\sqrt{-1} + \beta}{\alpha\sqrt{-1} - \beta}$, so findet man

$$r = \frac{-m^2x(\beta\cos.mx + \alpha\sin.mx)}{\beta\cos.mx + \alpha\sin.mx - mx(\alpha\cos.mx - \beta\sin.mx)}$$

$$= \frac{-m^2x\cos.(mx + \gamma)}{\cos.(mx + \gamma) - mx\sin.(mx + \gamma)}$$

und

$$s = \frac{m^2 \cos.(m x + \gamma)}{\cos.(m x + \gamma) - m x \sin.(m x + \gamma)},$$

daher

$$R = \frac{2 m^2 (\cos.(m x + \gamma)^2 + m^2 x^2)}{[\cos.(m x + \gamma) - m x \sin.(m x + \gamma)]^2}.$$

Die Größe R erhält die Form:

$$R = \frac{8 n a^2 x^2 - 2 a (n e^{-x\sqrt{a}} - e^{x\sqrt{a}})^2}{(n (1 + x\sqrt{a}) e^{-x\sqrt{a}} - (1 - x\sqrt{a}). e^{x\sqrt{a}})^2},$$

welcher Ausdruck, wenn a sehr klein genommen wird, übergeht in

$$R = \frac{8 n a^2 x^2 - 2 a [n - 1 - (n + 1) x\sqrt{a} + \frac{(n-1)}{2} a x^2 - \frac{n+1}{6} a x^3 \sqrt{a} + \ldots]^2}{[n - 1 - \frac{1}{2}(n - 1) a x^2 + \frac{1}{3}(n + 1) a x^3 \sqrt{a}]^2}$$

Setzt man $n = 1 + \beta a \sqrt{a}$, damit

$$n - 1 = \beta a \sqrt{a} \quad \text{und} \quad n + 1 = 2 + \beta a \sqrt{a}$$

ist, so wird

$$R = \frac{8 n a^2 x^2 - 2 a [\beta a \sqrt{a} - 2 x \sqrt{a} - \beta a^2 x + \frac{\beta a^2 x^2 \sqrt{a}}{2} - \frac{1}{3} a x^3 \sqrt{a}]^2}{[\beta a \sqrt{a} - \frac{1}{2} \beta a^2 x^2 \sqrt{a} + \frac{2}{3} a x^3 \sqrt{a}]^2}$$

und hier wird der Zähler

$$8 a^2 x^2 + 8 \beta a^3 x^2 \sqrt{a} - 2 a (\beta^2 a^3 - 4 \beta a^2 x - 2 \beta^2 a^3 x \sqrt{a}) + 4 a x^2 + \frac{4}{3} a^2 x^4.$$

Da sich hier die mit a^2 multiplicirten Glieder tilgen, so behalte man bloß jene bey, welche den Factor a^3 enthalten, und man wird, wenn man dasselbe im Nenner beobachtet, erhalten:

$$R = \frac{8 \beta a^3 x - \frac{8}{3} a^3 x^4}{a^3 (\beta + \frac{2}{3} x^3)^2} = \frac{8 x (\beta - \frac{1}{3} x^3)}{(\beta + \frac{2}{3} x^3)^2},$$

welcher Ausdruck leicht auf die Form

$$R = \frac{6 x (2 c^3 - x^3)}{(c^3 + x^3)^2}$$

gebracht werden kann, wenn man

$$3 \beta = 2 c^3 \quad \text{setzt, so daß} \quad \beta = \frac{2}{3} c^3$$

ist; dieser Fall tritt daher ein, wenn man a verschwindend klein nimmt, und

$$n = 1 + \frac{2}{3} c^3 a \sqrt{a}.$$

Anmerkung 2.

§. 372. Da die Entwickelung der gefundenen Auflösung sehr schwierig ist, und wir durchaus nicht einsehen, wie die beyden unbekannten Größen r und s aus den beyden erhaltenen Gleichungen bestimmt werden können, so wird es, um der Erweiterung der Wissenschaft willen, sehr gut seyn, zu bemerken, daß eben dieses Problem durch Wiederholung der bey der ersten Aufgabe dieses Kapitels gebrauchten Transformation ebenfalls aufgelöst werden könne, und es wird daher nicht ohne Nutzen seyn, diese beyden Auflösungen mit einander zu vergleichen. Ist also die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 v}{d y^2}\right) = F\left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) + G\left(\frac{d v}{d x}\right) + H v$$

vorgelegt, so setzen wir zuerst

$$u = \left(\frac{d v}{d x}\right) + p v,$$

und bestimmen p aus der Gleichung

$$F d p + G p d x - F p^2 d x + (C - H) d x = 0,$$

so wird folgende Gleichung zum Vorschein kommen:

$$\left(\frac{d^2 u}{d y^2}\right) = F\left(\frac{d^2 u}{d x^2}\right) + \left(G + \frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(H + \frac{dG}{dx} - \frac{2Fdp - pdF}{dx}\right) u.$$

Um nun diese Gleichung ferner zu transformiren, setzen wir auf ähnliche Art

$$z = \left(\frac{d u}{d x}\right) + q u, \text{ so daß auch}$$

$$z = \left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) + (p + q)\left(\frac{d v}{d x}\right) + \left(\frac{d p}{d x} + p q\right) v,$$

und, wenn man q aus der Gleichung

$$F d q + \left(G + \frac{dF}{dx}\right) q d x - F q^2 d x + \left(D - H - \frac{dG}{dx} + \frac{2Fdp + pdF}{dx}\right) d x = 0$$

bestimmt hat, so wird man die Gleichung erhalten:

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = P\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) + Q\left(\frac{d z}{d x}\right) + R z,$$

in welcher die Größen P, Q, R in folgender Relation stehen:

$$P = F; \quad Q = G + \frac{2 d F}{d x} \text{ und}$$

$$R = H + \frac{2 d G}{d x} - \frac{2 F d p - p d F}{d x} + \frac{d^2 F}{d x^2} - \frac{2 F d q - q d F}{d x}.$$

Mit dieser Auflösung muß also jene übereinstimmen, auf welche das letzte Problem geführt hat, und da wir in diesem sogleich

$$z = \left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) + r \left(\frac{d v}{d x}\right) + s v$$

gesetzt haben, so werden wir auch erhalten:

$$r = p + q \quad \text{und} \quad s = \frac{dp}{dx} + pq,$$

woraus offenbar dieselben Werthe für P, Q, R sogleich hervorgehen. Allein nicht so leicht sieht man ein, daß, wenn für r und s jene Werthe durch p und q ausgedrückt, substituirt werden, die beyden Gleichungen

$$\frac{d\,.(G - Fr)}{dx} - (G - Fr)\,r + 2\,(H - Fs) = A \quad \text{und}$$

$$\frac{(G - Fr)\,d\,.(H - Fs)}{dx} + (H - Fs)^2 - (G - Fr)^2 s - A\,(H - Fs) = B$$

zurückgeführt werden auf die früher gefundenen

$$\frac{F\,dp}{dx} + Gp - Fp^2 - H + C = o \quad \text{und}$$

$$\frac{F\,dq}{dx} + \left(G + \frac{dF}{dx}\right) q - Fq^2 - H - \frac{dG}{dx} + \frac{2F\,dp + p\,dF}{dx} + D = o,$$

so daß die Constanten C und D zu den unveränderlichen Größen A und B in einer bestimmten Relation stehen. Indessen leuchtet ein, daß diese letztern Gleichungen weit einfacher seyen, indem die erstere bloß die zwey Veränderlichen p und x enthält, aus welcher p durch x, wovon F, G und H gegebene Functionen sind, bestimmt werden muß, und ist diese gefunden, so hat man auf ähnliche Art die Größe q aus der andern Gleichung zu entwickeln. Allein in den beyden obigen Gleichungen sind die beyden Veränderlichen r und s so mit einander verbunden, daß man keine Methode kennt, dieselben aufzulösen, oder auch nur auf eine Gleichung, die bloß zwey Veränderliche enthält, zurückzuführen. Da wir also die Gewißheit erlangt haben, daß die ersteren Gleichungen, deren Auflösung mit so vielen Schwierigkeiten verbunden ist, mit Hülfe der angeführten Substitutionen auf die letztern weit leichtern Gleichungen zurückgeführt werden können, so fällt wohl ohne Zweifel in die Augen, daß die Methode, diese Reduction zu bewerkstelligen, sehr schätzbare Beyträge für die Analysis liefern werde.

Anmerkung 3.

§. 373. Da also die Übereinstimmung dieser beyden Auflösungen

so tief versteckt liegt, so wird es nützlich seyn, einen speciellen Fall genauer in Erwägung zu ziehen. Sey also

$$F = 1, \quad G = 0 \quad \text{und} \quad H = 0,$$

so werden die beyden ersteren Gleichungen zwischen r und s folgende Formen annehmen:

$$\text{I.} \ \frac{-dr}{dx} + r^2 - 2s = A \quad \text{und}$$

$$\text{II.} \ \frac{rds}{dx} + s^2 - r^2 s + As = B,$$

die letztern aber:

$$\text{III.} \ \frac{dp}{dx} - p^2 + C = 0, \quad \text{und}$$

$$\text{IV.} \ \frac{dq}{dx} - q^2 + \frac{2dp}{dx} + D = 0,$$

und diese hängen mit jenen ganz gewiß so zusammen, daß

$$r = p + q \quad \text{und} \quad s = \frac{dp}{dx} + pq$$

ist. Um also wenigstens die Übereinstimmung a posteriori zu erkennen, sey $C = -m^2$, so gibt die dritte Gleichung:

$$dx = \frac{dp}{m^2 + p^2}, \quad \text{also}$$

$$x = \frac{1}{m} \text{arc. tang.} \frac{p}{m} \quad \text{und} \quad p = m \text{ tang. } mx.$$

Da nun

$$\frac{dp}{dx} = m^2 + p^2$$

ist, so wird man finden:

$$s = m^2 + p^2 + pq = m^2 + pr = m(m + r \text{ tang. } mx),$$

und durch Substitution dieses Werthes in I erhält man:

$$\frac{-dr}{dx} + r^2 - 2mr \text{ tang. } mx - 2m^2 = A \quad \text{oder}$$

$$\frac{dr}{dx} = r^2 - 2mr \text{ tang. } mx - 2m^2 - A;$$

die zweyte Gleichung aber geht, weil

$$\frac{ds}{dx} = \frac{mdr}{dx} \text{ tang. } mx + \frac{m^2 r}{\cos.^2 mx}$$

über in folgende:

$$\frac{n r d r}{d x} \text{tang.}\, m x = m r^3 \text{tang.}\, m x - 2 m^2 r^2 \text{tang.}^2 m x$$
$$- m (A + 2 m^2) r \text{tang.}\, m x - m^4 - A m^2 + B;$$

eliminirt man aus diesen Gleichungen dr, so wird

$$B = A m^2 + m^4.$$

Weil aber

$$q = r - p = r - m \text{ tang. } m x,$$

so erhält man für die vierte Gleichung:

$$\frac{dr}{dx} = r^2 - 2 m r \text{ tang. } m x - m^2 - D,$$

so daß

$$D = m^2 + A$$

ist. Die Übereinstimmung unserer Gleichungen besteht demnach in der Relation der Constanten, daß wegen $m^2 = - C$

$$D = A - C \quad \text{und} \quad B = - C (A - C) = - C D$$

wird. Aber eben diese Relationen finden auch im Allgemeinen Statt, denn bringt man die Gleichungen III und IV in eine Summe, so wird man wegen

$$C + D = A \quad \text{und} \quad p + q = r$$

erhalten:

$$\frac{F d r}{d x} + G r + \frac{r d F}{d x} - F p^2 - F q^2 - 2 H - \frac{d G}{d x} + \frac{2 F d p}{d x} + A = 0,$$

Weil aber $\frac{dp}{dx} = s - pq$ ist, so wird:

$$\frac{F d r + r d F - d G}{d x} + G r - F r^2 - 2 H + 2 F s + A = 0,$$

oder

$$\frac{d \,.\, (G - F r)}{d x} - (G - F r) r + 2 (H - F s) = A,$$

welches die erste Gleichung selbst ist. Weil ferner

$$\frac{dp}{dx} = s - pq$$

ist, so gibt die Gleichung III:

$$F s - F p r + G p - H + C = 0 \quad \text{oder}$$
$$C = H - F s - p (G - F r);$$

die vierte Gleichung aber wird auf folgende Form zurückgeführt:

$$\frac{F\,dr}{dx}+Gq+\frac{q\,dF}{dx}-Fq^2-H-\frac{dG}{dx}+Fs-Fpq+\frac{p\,dF}{dx}+D=0,$$

oder

$$\frac{d.(Fr-G)}{dx}+q(G-Fr)-H+Fs+D=0,$$

daher

$$D=\frac{d.(G-Fr)}{dx}-q(G-Fr)+H-Fs,$$

und hieraus folgern wir:

$$CD=\frac{(H-Fs)\,d.(G-Fr)}{dx}-q(G-Fr)(H-Fs)+(H-Fs)^2$$
$$-\frac{p(G-Fr)\,d.(G-Fr)}{dx}+pq(G-Fr)^2-p(G-Fr)(H-Fs);$$

aus der zweyten Gleichung aber erhalten wir;

$$B=\frac{(G-Fr)\,d.(H-Fs)}{dx}-\frac{(H-Fs)\,d.(G-Fr)}{dx}-(H-Fs)^2$$
$$+(G-Fr)(H-Fs)\,r-(G-Fr)^2\,s,$$

durch Verbindung dieser Ausdrücke ergibt sich:

$$\frac{CD+B}{G-Fr}=\frac{d.(H-Fs)}{dx}-\frac{p\,d.(G-Fr)}{dx}-\frac{dp.(G-Fr)}{dx}$$

$$=\frac{d.(H-Fs)-d.p(G-Fr)}{dx}=0,$$ wenn nämlich

$$C=H-Fs-p(G-Fr)$$

ist, und daher ist auch im Allgemeinen:

$$B=-CD \quad \text{und} \quad A=C+D.$$

Indessen sieht man dennoch hieraus nicht ein, wie man aus den Gleichungen I und II die beyden übrigen III und IV ableiten könne.

Anmerkung 4.

§. 374. Zieht man alles dieß sorgfältig in Erwägung, so wird man einsehen, daß die ganze Rechnung mit Hülfe einer hinreichend einfachen Substitution ausgeführt werden könne. Um dieses nun leichter zu zeigen, setzen wir Kürze halber

$$G-Fr=R \quad \text{und} \quad H-Fs=S,$$

damit die beyden folgenden Gleichungen zum Vorschein kommen;

$$\text{I. } A=\frac{dR}{dx}-\frac{GR}{F}-\frac{R^2}{F}+2S,$$

$$\text{II. } B=\frac{RdS-SdR}{dx}-\frac{HR^2}{F}+\frac{GRS}{F}-S^2,$$

aus welchen die beyden Größen R und S bestimmt werden müssen, wenn F, G und H was immer für Functionen von x; A und B aber constante Größen sind. Zu diesem Zwecke bediene man sich der Substitution $S = C + Rp$, die man so anordnen muß, daß jene zwey Gleichungen in eine zusammenfallen, in welcher außer x die einzige neue Veränderliche p erscheint, die dann nach den bekannten Methoden aufzusuchen ist. Weil nun

$$dS = Rdp + pdR$$

ist, so wird man erhalten:

$$\text{I. } A = \frac{dR}{dx} - \frac{GR}{F} + \frac{R^2}{F} + 2C + 2Rp$$

$$\text{II. } B = \frac{R^2 dp}{dx} - \frac{CdR}{dx} - \frac{HR^2}{F} + \frac{CGR}{F} + \frac{GR^2 p}{F} - C^2 - 2CRp - R^2 p^2,$$

und hieraus ergibt sich zuerst durch Elimination von dR:

$$B + AC = \frac{R^2 dp}{dx} + \frac{CR^2}{F} + C^2 - \frac{HR^2}{F} - R^2 p^2.$$

Wenn wir also nur die Constante C so annehmen, daß

$$C^2 = B + AC$$

wird, so wird auch die Größe R selbst durch Division wegfallen, und folgende Gleichung zum Vorschein kommen:

$$o = \frac{dp}{dx} + \frac{C}{F} - \frac{H}{F} - p^2,$$

deren Auflösung zu den schon mehr bekannten Methoden gehört. Da also diese Methode von größter Wichtigkeit ist, so halte ich es wohl der Mühe werth, folgendes Problem hier beyzufügen, obgleich es in den ersten Theil der Integralrechnung gehört.

Aufgabe 60.

§. 375. Die beyden Differenzialgleichungen von der Form:

$$\text{I. } o = \frac{dy}{dx} + F + Gy + Hz + Iy^2 + Kyz + Lz^2$$

$$\text{II. } o = \frac{ydz - zdy}{dx} + P + Qy + Rz + Sy^2 + Tyz + Vz^2$$

seyen gegeben, wobey F, G, H ꝛc., P, Q, R ꝛc. Functionen von x bezeichnen mögen; die Methode auseinan-

ist dieß geschehen, so wird man auch

$$z = a + vy$$

erhalten.

Zusatz 2.

§. 377. Wenn $F = A$, $K = o$, $L = o$, $H = -ab$, $V = b$, $T = -G$, so erhält man den oben, §. 374, behandelten Fall in Beziehung auf die Gleichungen:

$$o = \frac{dy}{dx} + A + Gy - abz + Iy^2$$

$$o = \frac{ydz - zdy}{dx} - aA + Sy^2 - Gyz + bz^2 + a^2 b,$$

wo G, I und S was immer für Functionen von x sind, und mit der Auflösung verhält es sich so, daß wenn $z = a + yv$ gesetzt wird, die nachstehenden Gleichungen successive aufgelöst werden müssen:

$$o = \frac{dv}{dx} + S + aI - Gv + bv^2 \text{ und}$$

$$o = \frac{dy}{dx} + A - aab + y(G - abv) + Iy^2.$$

Zusatz 3.

§. 378. Es ist einleuchtend, daß die letzte Gleichung auch im Allgemeinen keine Schwierigkeiten darbiethe, wenn nur

$$F + aH + a^2 L = o$$

ist; die Auflösung der ersteren aber ist in unserer Gewalt, wenn entweder $S + aT = o$ oder $V + aL = o$ ist.

Zweytes Buch

der

Integralrechnung.

Erster Theil. Dritter Abschnitt.

Man setze also

$$t = \sqrt{a} + \frac{1}{x} + \frac{1}{u},$$

so ergibt sich

$$du + dx + 2u\,dx\sqrt{a} = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $e^{2x\sqrt{a}}$ und integrirt sie, so erhält man:

$$e^{2x\sqrt{a}}u + \frac{1}{2\sqrt{a}}e^{2x\sqrt{a}} = \frac{n}{2\sqrt{a}},$$

also

$$\frac{1}{u} = \frac{2e^{2x\sqrt{a}}\sqrt{a}}{n - e^{2x\sqrt{a}}} = \frac{2\sqrt{a}}{ne^{-2x\sqrt{a}} - 1}$$ und

$$t = \frac{1}{x} + \frac{ne^{-2x\sqrt{a}} + 1}{ne^{-2x\sqrt{a}} - 1}\sqrt{a} = \frac{1}{x} + \frac{n + e^{2x\sqrt{a}}}{n - e^{2x\sqrt{a}}}\sqrt{a}$$ und

$$r = \frac{ax(n - e^{2x\sqrt{a}})}{n(x\sqrt{a} + 1) + e^{2x\sqrt{a}}(x\sqrt{a} - 1)}$$

und daher

$$s = \frac{a(n - e^{2x\sqrt{a}})}{n(x\sqrt{a} + 1) + e^{2x\sqrt{a}}(x\sqrt{a} - 1)}.$$

dann aber endlich:

$$P = -1, \quad Q = 0 \quad \text{und} \quad R = -\frac{2dr}{dx} = -2r^2 - \frac{4r}{x} + 2a$$

oder

$$R = \frac{-2a(n^2 - 4nax^2e^{2x\sqrt{a}} - 2ne^{2x\sqrt{a}} + e^{4x\sqrt{a}})}{[n(x\sqrt{a} + 1) + e^{2x\sqrt{a}}(x\sqrt{a} - 1)]^2}$$

$$= \frac{-2a(n - e^{2x\sqrt{a}})^2 + 8na^2x^2e^{2x\sqrt{a}}}{[n(x\sqrt{a} + 1) + e^{2x\sqrt{a}}(x\sqrt{a} - 1)]^2}.$$

Läßt man nun a verschwinden, und nimmt $n = 1 + \frac{2}{3}ac^3\sqrt{a}$, so kommen die vorhin gefundenen Formeln zum Vorschein. Wenn aber a eine negative Zahl bezeichnet, ist z. B. $a = -m^2$, und man nimmt $n = \frac{\alpha\sqrt{-1} + \beta}{\alpha\sqrt{-1} - \beta}$, so findet man

$$r = \frac{-m^2x(\beta\cos.mx + \alpha\sin.mx)}{\beta\cos.mx + \alpha\sin.mx - mx(\alpha\cos.mx - \beta\sin.mx)}$$

$$= \frac{-m^2x\cos.(mx + \gamma)}{\cos.(mx + \gamma) - mx\sin.(mx + \gamma)}$$

und

$$s = \frac{m^2 \cos.(mx + \gamma)}{\cos.(mx + \gamma) - mx \sin.(mx + \gamma)},$$

daher

$$R = \frac{2m^2 (\cos.(mx + \gamma)^2 + m^2 x^2)}{[\cos.(mx + \gamma) - mx \sin.(mx + \gamma)]^2}.$$

Die Größe R erhält die Form:

$$R = \frac{8na^2x^2 - 2a(ne^{-x\sqrt{a}} - e^{x\sqrt{a}})^2}{(n(1 + x\sqrt{a})e^{-x\sqrt{a}} - (1 - x\sqrt{a}).e^{x\sqrt{a}})^2},$$

welcher Ausdruck, wenn a sehr klein genommen wird, übergeht in

$$R = \frac{8na^2x^2 - 2a[n - 1 - (n+1)x\sqrt{a} + \frac{(n-1)}{2}ax^2 - \frac{n+1}{6}ax^3\sqrt{a} + \ldots]^2}{[n - 1 - \frac{1}{2}(n-1)ax^2 + \frac{1}{3}(n+1)ax^3\sqrt{a}]^2}$$

Setzt man $n = 1 + \beta a\sqrt{a}$, damit

$$n - 1 = \beta a\sqrt{a} \quad \text{und} \quad n + 1 = 2 + \beta a\sqrt{a}$$

ist, so wird

$$R = \frac{8na^2x^2 - 2a[\beta a\sqrt{a} - 2x\sqrt{a} - \beta a^2 x + \frac{\beta a^2 x^2 \sqrt{a}}{2} - \frac{1}{3}ax^3\sqrt{a}]^2}{[\beta a\sqrt{a} - \frac{1}{2}\beta a^2 x^2 \sqrt{a} + \frac{2}{3}ax^3\sqrt{a}]^2}$$

und hier wird der Zähler

$$8a^2x^2 + 8\beta a^3 x^2\sqrt{a} - 2a(\beta^2 a^3 - 4\beta a^2 x - 2\beta^2 a^3 x\sqrt{a}) + 4ax^2 + \tfrac{4}{9}a^2x^4.$$

Da sich hier die mit a^2 multiplicirten Glieder tilgen, so behalte man bloß jene bey, welche den Factor a^3 enthalten, und man wird, wenn man dasselbe im Nenner beobachtet, erhalten:

$$R = \frac{8\beta a^3 x - \frac{8}{3}a^3x^4}{a^3(\beta + \frac{2}{3}x^3)^2} = \frac{8x(\beta - \frac{1}{3}x^3)}{(\beta + \frac{2}{3}x^3)^2},$$

welcher Ausdruck leicht auf die Form

$$R = \frac{6x(2.c^3 - x^3)}{(c^3 + x^3)^2}$$

gebracht werden kann, wenn man

$$3\beta = 2c^3 \quad \text{setzt, so daß} \quad \beta = \tfrac{2}{3}c^3$$

ist; dieser Fall tritt daher ein, wenn man a verschwindend klein nimmt, und

$$n = 1 + \tfrac{2}{3}c^3 a\sqrt{a}.$$

Anmerkung 2.

§. 372. Da die Entwickelung der gefundenen Auflösung sehr schwierig ist, und wir durchaus nicht einsehen, wie die beyden unbekannten Größen r und s aus den beyden erhaltenen Gleichungen bestimmt werden können, so wird es, um der Erweiterung der Wissenschaft willen, sehr gut seyn, zu bemerken, daß eben dieses Problem durch Wiederholung der bey der ersten Aufgabe dieses Kapitels gebrauchten Transformation ebenfalls aufgelöst werden könne, und es wird daher nicht ohne Nutzen seyn, diese beyden Auflösungen mit einander zu vergleichen. Ist also die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 v}{d y^2}\right) = F\left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) + G\left(\frac{d v}{d x}\right) + H v$$

vorgelegt, so setzen wir zuerst

$$u = \left(\frac{d v}{d x}\right) + p v,$$

und bestimmen p aus der Gleichung

$$F d p + G p d x - F p^2 d x + (C - H) d x = o,$$

so wird folgende Gleichung zum Vorschein kommen:

$$\left(\frac{d^2 u}{d y^2}\right) = F\left(\frac{d^2 u}{d x^2}\right) + \left(G + \frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(H + \frac{dG}{dx} - \frac{2Fdp - pdF}{dx}\right) u.$$

Um nun diese Gleichung ferner zu transformiren, setzen wir auf ähnliche Art

$$z = \left(\frac{d u}{d x}\right) + q u, \text{ so daß auch}$$

$$z = \left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) + (p + q)\left(\frac{d v}{d x}\right) + \left(\frac{d p}{d x} + p q\right) v,$$

und, wenn man q aus der Gleichung

$$F d q + \left(G + \frac{dF}{dx}\right) q d x - F q^2 d x + \left(D - H - \frac{dG}{dx} + \frac{2Fdp + pdF}{dx}\right) d x = o$$

bestimmt hat, so wird man die Gleichung erhalten:

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = P\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) + Q\left(\frac{d z}{d x}\right) + R z,$$

in welcher die Größen P, Q, R in folgender Relation stehen:

$$P = F;\quad Q = G + \frac{2 d F}{d x} \text{ und}$$

$$R = H + \frac{2 d G}{d x} - \frac{2 F d p - p d F}{d x} + \frac{d^2 F}{d x^2} - \frac{2 F d q - q d F}{d x}.$$

Mit dieser Auflösung muß also jene übereinstimmen, auf welche das letzte Problem geführt hat, und da wir in diesem sogleich

$$z = \left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) + r \left(\frac{d v}{d x}\right) + s v$$

gesetzt haben, so werden wir auch erhalten:

$$r = p + q \quad \text{und} \quad s = \frac{dp}{dx} + pq,$$

woraus offenbar dieselben Werthe für P, Q, R sogleich hervorgehen. Allein nicht so leicht sieht man ein, daß, wenn für r und s jene Werthe durch p und q ausgedrückt, substituirt werden, die beyden Gleichungen

$$\frac{d\,.(G - Fr)}{dx} - (G - Fr)\, r + 2\,(H - Fs) = A \quad \text{und}$$

$$\frac{(G - Fr)\, d\,.(H - Fs)}{dx} + (H - Fs)^2 - (G - Fr)^2 s - A\,(H - Fs) = B$$

zurückgeführt werden auf die früher gefundenen

$$\frac{F\,dp}{dx} + Gp - Fp^2 - H + C = o \quad \text{und}$$

$$\frac{F\,dq}{dx} + \left(G + \frac{dF}{dx}\right) q - Fq^2 - H - \frac{dG}{dx} + \frac{2F\,dp + p\,dF}{dx} + D = o,$$

so daß die Constanten C und D zu den unveränderlichen Größen A und B in einer bestimmten Relation stehen. Indessen leuchtet ein, daß diese letztern Gleichungen weit einfacher seyen, indem die erstere bloß die zwey Veränderlichen p und x enthält, aus welcher p durch x, wovon F, G und H gegebene Functionen sind, bestimmt werden muß, und ist diese gefunden, so hat man auf ähnliche Art die Größe q aus der andern Gleichung zu entwickeln. Allein in den beyden obigen Gleichungen sind die beyden Veränderlichen r und s so mit einander verbunden, daß man keine Methode kennt, dieselben aufzulösen, oder auch nur auf eine Gleichung, die bloß zwey Veränderliche enthält, zurückzuführen. Da wir also die Gewißheit erlangt haben, daß die ersteren Gleichungen, deren Auflösung mit so vielen Schwierigkeiten verbunden ist, mit Hülfe der angeführten Substitutionen auf die letztern weit leichtern Gleichungen zurückgeführt werden können, so fällt wohl ohne Zweifel in die Augen, daß die Methode, diese Reduction zu bewerkstelligen, sehr schätzbare Beyträge für die Analysis liefern werde.

Anmerkung 3.

§. 373. Da also die Übereinstimmung dieser beyden Auflösungen

so tief versteckt liegt, so wird es nützlich seyn, einen speciellen Fall genauer in Erwägung zu ziehen. Sey also

$$F = 1, \quad G = 0 \quad \text{und} \quad H = 0,$$

so werden die beyden ersteren Gleichungen zwischen r und s folgende Formen annehmen:

$$\text{I.} \ \frac{-dr}{dx} + r^2 - 2s = A \quad \text{und}$$

$$\text{II.} \ \frac{r\,ds}{dx} + s^2 - r^2 s + As = B,$$

die letztern aber:

$$\text{III.} \ \frac{dp}{dx} - p^2 + C = 0, \quad \text{und}$$

$$\text{IV.} \ \frac{dq}{dx} - q^2 + \frac{2\,dp}{dx} + D = 0,$$

und diese hängen mit jenen ganz gewiß so zusammen, daß

$$r = p + q \quad \text{und} \quad s = \frac{dp}{dx} + pq$$

ist. Um also wenigstens die Übereinstimmung a posteriori zu erkennen, sey $C = -m^2$, so gibt die dritte Gleichung:

$$dx = \frac{dp}{m^2 + p^2}, \quad \text{also}$$

$$x = \frac{1}{m} \text{arc. tang.} \frac{p}{m} \quad \text{und} \quad p = m \text{ tang. } mx.$$

Da nun

$$\frac{dp}{dx} = m^2 + p^2$$

ist, so wird man finden:

$$s = m^2 + p^2 + pq = m^2 + pr = m(m + r \text{ tang. } mx),$$

und durch Substitution dieses Werthes in I erhält man:

$$\frac{-dr}{dx} + r^2 - 2mr \text{ tang. } mx - 2m^2 = A \quad \text{oder}$$

$$\frac{dr}{dx} = r^2 - 2mr \text{ tang. } mx - 2m^2 - A;$$

die zweyte Gleichung aber geht, weil

$$\frac{ds}{dx} = \frac{m\,dr}{dx} \text{ tang. } mx + \frac{m^2 r}{\cos.^2 mx}$$

über in folgende:

$$\frac{mr\,dr}{dx}\,\text{tang.}\,mx = mr^3\,\text{tang.}\,mx - 2m^2r^2\,\text{tang.}^2\,mx$$
$$- m(A + 2m^2)\,r\,\text{tang.}\,mx - m^4 - Am^2 + B;$$

eliminirt man aus diesen Gleichungen dr, so wird

$$B = Am^2 + m^4.$$

Weil aber

$$q = r - p = r - m\,\text{tang.}\,mx,$$

so erhält man für die vierte Gleichung:

$$\frac{dr}{dx} = r^2 - 2mr\,\text{tang.}\,mx - m^2 - D,$$

so daß

$$D = m^2 + A$$

ist. Die Übereinstimmung unserer Gleichungen besteht demnach in der Relation der Constanten, daß wegen $m^2 = -C$

$$D = A - C \quad \text{und} \quad B = -C(A - C) = -CD$$

wird. Aber eben diese Relationen finden auch im Allgemeinen Statt, denn bringt man die Gleichungen III und IV in eine Summe, so wird man wegen

$$C + D = A \quad \text{und} \quad p + q = r$$

erhalten:

$$\frac{F\,dr}{dx} + Gr + \frac{r\,dF}{dx} - Fp^2 - Fq^2 - 2H - \frac{dG}{dx} + \frac{2F\,dp}{dx} + A = 0.$$

Weil aber $\frac{dp}{dx} = s - pq$ ist, so wird:

$$\frac{F\,dr + r\,dF - dG}{dx} + Gr - Fr^2 - 2H + 2Fs + A = 0,$$

oder

$$\frac{d.(G - Fr)}{dx} - (G - Fr)\,r + 2(H - Fs) = A,$$

welches die erste Gleichung selbst ist. Weil ferner

$$\frac{dp}{dx} = s - pq$$

ist, so gibt die Gleichung III:

$$Fs - Fpr + Gp - H + C = 0 \quad \text{oder}$$
$$C = H - Fs - p(G - Fr);$$

die vierte Gleichung aber wird auf folgende Form zurückgeführt:

wo zuerst einleuchtet, daß $A = \alpha^m \beta^n$ sey; für die Auffindung der übrigen Coefficienten aber werden wir, wenn die Differenzialien der Logarithmen genommen werden, erhalten:

$$\frac{ds}{s\,dv} = \frac{m\gamma}{\alpha + \gamma v} + \frac{n\delta}{\beta + \delta v},$$

also

$$\frac{ds}{dv}\left(\alpha\beta + (\alpha\delta + \beta\gamma)\,v + \gamma\delta v^2\right) - s\left(m\beta\gamma + n\alpha\delta + (m+n)\,\gamma\delta v\right) = 0,$$

und wenn man hier statt s die angenommene Reihe substituirt, so wird folgende Gleichung entstehen:

$$\begin{array}{llllll}
0 = \alpha\beta B & + 2\alpha\beta C v & + 3\alpha\beta D v^2 & + 4\alpha\beta E v^3 & + 5\alpha\beta F v^4 & \text{ꝛc.} \\
 & + \alpha\delta B & + 2\alpha\delta C & + 3\alpha\delta D & + 4\alpha\delta E & \\
 & + \beta\gamma B & + 2\beta\gamma C & + 3\beta\gamma D & + 4\beta\gamma E & \\
 & & + \gamma\delta B & + 2\gamma\delta C & + 3\gamma\delta D & \\
- m\beta\gamma A & - m\beta\gamma B & - m\beta\gamma C & - m\beta\gamma D & - m\beta\gamma E & \\
- n\alpha\delta A & - n\alpha\delta B & - n\alpha\delta C & - n\alpha\delta D & - n\alpha\delta E & \\
 & -(m+n)\gamma\delta A & -(m+n)\gamma\delta B & -(m+n)\gamma\delta C & -(m+n)\gamma\delta D &
\end{array}$$

und daher wird jeder Coefficient aus den vorhergehenden auf folgende Art bestimmt:

$$A = \alpha^m \beta^n$$

$$B = \frac{m\beta\gamma + n\alpha\delta}{\alpha\beta} A$$

$$C = \frac{(m-1)\,\beta\gamma + (n-1)\,\alpha\delta}{2\alpha\beta} B + \frac{(m+n)\,\gamma\delta}{2\alpha\beta} A$$

$$D = \frac{(m-2)\,\beta\gamma + (n-2)\,\alpha\delta}{3\alpha\beta} C + \frac{(m+n-1)\,\gamma\delta}{3\alpha\beta} B$$

$$E = \frac{(m-3)\,\beta\gamma + (n-3)\,\alpha\delta}{4\alpha\beta} D + \frac{(m+n-2)\,\gamma\delta}{4\alpha\beta} C$$

ꝛc.

Sind also diese Coefficienten gefunden, und man setzt

$$t = \alpha x + \beta y \quad \text{und} \quad u = \gamma x + \delta y,$$

so wird die Transformation einer jeden Differenzialformel sich so verhalten, daß die Gleichung Statt findet:

$$\left(\frac{d^{m+n} z}{dx^m\, dy^n}\right) = A\left(\frac{d^{m+n} z}{(dt)^{m+n}}\right) + B\left(\frac{d^{m+n} z}{dt^{m+n-1}\, du}\right) + C\left(\frac{d^{m+n} z}{dt^{m+n-2}\, du^2}\right) + \text{ꝛc.}$$

Aufgabe 62.

§. 385. Die Natur einer Function zweyer Veränderlichen x und y zu bestimmen, wenn ihre Differenzialformel irgend eines Grades verschwinden soll.

Auflösung.

Aus dem was wir im vorhergehenden Probleme von den Differenzialformeln des dritten Grades, nachdem dieselben gleich Null gesetzt worden waren, gezeigt haben, erhellt deutlich, daß die Auflösung dieses Problemes, rücksichtlich der Differenzialformeln des vierten Grades, sich auf folgende Art verhalte:

I. Wenn $\left(\frac{d^4 z}{d x^4}\right) = 0$ ist, so erhält man

$$z = x^3 \Gamma(y) + x^2 \Delta(y) + x \Sigma(y) + \Theta(y).$$

II. Wenn $\left(\frac{d^4 z}{d x^3 d y}\right) = 0$ ist, so wird

$$z = x^2 \Gamma(y) + x \Delta(y) + \Sigma(y) + \Theta(x).$$

III. Ist aber $\left(\frac{d^4 z}{d x^2 d y^2}\right) = 0$, so erhält man

$$z = x \Gamma(y) + \Delta(y) + y \Sigma(x) + \Theta(x).$$

IV. Ist $\left(\frac{d^4 z}{d x d y^3}\right) = 0$, so findet man

$$z = \Gamma(y) + y^2 \Delta(x) + y \Sigma(x) + \Theta(x).$$

V. Wenn $\left(\frac{d^4 z}{d y^4}\right) = 0$ ist, so wird

$$z = y^3 \Gamma(x) + y^2 \Delta(x) + y \Sigma(x) + \Theta(x);$$

woraus zugleich der Fortgang auf die höhern Grade erhellt.

Zusatz 1.

§. 386. Da hier vier willkürliche Functionen erscheinen, also eben so viele, wie viele Integrationen ausgeführt werden müssen, so liegt eben hierin das Kennzeichen der vollständigen Integration.

Zusatz 2.

§. 387. Ja, es läßt sich auch umgekehrt leicht zeigen, daß die gefundenen Formeln der vorgelegten Gleichung entsprechen. So haben wir für den dritten Fall

$$z = x\Gamma(y) + \Delta(y) + y\Sigma(x) + \Theta(x)$$

gefunden, und hieraus erhalten wir durch Differenziation

erstens $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \Gamma(y) + y\Sigma'(x) + \Theta'(x)$,

zweytens $\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = y\Sigma''(x) + \Theta''(x)$,

drittens $\left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy}\right) = \Sigma''(x)$ und

viertens $\left(\frac{d^4 z}{dx^2 dy^2}\right) = 0$.

Zu demselben Resultate gelangt man, in welcher Ordnung man auch die Differenziation vornehmen mag, indem man entweder bloß x oder bloß y als veränderlich nimmt.

Anmerkung 1.

§. 388. Wir haben bisher angenommen, daß nur eine Differenzialformel gleich Null sey; die Rechnung wird aber eben so geführt, wenn eine solche Formel irgend einer Function von x und y gleich gesetzt wird, wie ich in den folgenden Problemen zeigen werde. Nur glaube ich noch das bemerken zu müssen, daß, wenn V irgend eine Function der beyden Veränderlichen x und y bezeichnet, die Formel $\int V dx$ jenes Integrale ausdrücke, welches man erhält, wenn bloß x als veränderlich angesehen wird, daß aber in der Formel $\int V dy$ bloß y als variabel anzusehen sey. Eben dieses gilt auch von den wiederholten Integrationen, z. B. bey $\int dx \int V dx$, wo bey jeder Integration bloß x als veränderlich genommen wird, allein in dem Ausdrucke $\int dy \int V dx$ muß, nachdem man das Integrale $\int V dx$ bloß in Bezug auf die Veränderliche x entwickelt hat, dann bey der zweyten Integration $\int dy \int V dx$ bloß y als veränderlich angesehen werden. Da es gleichgültig ist, welche Integration zuerst ausgeführt wird, so kann auch dieser Unterschied aus der Bezeichnungsart weggeschafft, und dieses doppelte Integrale durch $\int\int V dx dy$ dargestellt werden. Hieraus geht nun hervor, wie die Ausdrücke

$$\int\int\int V dx^2 dy \quad \text{oder} \quad \int^3 V dx^2 dy \quad \text{und} \quad \int^{m+n} V dx^m dy^n$$

genommen werden müssen. Wir haben nämlich hier dem Integrationszeichen $\int$ Zeiger beygefügt, wie man sie dem Differenzialzeichen d anzuhängen pflegt; und diese zeigen an, wie oft die Integration wiederholt werden müsse.

Anmerkung 2.

§. 389. Wir haben hier angenommen, daß die einzelnen zu wiederholenden Integrationen so ausgeführt werden, daß keine Relation zwischen den zwey Veränderlichen x und y zu Hülfe genommen wird, und man muß diesen Umstand der Aufmerksamkeit um so mehr würdigen, da gewöhnlich in den Fällen, wo solche Integrationen nöthig sind, die Rechnung auf eine ganz andere Art ausgeführt werden muß; denn, ist z. B. irgend ein geometrischer Körper vorgegeben, und man soll seinen körperlichen Inhalt oder seine Oberfläche bestimmen, so erfordert die Entwickelung eine doppelte Integration von der Form $\int\int V\,dx\,dy$, wobey V eine bestimmte Function von x und y bezeichnet. Es handelt sich also hier zuerst um das Integrale $\int V\,dy$, wenn x als constant betrachtet wird. Ist diese Integration ausgeführt, so muß man auf die der Integration vorgeschriebenen Gränzen Rücksicht nehmen. Wenn nämlich für die eine Gränze festgesetzt ist, daß das Integrale $\int V\,dy$ für $y = o$ verschwinden soll, so ist dieses für die andere Gränze so weit auszudehnen, bis y irgend einer gegebenen Function von x gleich wird. Nachdem man aber dieses Integrale $\int V\,dy$ auf diese Art bestimmt hat, so schreitet man zur Integration der Formel $dx\int V\,dy$, in welcher die Größe y nicht mehr erscheint, wenn an ihre Stelle irgend eine bestimmte Function von x substituirt worden ist, und es enthält nun in der That jener Ausdruck bloß die Veränderliche x. Ist also die erste Integration ausgeführt, so muß man sich vorstellen, daß die Veränderliche y in eine Function von x übergehe, welche man bey der zweyten Integration, bey welcher x als veränderlich erscheint, keineswegs als constant betrachten kann. Hieraus leuchtet ein, daß dieser Fall durchaus abweiche von jenen zu wiederholenden Integrationen, welche wir hier betrachten, und wir nehmen um so weniger hier auf diesen Fall Rücksicht, da jene besondere Relation bloß bey dem Ausdrucke $\int\int V\,dx\,dy$ Statt finden kann; den übrigen Fällen aber, wo das eine Differenziale dx oder dy öfter erscheint, geradezu widerspricht. Wir abstrahiren deßhalb mit vollem Rechte von jeder Relation, welche nach Vollendung der einen Integration zwischen den beyden Veränderlichen x und y etwa festgesetzt werden könnte.

Aufgabe 63.

§. 390. Die Natur der Function z zu bestimmen, wenn irgend eine Differenzialformel des dritten

oder eines höhern Grades einer Function der beyden Veränderlichen x und y gleich ist.

Auflösung.

Sey V irgend eine Function der Veränderlichen x und y, und indem wir mit den Ausdrücken des dritten Grades beginnen, erstlich $\left(\frac{d^3 z}{d x^3}\right) = V$, so wird man, wenn bloß x als veränderlich genommen wird, erhalten:

$$\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) = \int V dx + \Gamma(y);$$

ferner aber

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \int dx \int V dx + x\Gamma(y) + \Delta(y) = \int\int V dx^2 + x\Gamma(y) + \Delta(y)$$

und endlich

$$z = \int^3 V dx^3 + \tfrac{1}{2} x^2 \Gamma(y) + x\Delta(y) + \Sigma(y).$$

Eben so erhellt, daß für $\left(\frac{d^3 z}{d x^2 d y}\right) = V$ die Gleichung

$$z = \int^3 V dx^2 dy + x\Gamma(y) + \Delta(y) + \Sigma(x)$$

erhalten werde. Ist aber $\left(\frac{d^3 z}{d x d y^2}\right) = V$, so findet man:

$$z = \int^3 V dx dy^2 + \Gamma(y) + y\Delta(x) + \Sigma(x),$$

und wenn $\left(\frac{d^3 z}{d y^3}\right) = V$ ist, so wird man haben:

$$z = \int^3 V dy^3 + y^2 \Gamma(x) + y\Delta(x) + \Sigma(x).$$

Schreiten wir zu den Ausdrücken der höhern Grade fort, so werden wir auf dieselbe Art folgende Resultate finden:

wenn $\left(\frac{d^4 z}{d x^4}\right) = V$ ist, so wird

$$z = \int^4 V dx^4 + x^3 \Gamma(y) + x^2 \Delta(y) + x\Sigma(y) + \Theta(y);$$

wenn $\left(\frac{d^4 z}{d x^3 d y}\right) = V$ ist, so wird

$$z = \int^4 V dx^3 dy + x^2 \Gamma(y) + x\Delta(y) + \Sigma(y) + \Theta(x);$$

wenn $\left(\frac{d^4 z}{d x^2 d y^2}\right) = V$ ist, so wird

$$z = \int^4 V dx^2 dy^2 + x\Gamma(y) + \Delta(y) + y\Sigma(x) + \Theta(x);$$

wenn $\left(\frac{d^4 z}{dx\, dy^3}\right) = V$ ist, so wird

$$z = \int^4 V\, dx\, dy^3 = \Gamma(y) + y^2 \Delta(x) + y \Sigma(x) + \Theta(x);$$

wenn $\left(\frac{d^4 z}{dy^4}\right) = V$ ist, so wird

$$z = \int^4 V\, dy^4 + y^3 \Gamma(x) + y^2 \Delta(x) + y \Sigma(x) + \Theta(x);$$

und die Rechnung für die höhern Grade bedarf keiner weitern Erklärung.

Zusatz 1.

§. 391. So wie das Integralzeichen in dem Sinne genommen, wie es im ersten Buche geschah, die durch Integration eingeführte Constante schon an und für sich enthält, eben so muß man sich auch hier vorstellen, daß die durch Integration eingeführten willkürlichen Functionen schon in der Integralformel enthalten seyen, so daß man nicht nöthig hat dieselben auszudrücken.

Zusatz 2.

§. 392. Für die Gleichung $\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right) = V$ ist es demnach schon hinreichend, das dreyfache Integrale durch den Ausdruck $z = \int^3 V\, dx^3$ anzudeuten, welche Formel die oben hinzugefügten Theile

$$x^2 \Gamma(y) + x \Delta(y) + \Sigma(y)$$

schon in sich begreift. Eben dieß gilt auch von den übrigen.

Zusatz 3.

§. 393. Hat man also allgemein die Gleichung

$$\left(\frac{d^{m+n} z}{dx^m\, dy^n}\right) = V,$$

so stellt man ihr Integrale sogleich auf folgende Art dar:

$$z = \int^{m+n} V\, dx^m\, dy^n,$$

und dieser Ausdruck enthält seiner Bedeutung nach schon alle jene willkürlichen Functionen, $m + n$ an der Zahl, die durch eben so viele Integrationen eingeführt werden.

Anmerkung.

§. 394. Dieß sind die einfachsten Fälle, welche in dieses Kapitel zu gehören scheinen; für die verwickelteren aber lassen sich kaum be-

stimmte Vorschriften geben, da man erst angefangen hat, diesen Theil der Integralrechnung auszubilden. Indeß sieht man denn doch schon jetzt, daß, wenn sich verwickeltere Gleichungen, mittelst irgend einer Transformation, auf diese ganz einfachen Fälle zurückführen lassen, auch die Integration derselben in unserer Macht seyn werde. Übrigens halte ich es nicht für nöthig, diesen Gegenstand ausführlicher zu behandeln; ich gehe demnach zu den schwierigeren Fällen über, und zu denjenigen, die so beschaffen sind, daß sie mittelst Gleichungen der niedern Ordnungen entwickelt werden können, woraus wir eine vorzügliche und ziemlich umfassende Methode, deren wir uns oft nicht ohne glücklichen Erfolg werden bedienen können, abzuleiten im Stande seyn werden. Indessen werde ich in dieser Abhandlung nicht zu weitläufig seyn, denn es wird hinreichen, die vorzüglichen, bisher bekannten Quellen nachzuweisen.

Kapitel II.

Von der Integration höherer Gleichungen durch Reduction auf niedrigere.

Aufgabe 64.

§. 395. Die Gleichung des dritten Grades

$$\left(\frac{d^3 z}{d x^3}\right) = a^3 z$$

sey gegeben; die Natur der Function z zu bestimmen.

Auflösung.

Man nehme an, dieser Gleichung leiste folgende einfachere des ersten Grades Genüge:

$$\left(\frac{d z}{d x}\right) = n z;$$

da man nun hieraus durch Differenziation erhält:

$$\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) = n \left(\frac{d z}{d x}\right) = n^2 z,$$

und hieraus ferner

$$\left(\frac{d^3 z}{d x^3}\right) = n^2 \left(\frac{d z}{d x}\right) = n^3 z,$$

so ist einleuchtend, daß der Forderung Genüge geschehe, wenn $n^3 = a^3$ ist, und dieß kann auf dreyfache Art erfolgen, denn es ist

I. $n = a$, oder

II. $n = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} a$, oder

III. $n = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} a$.

Für jeden dieser Werthe suche man also das vollständige Integrale der Gleichung $\left(\frac{d z}{d x}\right) = n z$, so werden diese drey Integralien mit einander verbunden, das vollständige Integrale der vorgelegten Gleichung darstellen. Da aber in der Gleichung $\left(\frac{d z}{d x}\right) = n z$ die Größe y als constant betrachtet wird, so wird

$$dz = nz\,dx \quad \text{oder} \quad \frac{dz}{z} = n\,dx$$

seyn, und hieraus ergibt sich:

$$lz = nx + l\Gamma(y) \quad \text{oder} \quad z = e^{nx}\Gamma(y).$$

Man gebe nun dem n jene drey Werthe, so findet man für die vorgelegte Gleichung:

$$z = e^{ax}\Gamma(y) + e^{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}ax}\Delta(y) + e^{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}ax}\Sigma(y).$$

Da aber

$$e^{m\sqrt{-1}} = \cos. m + \sqrt{-1}\sin. m,$$

ist, so wird man durch die Formänderung der willkürlichen Functionen erhalten:

$$z = e^{ax}\Gamma(y) + e^{-\frac{1}{2}ax}\cos.\frac{ax\sqrt{3}}{2}\Delta(y) + e^{-\frac{1}{2}ax}\sin.\frac{ax\sqrt{3}}{2}\Sigma(y).$$

Zusatz 1.

§. 396. Dieses Integrale läßt sich auch in folgender Form darstellen:

$$z = e^{ax}\Gamma(y) + e^{-\frac{1}{2}ax}\Delta(y)\cos.\left(\frac{ax\sqrt{3}}{2} + Y\right),$$

wobey Y irgend eine Function von y bezeichnet.

Zusatz 2.

§. 397. Weil drey Integrationen erforderlich sind, und bey jeder die Größe y als constant behandelt wird, so löse man die Gleichung $d^3z = a^3z\,dx^3$ nach den Vorschriften des ersten Buches auf, und führe statt der drey Constanten beliebige Functionen von y ein, so erhält man dieselbe Auflösung.

Aufgabe 65.

§. 398. Sey gegeben folgende Gleichung eines beliebigen Grades:

$$Pz + Q\left(\frac{dz}{dx}\right) + R\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + S\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + T\left(\frac{d^4z}{dx^4}\right) + \text{rc.} = 0,$$

wo die Buchstaben P, Q, R, S, T, rc. was immer für Functionen der beyden Veränderlichen x und y bezeichnen, die Natur der Function z zu bestimmen.

Auflösung.

Da bey allen auszuführenden Integrationen die Größe y immer als constant angesehen wird, so muß man diese Gleichung bloß als eine Gleichung zwischen den zwey Veränderlichen x und z ansehen. Man wird daher nach den Vorschriften des ersten Buches folgende Gleichung zu behandeln haben:

$$Pz + \frac{Q\,dz}{dx} + \frac{R\,d^2z}{dx^2} + \frac{S\,d^3z}{dx^3} + \frac{T\,d^4z}{dx^4} + \ldots = 0.$$

Wenn die Auflösung dieser Gleichung gelingt, so hat man weiter nichts zu thun, als statt der, durch die einzelnen Integrationen eingeführten Constanten beliebige Functionen von y zu schreiben. Auf diese Art wird man das verlangte Integrale erhalten, und zwar das vollständige, wenn sich diese Gleichung vollständig integriren läßt.

Zusatz 1.

§. 399. Wenn also die Buchstaben P, Q, R, S, ꝛc. constante Größen bezeichnen, oder bloß die Veränderliche y enthalten, so gelingt die Integration jedesmahl, weil wir im ersten Buche solche Gleichungen allgemein zu integriren gelehrt haben.

Zusatz 2.

§. 400. Ferner gelingt auch die Auflösung der Gleichung

$$Ax + Bx\left(\frac{dz}{dx}\right) + Cx^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + Dx^3\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + \ldots = 0,$$

es mögen die Buchstaben A, B, C, D, ... constante Größen, oder bloß Functionen von y bezeichnen.

Zusatz 3.

§. 401. Wenn aber auch diese Ausdrücke nicht gleich Null sind, sondern beliebige Functionen von x und y bezeichnen, so gelingt demungeachtet die Auflösung nach den in den letzten Kapiteln des ersten Buches gelehrten Vorschriften.

Anmerkung.

§. 402. Das Gesagte läßt sich auch noch viel weiter ausdehnen auf alle Gleichungen, in welchen keine andere Differenzialausdrücke erscheinen, als:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right),\ \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right),\ \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right),$$

welche bloß die Veränderliche x enthalten; denn wie auch jene Formeln mit den endlichen Größen x, y und z verbunden seyn mögen, so gehört die Gleichung doch immer in das Gebieth des ersten Buches, weil bey allen Integrationen, welche ausgeführt werden müssen, die Größe y immer als constant behandelt wird. Sind endlich die Integrationen ausgeführt, so besteht der Unterschied nur darin, daß statt der willkürlichen Constanten, willkürliche Functionen von y in die Rechnung eingeführt werden. Es wäre überflüssig, hier zu erinnern, daß das, was über die eine Veränderliche y gesagt wurde, auch rücksichtlich der andern x gelten müsse.

Aufgabe 66.

§. 403. Die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) + b\left(\frac{d^2 z}{d x\, d y}\right) - 2a\left(\frac{d z}{d x}\right) - ab\left(\frac{d z}{d y}\right) + a^2 z = o$$

sey gegeben; die Natur der Function z zu bestimmen.

Auflösung.

Es fällt leicht in die Augen, daß dieser Gleichung die einfache Gleichung $\left(\frac{d z}{d x}\right) = a z$ Genüge leiste, daher wird $z = e^{ax}$.

Setzen wir also $z = e^{ax} v$, so erhalten wir:

$$\left(\frac{d z}{d x}\right) = e^{ax}\left(a v + \left(\frac{d v}{d x}\right)\right),\quad \left(\frac{d z}{d y}\right) = e^{ax}\left(\frac{d v}{d y}\right),$$

und daher ist

$$\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) = e^{ax}\left(a^2 v + 2a\left(\frac{d v}{d x}\right) + \left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right)\right) \text{ und}$$

$$\left(\frac{d^2 z}{d x\, d y}\right) = e^{ax}\left(a\left(\frac{d v}{d y}\right) + \left(\frac{d^2 v}{d x\, d y}\right)\right).$$

Werden diese Werthe substituirt, und die Gleichung durch e^{ax} dividirt, so werden wir erhalten:

$$\left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) + b\left(\frac{d^2 v}{d x\, d y}\right) = o.$$

Weil nun hier durchaus $\left(\frac{d v}{d x}\right)$ erscheint, so setzen wir $\left(\frac{d v}{d x}\right) = u$ und es wird

$$\left(\frac{d u}{d x}\right) + b\left(\frac{d u}{d y}\right) = o;$$

das Integrale hiervon ist:

$$f(y - bx) = u;$$

schreiben wir also

$$u = \left(\frac{dv}{dx}\right) = -b\Gamma'(y - bx),$$

damit wir erhalten:

$$v = \Gamma(y - bx) + \Delta(y),$$

und daher wird das gesuchte Integrale seyn:

$$z = e^{ax}(\Gamma(y - bx) + \Delta(y)),$$

welcher Ausdruck wegen der beyden willkürlichen Functionen das vollständige Integrale ist.

Aufgabe 67.

§. 404. Die Gleichung

$$0 = (a + 2b)z - (2a + 3b)\left(\frac{dz}{dx}\right) + c\left(\frac{dz}{dy}\right) + a\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - 2c\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + b\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + c\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right)$$

sey gegeben; die Natur der Function z aufzufinden.

Auflösung.

Diese Gleichung ist so beschaffen, daß ihr die Gleichung $z = e^x$ offenbar Genüge leistet; setzen wir also $z = e^x v$, und wir werden erhalten:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = e^x\left(v + \left(\frac{dv}{dx}\right)\right); \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = e^x\left(\frac{dv}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = e^x\left[v + 2\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)\right];$$

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = e^x\left[\left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{d^2v}{dxdy}\right)\right]$$

$$\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) = e^x\left[v + 3\left(\frac{dv}{dx}\right) + 3\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)\right]$$

$$\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right) = e^x\left[\left(\frac{dv}{dy}\right) + 2\left(\frac{d^2v}{dxdy}\right) + \left(\frac{d^3v}{dx^2dy}\right)\right].$$

Durch Substitution dieser Werthe erhalten wir folgende ziemlich einfache Gleichung:

$$0 = (a + 3b)\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + b\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) + c\left(\frac{d^3v}{dx^2dy}\right),$$

bey welcher die Bequemlichkeit Statt findet, daß in den einzelnen

Gliedern der Ausdruck $\left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right)$ erscheint; wird daher $\left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) = u$ gesetzt, so ergibt sich folgende Gleichung des ersten Grades:

$$o = (a + 3b)\, u + b \left(\frac{du}{dx}\right) + c \left(\frac{du}{dy}\right);$$

hieraus erhellt, daß, wenn

$$du = p\,dx + q\,dy$$

gesetzt wird,

$$(a + 3b)\, u + bp + cq = o$$

seyn müsse, welche Gleichung auf folgende Art aufgelöst wird.

Da man für $a + 3b = f$ erhält:

$$q = -\frac{bp}{c} - \frac{fu}{c}, \text{ so wird}$$

$$du = p\,dx - \frac{bp\,dy}{c} - \frac{fu\,dy}{c} \text{ oder}$$

$$dx - \frac{b\,dy}{c} = \frac{1}{p}\left(du + \frac{fu\,dy}{c}\right) = \frac{u}{p}\left(\frac{du}{u} + \frac{f\,dy}{c}\right),$$

und so muß nothwendig $\frac{u}{p}$ eine Function von $x - \frac{by}{c}$ seyn, und daher wird

$$l u + \frac{fy}{c} = f\,(cx - by) \text{ und}$$

$$u = e^{\frac{-fy}{c}}\, \Gamma''\left(x - \frac{by}{c}\right) = \left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right).$$

Weil nun y als constant angesehen werden muß, so gibt die erste Integration:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = e^{\frac{-fy}{c}}\, \Gamma'\left(x - \frac{by}{c}\right) + \Delta\,(y),$$

und die andere:

$$v = e^{\frac{-fy}{c}}\, \Gamma\left(x - \frac{by}{c}\right) + x\Delta\,(y) + \Sigma\,(y).$$

Wird daher $a + 3b = f$ gesetzt, so ist das vollständige Integrale der vorgelegten Gleichung:

$$z = e^{x - \frac{fy}{c}}\, \Gamma\left(x - \frac{by}{c}\right) + e^x x\Delta\,(y) + e^x \Sigma\,(y).$$

Aufgabe 68.

§. 405. Die Differenzialgleichung des dritten

Grades

$$o = Pz - 3P\left(\frac{dz}{dx}\right) + 3P\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - P\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)$$
$$+ Q\left(\frac{dz}{dy}\right) - 2Q\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + Q\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right),$$

wo P und Q was immer für Functionen von x und y seyn mögen, sey gegeben; die Natur der Function z zu bestimmen.

Auflösung.

Wenn sich aus der gegebenen Form leicht erkennen läßt, daß der Werth e^x statt z gesetzt Genüge leiste, so kömmt man durch die Substitution $z = e^x v$ auf folgende Gleichung:

$$-P\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) + Q\left(\frac{d^3v}{dx^2dy}\right) = o,$$

welche ferner, wenn man $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) = u$ setzt, so daß $v = \int\int u\,dx^2$ ist, übergeht in folgende Form:

$$-P\left(\frac{du}{dx}\right) + Q\left(\frac{du}{dy}\right) = o.$$

Man setze $du = p\,dx + q\,dy$, so wird $Qq = Pp$, also $q = \frac{Pp}{Q}$, und daher

$$du = p\left(dx + \frac{P}{Q}dy\right);$$

und hieraus ersieht man, daß die Größe p so beschaffen seyn muß, daß die Formel

$$dx + \frac{P}{Q}dy$$

durch sie multiplicirt integrabel werde. Man suche also einen Multiplicator M, welcher den Ausdruck

$Q\,dx + P\,dy$ integrabel macht, so daß

$$\int M(Q\,dx + P\,dy) = s$$

ist. Ich nehme also an, daß man die Function s von x und y bestimmen könne, so werden wir wegen

$$Q\,dx + P\,dy = \frac{ds}{M}$$

$du = \frac{p\,ds}{MQ}$ erhalten, woraus hervorgeht, daß $\frac{p}{MQ}$ eine Function der Größe s bezeichne. Wird also $\frac{p}{MQ} = \Gamma'(s)$ gesetzt, so erhält

oder eines höhern Grades einer Function der beyden Veränderlichen x und y gleich ist.

Auflösung.

Sey V irgend eine Function der Veränderlichen x und y, und indem wir mit den Ausdrücken des dritten Grades beginnen, erstlich $\left(\frac{d^3 z}{d x^3}\right) = V$, so wird man, wenn bloß x als veränderlich genommen wird, erhalten:

$$\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) = \int V dx + \Gamma(y);$$

ferner aber

$$\left(\frac{d z}{d x}\right) = \int dx \int V dx + x\Gamma(y) + \Delta(y) = \int\int V dx^2 + x\Gamma(y) + \Delta(y)$$

und endlich

$$z = \int^3 V dx^3 + \tfrac{1}{2} x^2 \Gamma(y) + x\Delta(y) + \Sigma(y).$$

Eben so erhellt, daß für $\left(\frac{d^3 z}{d x^2 d y}\right) = V$ die Gleichung

$$z = \int^3 V dx^2 dy + x\Gamma(y) + \Delta(y) + \Sigma(x)$$

erhalten werde. Ist aber $\left(\frac{d^3 z}{d x d y^2}\right) = V$, so findet man:

$$z = \int^3 V dx dy^2 + \Gamma(y) + y\Delta(x) + \Sigma(x),$$

und wenn $\left(\frac{d^3 z}{d y^3}\right) = V$ ist, so wird man haben:

$$z = \int^3 V dy^3 + y^2 \Gamma(x) + y\Delta(x) + \Sigma(x).$$

Schreiten wir zu den Ausdrücken der höhern Grade fort, so werden wir auf dieselbe Art folgende Resultate finden:

wenn $\left(\frac{d^4 z}{d x^4}\right) = V$ ist, so wird

$$z = \int^4 V dx^4 + x^3 \Gamma(y) + x^2 \Delta(y) + x\Sigma(y) + \Theta(y);$$

wenn $\left(\frac{d^4 z}{d x^3 d y}\right) = V$ ist, so wird

$$z = \int^4 V dx^3 dy + x^2 \Gamma(y) + x\Delta(y) + \Sigma(y) + \Theta(x);$$

wenn $\left(\frac{d^4 z}{d x^2 d y^2}\right) = V$ ist, so wird

$$z = \int^4 V dx^2 dy^2 + x\Gamma(y) + \Delta(y) + y\Sigma(x) + \Theta(x);$$

wenn $\left(\frac{d^4 z}{dx\, dy^3}\right) = V$ ist, so wird

$$z = \int^4 V\, dx\, dy^3 = \Gamma(y) + y^2 \Delta(x) + y \Sigma(x) + \Theta(x);$$

wenn $\left(\frac{d^4 z}{dy^4}\right) = V$ ist, so wird

$$z = \int^4 V\, dy^4 + y^3 \Gamma(x) + y^2 \Delta(x) + y \Sigma(x) + \Theta(x);$$

und die Rechnung für die höhern Grade bedarf keiner weitern Erklärung.

Zusatz 1.

§. 391. So wie das Integralzeichen in dem Sinne genommen, wie es im ersten Buche geschah, die durch Integration eingeführte Constante schon an und für sich enthält, eben so muß man sich auch hier vorstellen, daß die durch Integration eingeführten willkürlichen Functionen schon in der Integralformel enthalten seyen, so daß man nicht nöthig hat dieselben auszudrücken.

Zusatz 2.

§. 392. Für die Gleichung $\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right) = V$ ist es demnach schon hinreichend, das dreyfache Integrale durch den Ausdruck $z = \int^3 V\, dx^3$ anzudeuten, welche Formel die oben hinzugefügten Theile

$$x^2 \Gamma(y) + x \Delta(y) + \Sigma(y)$$

schon in sich begreift. Eben dieß gilt auch von den übrigen.

Zusatz 3.

§. 393. Hat man also allgemein die Gleichung

$$\left(\frac{d^{m+n} z}{dx^m\, dy^n}\right) = V,$$

so stellt man ihr Integrale sogleich auf folgende Art dar:

$$z = \int^{m+n} V\, dx^m\, dy^n,$$

und dieser Ausdruck enthält seiner Bedeutung nach schon alle jene willkürlichen Functionen, $m + n$ an der Zahl, die durch eben so viele Integrationen eingeführt werden.

Anmerkung.

§. 394. Dieß sind die einfachsten Fälle, welche in dieses Kapitel zu gehören scheinen; für die verwickelteren aber lassen sich kaum be-

stimmte Vorschriften geben, da man erst angefangen hat, diesen Theil der Integralrechnung auszubilden. Indeß sieht man denn doch schon jetzt, daß, wenn sich verwickeltere Gleichungen, mittelst irgend einer Transformation, auf diese ganz einfachen Fälle zurückführen lassen, auch die Integration derselben in unserer Macht seyn werde. Übrigens halte ich es nicht für nöthig, diesen Gegenstand ausführlicher zu behandeln; ich gehe demnach zu den schwierigeren Fällen über, und zu denjenigen, die so beschaffen sind, daß sie mittelst Gleichungen der niedern Ordnungen entwickelt werden können, woraus wir eine vorzügliche und ziemlich umfassende Methode, deren wir uns oft nicht ohne glücklichen Erfolg werden bedienen können, abzuleiten im Stande seyn werden. Indessen werde ich in dieser Abhandlung nicht zu weitläufig seyn, denn es wird hinreichen, die vorzüglichen, bisher bekannten Quellen nachzuweisen.

Kapitel II.

Von der Integration höherer Gleichungen durch Reduction auf niedrigere.

Aufgabe 64.

§. 395. Die Gleichung des dritten Grades

$$\left(\frac{d^3 z}{d x^3}\right) = a^3 z$$

sey gegeben; die Natur der Function z zu bestimmen.

Auflösung.

Man nehme an, dieser Gleichung leiste folgende einfachere des ersten Grades Genüge:

$$\left(\frac{d z}{d x}\right) = n z;$$

da man nun hieraus durch Differenziation erhält:

$$\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) = n \left(\frac{d z}{d x}\right) = n^2 z,$$

und hieraus ferner

$$\left(\frac{d^3 z}{d x^3}\right) = n^2 \left(\frac{d z}{d x}\right) = n^3 z,$$

so ist einleuchtend, daß der Forderung Genüge geschehe, wenn $n^3 = a^3$ ist, und dieß kann auf dreyfache Art erfolgen, denn es ist

$$\text{I. } n = a, \text{ oder}$$

$$\text{II. } n = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} a, \text{ oder}$$

$$\text{III. } n = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} a.$$

Für jeden dieser Werthe suche man also das vollständige Integrale der Gleichung $\left(\frac{d z}{d x}\right) = n z$, so werden diese drey Integralien mit einander verbunden, das vollständige Integrale der vorgelegten Gleichung darstellen. Da aber in der Gleichung $\left(\frac{d z}{d x}\right) = n z$ die Größe y als constant betrachtet wird, so wird

$$dz = nz\,dx \quad \text{oder} \quad \frac{dz}{z} = n\,dx$$

seyn, und hieraus ergibt sich:

$$lz = nx + l\Gamma(y) \quad \text{oder} \quad z = e^{nx}\Gamma(y).$$

Man gebe nun dem n jene drey Werthe, so findet man für die vorgelegte Gleichung:

$$z = e^{ax}\Gamma(y) + e^{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}ax}\Delta(y) + e^{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}ax}\Sigma(y).$$

Da aber

$$e^{m\sqrt{-1}} = \cos.m + \sqrt{-1}\sin.m,$$

ist, so wird man durch die Formänderung der willkürlichen Functionen erhalten:

$$z = e^{ax}\Gamma(y) + e^{-\frac{1}{2}ax}\cos.\frac{ax\sqrt{3}}{2}\Delta(y) + e^{-\frac{1}{2}ax}\sin.\frac{ax\sqrt{3}}{2}\Sigma(y).$$

Zusatz 1.

§. 396. Dieses Integrale läßt sich auch in folgender Form darstellen:

$$z = e^{ax}\Gamma(y) + e^{-\frac{1}{2}ax}\Delta(y)\cos.\left(\frac{ax\sqrt{3}}{2} + Y\right),$$

wobey Y irgend eine Function von y bezeichnet.

Zusatz 2.

§. 397. Weil drey Integrationen erforderlich sind, und bey jeder die Größe y als constant behandelt wird, so löse man die Gleichung $d^3z = a^3z\,dx^3$ nach den Vorschriften des ersten Buches auf, und führe statt der drey Constanten beliebige Functionen von y ein, so erhält man dieselbe Auflösung.

Aufgabe 65.

§. 398. Sey gegeben folgende Gleichung eines beliebigen Grades:

$$Pz + Q\left(\frac{dz}{dx}\right) + R\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + S\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + T\left(\frac{d^4z}{dx^4}\right) + \text{etc.} = 0,$$

wo die Buchstaben P, Q, R, S, T, etc. was immer für Functionen der beyden Veränderlichen x und y bezeichnen, die Natur der Function z zu bestimmen.

Auflösung.

Da bey allen auszuführenden Integrationen die Größe y immer als constant angesehen wird, so muß man diese Gleichung bloß als eine Gleichung zwischen den zwey Veränderlichen x und z ansehen. Man wird daher nach den Vorschriften des ersten Buches folgende Gleichung zu behandeln haben:

$$Pz + \frac{Qdz}{dx} + \frac{Rd^2z}{dx^2} + \frac{Sd^3z}{dx^3} + \frac{Td^4z}{dx^4} + \ldots = 0.$$

Wenn die Auflösung dieser Gleichung gelingt, so hat man weiter nichts zu thun, als statt der, durch die einzelnen Integrationen eingeführten Constanten beliebige Functionen von y zu schreiben. Auf diese Art wird man das verlangte Integrale erhalten, und zwar das vollständige, wenn sich diese Gleichung vollständig integriren läßt.

Zusatz 1.

§. 399. Wenn also die Buchstaben P, Q, R, S, ꝛc. constante Größen bezeichnen, oder bloß die Veränderliche y enthalten, so gelingt die Integration jedesmahl, weil wir im ersten Buche solche Gleichungen allgemein zu integriren gelehrt haben.

Zusatz 2.

§. 400. Ferner gelingt auch die Auflösung der Gleichung

$$Ax + Bx\left(\frac{dz}{dx}\right) + Cx^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + Dx^3\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + \ldots = 0,$$

es mögen die Buchstaben A, B, C, D, ... constante Größen, oder bloß Functionen von y bezeichnen.

Zusatz 3.

§. 401. Wenn aber auch diese Ausdrücke nicht gleich Null sind, sondern beliebige Functionen von x und y bezeichnen, so gelingt demungeachtet die Auflösung nach den in den letzten Kapiteln des ersten Buches gelehrten Vorschriften.

Anmerkung.

§. 402. Das Gesagte läßt sich auch noch viel weiter ausdehnen auf alle Gleichungen, in welchen keine andere Differenzialausdrücke erscheinen, als:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right), \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right),$$

wo zuerst einleuchtet, daß $A = \alpha^m \beta^n$ sey; für die Auffindung [...] übrigen Coefficienten aber werden wir, wenn die Differenzialien [...] Logarithmen genommen werden, erhalten:

$$\frac{ds}{s\,dv} = \frac{m\gamma}{\alpha + \gamma v} + \frac{n\delta}{\beta + \delta v},$$

also

$$\frac{ds}{dv}\left(\alpha\beta + (\alpha\delta + \beta\gamma)v + \gamma\delta v^2\right) - s\left(m\beta\gamma + n\alpha\delta + (m+n)\gamma\delta v\right) = \ldots$$

und wenn man hier statt s die angenommene Reihe substituirt, [...] folgende Gleichung entstehen:

$$\begin{array}{llllll}
0 = \alpha\beta B & + 2\alpha\beta C v & + 3\alpha\beta D v^2 & + 4\alpha\beta E v^3 & + 5\alpha\beta F \ldots \\
 & + \alpha\delta B & + 2\alpha\delta C & + 3\alpha\delta D & + 4\alpha\delta E \\
 & + \beta\gamma B & + 2\beta\gamma C & + 3\beta\gamma D & + 4\beta\gamma E \\
 & & + \gamma\delta B & + 2\gamma\delta C & + 3\gamma\delta D \\
- m\beta\gamma A & - m\beta\gamma B & - m\beta\gamma C & - m\beta\gamma D & - m\beta\gamma E \\
- n\alpha\delta A & - n\alpha\delta B & - n\alpha\delta C & - n\alpha\delta D & - n\alpha\delta E \\
 & - (m+n)\gamma\delta A & - (m+n)\gamma\delta B & - (m+n)\gamma\delta C & - (m+n)\gamma\delta \ldots
\end{array}$$

und daher wird jeder Coefficient aus den vorhergehenden auf folgende Art bestimmt:

$$A = \alpha^m \beta^n$$

$$B = \frac{m\beta\gamma + n\alpha\delta}{\alpha\beta} A$$

$$C = \frac{(m-1)\beta\gamma + (n-1)\alpha\delta}{2\alpha\beta} B + \frac{(m+n)\gamma\delta}{2\alpha\beta} A$$

$$D = \frac{(m-2)\beta\gamma + (n-2)\alpha\delta}{3\alpha\beta} C + \frac{(m+n-1)\gamma\delta}{3\alpha\beta} B$$

$$E = \frac{(m-3)\beta\gamma + (n-3)\alpha\delta}{4\alpha\beta} D + \frac{(m+n-2)\gamma\delta}{4\alpha\beta} C$$

ꝛc.

Sind also diese Coefficienten gefunden, und man setzt

$$t = \alpha x + \beta y \quad \text{und} \quad u = \gamma x + \delta y,$$

so wird die Transformation einer jeden Differenzialformel sich so halten, daß die Gleichung Statt findet:

$$\left(\frac{d^{m+n} z}{dx^m\, dy^n}\right) = A\left(\frac{d^{m+n} z}{(dt)^{m+n}}\right) + B\left(\frac{d^{m+n} z}{dt^{m+n-1}\, du}\right) + C\left(\frac{d^{m+n} z}{dt^{m+n-2}\, du^2}\right) + \ldots$$

das Integrale hiervon ist:

$$f(y - bx) = u;$$

schreiben wir also

$$u = \left(\frac{dv}{dx}\right) = - b\Gamma'(y - bx),$$

damit wir erhalten:

$$v = \Gamma(y - bx) + \Delta(y),$$

und daher wird das gesuchte Integrale seyn:

$$z = e^{ax}(\Gamma(y - bx) + \Delta(y)),$$

welcher Ausdruck wegen der beyden willkürlichen Functionen das vollständige Integrale ist.

Aufgabe 67.

§. 404. Die Gleichung

$$0 = (a + 2b)z - (2a + 3b)\left(\frac{dz}{dx}\right) + c\left(\frac{dz}{dy}\right) + a\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - 2c\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + b\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + c\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right)$$

sey gegeben; die Natur der Function z aufzufinden.

Auflösung.

Diese Gleichung ist so beschaffen, daß ihr die Gleichung $z = e^x$ offenbar Genüge leistet; setzen wir also $z = e^x v$, und wir werden erhalten:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = e^x\left(v + \left(\frac{dv}{dx}\right)\right); \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = e^x\left(\frac{dv}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = e^x\left[v + 2\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)\right];$$

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = e^x\left[\left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{d^2v}{dxdy}\right)\right]$$

$$\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) = e^x\left[v + 3\left(\frac{dv}{dx}\right) + 3\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)\right]$$

$$\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right) = e^x\left[\left(\frac{dv}{dy}\right) + 2\left(\frac{d^2v}{dxdy}\right) + \left(\frac{d^3v}{dx^2dy}\right)\right].$$

Durch Substitution dieser Werthe erhalten wir folgende ziemlich einfache Gleichung:

$$0 = (a + 3b)\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + b\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) + c\left(\frac{d^3v}{dx^2dy}\right),$$

bey welcher die Bequemlichkeit Statt findet, daß in den einzelnen

Gliedern der Ausdruck $\left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right)$ erscheint; wird daher $\left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) = u$ gesetzt, so ergibt sich folgende Gleichung des ersten Grades:

$$o = (a + 3b)\,u + b\left(\frac{du}{dx}\right) + c\left(\frac{du}{dy}\right);$$

hieraus erhellt, daß, wenn

$$du = p\,dx + q\,dy$$

gesetzt wird,

$$(a + 3b)\,u + bp + cq = o$$

seyn müsse, welche Gleichung auf folgende Art aufgelöst wird.

Da man für $a + 3b = f$ erhält:

$$q = -\frac{bp}{c} - \frac{fu}{c}, \text{ so wird}$$

$$du = p\,dx - \frac{b\,p\,dy}{c} - \frac{f\,u\,dy}{c} \text{ oder}$$

$$dx - \frac{b\,dy}{c} = \frac{1}{p}\left(du + \frac{f\,u\,dy}{c}\right) = \frac{u}{p}\left(\frac{du}{u} + \frac{f\,dy}{c}\right),$$

und so muß nothwendig $\frac{u}{p}$ eine Function von $x - \frac{by}{c}$ seyn, und daher wird

$$lu + \frac{fy}{c} = f\,(cx - by) \text{ und}$$

$$u = e^{\frac{-fy}{c}}\,\Gamma''\left(x - \frac{by}{c}\right) = \left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right).$$

Weil nun y als constant angesehen werden muß, so gibt die erste Integration:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = e^{\frac{-fy}{c}}\,\Gamma'\left(x - \frac{by}{c}\right) + \Delta\,(y),$$

und die andere:

$$v = e^{\frac{-fy}{c}}\,\Gamma\left(x - \frac{by}{c}\right) + x\Delta\,(y) + \Sigma\,(y).$$

Wird daher $a + 3b = f$ gesetzt, so ist das vollständige Integrale der vorgelegten Gleichung:

$$z = e^{x - \frac{fy}{c}}\,\Gamma\left(x - \frac{by}{c}\right) + e^x x\,\Delta\,(y) + e^x\,\Sigma\,(y).$$

Aufgabe 68.

§. 405. Die Differenzialgleichung des dritten

Grades

$$z = Pz - 3P\left(\frac{dz}{dx}\right) + 3P\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - P\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)$$
$$+ Q\left(\frac{dz}{dy}\right) - 2Q\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + Q\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right),$$

wo P und Q was immer für Functionen von x und y seyn mögen, sey gegeben; die Natur der Function z zu bestimmen.

Auflösung.

Wenn sich aus der gegebenen Form leicht erkennen läßt, daß der Werth e^x statt z gesetzt Genüge leiste, so kömmt man durch die Substitution $z = e^x v$ auf folgende Gleichung:

$$-P\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) + Q\left(\frac{d^3v}{dx^2dy}\right) = 0,$$

welche ferner, wenn man $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) = u$ setzt, so daß $v = \int\int u\,dx^2$ ist, übergeht in folgende Form:

$$-P\left(\frac{du}{dx}\right) + Q\left(\frac{du}{dy}\right) = 0.$$

Man setze $du = p\,dx + q\,dy$, so wird $Qq = Pp$, also $q = \frac{Pp}{Q}$, und daher

$$du = p\left(dx + \frac{P}{Q}dy\right);$$

und hieraus ersieht man, daß die Größe p so beschaffen seyn muß, daß die Formel

$$dx + \frac{P}{Q}dy$$

durch sie multiplicirt integrabel werde. Man suche also einen Multiplicator M, welcher den Ausdruck

$Q\,dx + P\,dy$ integrabel macht, so daß

$$\int M(Q\,dx + P\,dy) = s$$

ist. Ich nehme also an, daß man die Function s von x und y bestimmen könne, so werden wir wegen

$$Q\,dx + P\,dy = \frac{ds}{M}$$

$du = \frac{p\,ds}{MQ}$ erhalten, woraus hervorgeht, daß $\frac{p}{MQ}$ eine Function der Größe s bezeichne. Wird also $\frac{p}{MQ} = \Gamma'(s)$ gesetzt, so erhält

man sogleich $u = \Gamma(s)$ und daher $v = \int dx \int dx \Gamma(s)$, wo bey jeder der beyden Integrationen die Größe y als constant angesehen wird. Es wird sich deßhalb unser Problem auf folgende Weise auflösen lassen:

Für die Differenzialformel $Q dx + P dy$ suche man einen sie integrabel machenden Multiplicator M, so daß

$$M(Q dx + P dy) = ds$$

wird; hat man diese Function von s von x und y gefunden, so wird man erhalten:

$$z = e^x \int dx \int dx \Gamma(s) + e^x x \Delta(y) + e^x \Sigma(y).$$

Anmerkung.

§. 406. Bey diesen Gleichungen findet die Bequemlichkeit Statt, daß sie durch die Substitution $z = e^x v$ eine solche Form annehmen, welche sich leicht auf eine einfache, im ersten Abschnitte betrachtete Form zurückführen läßt. Denn obgleich die Differenzialien des dritten Grades nicht getilgt wurden, so verschwanden dennoch die übrigen Glieder aus der Rechnung, so daß man dann die neue Substitution $\left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right) = u$ gebrauchen, und mit Hülfe derselben zu einer Differenzialgleichung des ersten Grades gelangen konnte. Es würde demnach eine einzige Substitution zu demselben Ziele geführt haben, wenn wir sogleich $z = e^x \int\int u\, dx^2$ gesetzt hätten. Es wäre zu wünschen, daß man Vorschriften besäße, mit Hülfe deren derley Substitutionen leicht erkannt werden könnten. Indessen wird man seinen Zweck erreichen können, wenn man das letzte Problem §. 209, welches viel allgemeiner ist, zu Hülfe nimmt.

Aufgabe 67.

§. 407. Sey gegeben die Differenzialgleichung des dritten Grades:

$$0 = (P+Q)z - (2P+3Q)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (P+3Q)\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) - Q\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)$$
$$- R\left(\frac{dz}{dy}\right) + 2R\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) - R\left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy}\right)$$

wo P, Q und R was immer für gegebene Functionen von x und y seyn mögen; die Natur der Function z zu bestimmen.

Auflösung.

Bedienen wir uns derselben Substitution $z = e^x v$, die wir bis-

her gebraucht haben, so wird die vorgelegte Gleichung in folgende transformirt:

$$o = P\left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) - Q\left(\frac{d^3 v}{d x^3}\right) - R\left(\frac{d^3 v}{d x^2 d y}\right),$$

wobey die Bequemlichkeit Statt findet, daß wenn $\left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) = u$ gesetzt wird, nachstehende Differenzialgleichung des ersten Grades zum Vorschein kömmt:

$$o = Pu - Q\left(\frac{du}{dx}\right) - R\left(\frac{du}{dy}\right),$$

und es ist daher zu untersuchen, was für eine Function von x und y die Größe u ist. Setzen wir also, es sey

$$du = pdx + qdy,$$

so gibt jene Bedingungsgleichung die Relation

$$Pu = Qp + Rq,$$

und wir bilden daher nach dem oben, §. 209, angeführten Kunstgriffe nachstehende drey Gleichungen:

$$\begin{aligned} Ldu &= Lpdx + Lqdy \\ MPudx &= MQpdx + MRqdx \\ NPudy &= NQpdy + NRqdy, \end{aligned}$$

und diese werden, in eine Summe gebracht, folgende Gleichung geben:

$$\begin{aligned} Ldu + Pu(Mdx + Ndy) = {} & p((L + MQ)dx + NQdy) \\ & + q((L + NR)dy + MRdx). \end{aligned}$$

Da hier die drey Größen L, M und N willkürlich sind, so setze man zwischen denselben zuerst eine solche Relation fest, daß die beyden Theile des letzten Gliedes einen gemeinschaftlichen Factor erhalten. Sey nämlich

$$(L + MQ) : NQ = MR : (L + NR) \quad \text{oder}$$
$$L = - MQ - NR,$$

und wir werden erhalten:

$$- du(MQ + NR) + Pu(Mdx + Ndy) = (Mq - Np)(Rdx - Qdy).$$

Nun suche man einen Multiplicator T, welcher den Ausdruck $Rdx - Qdy$ integrabel macht, so daß

$$T(Rdx - Qdy) = ds$$

wird; daher wird man sowohl die Function T als s als bekannt ansehen können, und wir erhalten:

stimmte Vorschriften geben, da man erst angefangen hat, diesen Theil der Integralrechnung auszubilden. Indeß sieht man denn doch schon jetzt, daß, wenn sich verwickeltere Gleichungen, mittelst irgend einer Transformation, auf diese ganz einfachen Fälle zurückführen lassen, auch die Integration derselben in unserer Macht seyn werde. Übrigens halte ich es nicht für nöthig, diesen Gegenstand ausführlicher zu behandeln; ich gehe demnach zu den schwierigeren Fällen über, und zu denjenigen, die so beschaffen sind, daß sie mittelst Gleichungen der niedern Ordnungen entwickelt werden können, woraus wir eine vorzügliche und ziemlich umfassende Methode, deren wir uns oft nicht ohne glücklichen Erfolg werden bedienen können, abzuleiten im Stande seyn werden. Indessen werde ich in dieser Abhandlung nicht zu weitläufig seyn, denn es wird hinreichen, die vorzüglichen, bisher bekannten Quellen nachzuweisen.

$$\int \frac{P\,(M\,dx + N\,dy)}{MQ + NR} = l\,\omega,$$

welche Bestimmung immer als ausführbar betrachtet werden kann.

Anmerkung.

§. 410. Da die ganze Rechnung sogleich dahin geführt wird, daß die Function u aus der Gleichung

$$Pu = Q\left(\frac{du}{dx}\right) + R\left(\frac{du}{dy}\right)$$

bestimmt werden muß, so wird man die Auflösung, ohne jene Umschweife, deren wir uns bey der obigen Auflösung bedient haben, weit leichter auf folgende Art ausführen können, wodurch man einen schönen Zusatz zum ersten Abschnitte erhält. Man setze

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = LMu \quad \text{und} \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = LNu,$$

so wird erstlich

$$P = L\,(MQ + NR), \quad \text{und daher}$$

$$L = \frac{P}{MQ + NR};$$

ferner werden wir, weil

$$du = dx\left(\frac{du}{dx}\right) + dy\left(\frac{du}{dy}\right)$$

ist, erhalten:

$$\frac{du}{u} = L\,(M\,dx + N\,dy) = \frac{P\,(M\,dx + N\,dy)}{MQ + NR},$$

wo die Größen M und N so genommen werden müssen, daß die Integration gelingt, und da dieß auf unzählige Arten geschehen kann, so ist die hieraus sich ergebende Auflösung als vollständig anzusehen. Kennt man aber ein particuläres Integrale, so wird sich daraus die vollständige Auflösung weit bequemer auf folgende Art bestimmen lassen. Man setze nämlich

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{P\,(M\,dx + N\,dy)}{MQ + NR},$$

so daß der Werth von ω, welcher für u genommen wird, nun als particuläres Integrale erscheint, und es sey

$$P\omega = Q\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + R\left(\frac{d\omega}{dy}\right).$$

Nun setzen wir für den vollständigen Werth $u = \omega\,\Gamma\,(s)$ und wir erhalten nach gehöriger Substitution:

$$P\omega\Gamma(s) = Q\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\Gamma(s) + R\left(\frac{d\omega}{dy}\right)\Gamma(s)$$
$$+ Q\omega\left(\frac{ds}{dx}\right)\Gamma'(s) + R\omega\left(\frac{ds}{dy}\right)\Gamma'(s).$$

welche Gleichung sich sogleich in folgende zusammenziehen läßt:

$$Q\left(\frac{ds}{dx}\right) + R\left(\frac{ds}{dy}\right) = 0,$$

hieraus folgern wir:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right) = TR \quad \text{und} \quad \left(\frac{ds}{dy}\right) = -TQ,$$

und ferner

$$ds = T(Rdx - Qdy);$$

hieraus erhellt, daß die Größe s aus dem Ausdrucke $Rdx - Qdy$ gefunden werde; für diese Formel aber muß zuerst der Factor T, welcher dieselbe integrabel macht, gesucht, dann aber das Integrale derselben für s genommen werden. Man sey also hier vorzüglich darauf aufmerksam, wie schön sich dieselbe Auflösung darstellen lasse, zu welcher wir durch so viele Umstände gelangt sind.

Aufgabe 68.

§. 411. **Wenn die Differenzialgleichung des vierten Grades**

$$\left(\frac{d^4 z}{dy^4}\right) = a^2\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$$

gegeben ist, die Auffindung der Function z bloß auf die Auflösung einer einfachen Gleichung zurückzuführen.

Auflösung.

Betrachtet man diese Gleichung mit einiger Aufmerksamkeit, so wird man bald einsehen, daß ihr die einfachere Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = b\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

Genüge leiste; denn man erhält hieraus durch Differenziation in Bezug auf y

$$\left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right) = b\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right),$$

und durch nochmahliges Differenziren in derselben Beziehung:

$$\left(\frac{d^4 z}{dy^4}\right) = b\left(\frac{d^3 z}{dx\,dy^2}\right).$$

Differenzirt man aber die angenommene Gleichung nach x, so findet man

$$\left(\frac{d^3 z}{dx\, dy^2}\right) = b \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right),$$

und führt man diesen Werth in der letzten Gleichung ein, so ergibt sich:

$$\left(\frac{d^4 z}{dy^4}\right) = b^2 \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right),$$

welcher Ausdruck mit der vorgelegten Gleichung übereinstimmt, wenn $b^2 = a^2$ ist, und dieß kann auf doppelte Art geschehen, wenn

$$b = + a \quad \text{und} \quad b = - a$$

ist. Wenn wir diese beyden einfacheren Gleichungen

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) - a \left(\frac{dz}{dx}\right) = 0, \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) + a \left(\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

deren erstere $z = P$ und letztere $z = Q$ geben mag, aufgelöst haben, so werden wir für die vorgelegte Gleichung erhalten:

$$z = P + Q,$$

und weil sowohl P als Q zwey willkürliche Functionen enthält, so wird das auf diese Art gefundene Integrale vier solche Functionen enthalten, und wird also vollständig seyn.

Zusatz 1.

§. 412. Es werden leicht unzählige particuläre Auflösungen erhalten, wenn man

$$z = e^{\mu x + \nu y}$$

setzt, denn nach gehöriger Substitution muß nothwendig

$$\nu^4 = \mu^2 a^2 \quad \text{und} \quad \mu = \pm \frac{\nu^2}{a}$$

werden. Sey $\nu = \lambda a$, so wird $\mu = \pm \lambda^2 a$ und das entsprechende Integrale wird seyn:

$$z = e^{\lambda a (y \pm \lambda x)}.$$

Zusatz 2.

§. 413. Man kann auch

$$z = e^{\mu x} \cos. (\nu y + \alpha)$$

setzen, und daher wird

$$\nu^4 = \mu^2 a^2,$$

wie früher, so daß man als eine andere Form der particulären Integralien folgende Gleichung erhält:

$$z = e^{\pm \lambda^2 a x} \cos. (\lambda a y + \alpha).$$

Diese unzähligen Formeln sind, in Verbindung gebracht, als das vollständige Integrale anzusehen.

Zusatz 3.

§. 414. Dieselben Auflösungen werden auch gefunden, wenn man allgemeiner $z = XY$ setzt, daher wird

$$\frac{X d^4 Y}{d y^4} = \frac{a^2 Y d^2 X}{d x^2},$$

und stellt man diese Gleichung unter der Form

$$\frac{d^4 Y}{Y d y^4} = \frac{a^2 d^2 X}{X d x^2}$$

dar, so müssen beyde Glieder derselben constanten Größe gleich seyn.

Anmerkung.

§. 415. Allein die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = b \left(\frac{d z}{d x}\right),$$

auf welche wir die ganze Rechnung zurückgeführt haben, gehört zu jenen Gleichungen, deren allgemeine Auflösung durchaus unmöglich zu seyn scheint, so daß wir bey den particulären Auflösungen stehen bleiben müssen. Die vorgelegte Gleichung aber beruht nicht auf einer bloßen Speculation, denn wenn die sehr kleinen Schwingungen elastischer Scheiben im Allgemeinen bestimmt werden, so stößt man auf eine solche Gleichung des vierten Grades, um deren Auflösung es sich handelt. Hierin liegt auch die Ursache, daß diese Frage noch nicht allgemein aufgelöst werden konnte, wie das Problem von den schwingenden Saiten. Es ist leicht einzusehen, daß auf ähnliche Art die Gleichung des vierten Grades

$$\left(\frac{d^4 z}{d y^4}\right) = a^2 \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) + 2ab \left(\frac{d z}{d x}\right) + b^2 z$$

auf nachstehende doppelte Gleichung des zweyten Grades zurückgeführt werde:

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \pm a \left(\frac{d z}{d x}\right) \pm b z,$$

und es ist nicht schwer, andere Fälle in der Erfahrung nachzuweisen, bey welchen, eine solche Zurückleitung auf einen niedrigern Grad Statt findet.

Kapitel III.

Von der Integration der homogenen Gleichungen, bey welchen die einzelnen Glieder Differenzialformeln desselben Grades enthalten.

Aufgabe 69.

§. 416. Das Integrale der homogenen Gleichung des zweyten Grades

$$A\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) + B\left(\frac{d^2 z}{d x\, d y}\right) + C\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = o$$

zu suchen, oder die Natur der Function z zu bestimmen, wobey die Buchstaben A, B, C was immer für constante Größen bezeichnen.

Auflösung.

Ich nenne diese Gleichung homogen, weil sie aus den Differenzialformeln des zweyten Grades besteht, und außerdem keine andern veränderlichen Größen enthält. Für die Auflösung dieser Gleichung bemerke ich, daß derselben eine homogene Gleichung des ersten Grades von folgender Form Genüge leiste:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) + \alpha\left(\frac{dz}{dy}\right) = \Delta = \text{Const.};$$

denn differenzirt man diese Gleichung auf zweyfache Art, nämlich einmahl in Bezug auf x, und einmahl in Bezug auf y, so erhält man:

$$\text{I.}\ \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) + \alpha\left(\frac{d^2 z}{d x\, d y}\right) = o$$

$$\text{II.}\ \left(\frac{d^2 z}{d x\, d y}\right) + \alpha\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = o.$$

Multiplicirt man nun erstere durch A, letztere aber durch $\frac{C}{\alpha}$ und verbindet beyde Gleichungen, so wird die vorgelegte Gleichung zum Vorscheine kommen, wenn

$$A\alpha + \frac{C}{\alpha} = B \quad \text{oder}$$

$$A\alpha^2 - B\alpha + C = o$$

Gliedern der Ausdruck $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)$ erscheint; wird daher $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)$ gesetzt, so ergibt sich folgende Gleichung des ersten Grades:

$$o = (a + 3b)\, u + b \left(\frac{du}{dx}\right) + c \left(\frac{du}{dy}\right);$$

hieraus erhellt, daß, wenn

$$du = p\,dx + q\,dy$$

gesetzt wird,

$$(a + 3b)\, u + bp + cq = o$$

seyn müsse, welche Gleichung auf folgende Art aufgelöst wird.

Da man für $a + 3b = f$ erhält:

$$q = -\frac{bp}{c} - \frac{fu}{c}, \text{ so wird}$$

$$du = p\,dx - \frac{bp\,dy}{c} - \frac{fu\,dy}{c} \text{ oder:}$$

$$dx - \frac{b\,dy}{c} = \frac{1}{p}\left(du + \frac{fu\,dy}{c}\right) = \frac{u}{p}\left(\frac{du}{u} + \frac{f\,dy}{c}\right),$$

und so muß nothwendig $\frac{u}{p}$ eine Function von $x - \frac{by}{c}$ seyn, daher wird

$$lu + \frac{fy}{c} = f\,(cx - by) \text{ und}$$

$$u = e^{\frac{-fy}{c}}\, \Gamma''\left(x - \frac{by}{c}\right) = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right).$$

Weil nun y als constant angesehen werden muß, so gibt die Integration:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = e^{\frac{-fy}{c}}\, \Gamma'\left(x - \frac{by}{c}\right) + \Delta\,(y),$$

und die andere:

$$v = e^{\frac{-fy}{c}}\, \Gamma\left(x - \frac{by}{c}\right) + x\Delta\,(y) + \Sigma\,(y).$$

Wird daher $a + 3b = f$ gesetzt, so ist das vollständige grale der vorgelegten Gleichung:

$$z = e^{x - \frac{fy}{c}}\, \Gamma\left(x - \frac{by}{c}\right) + e^x x\,\Delta\,(y) + e^x\,\Sigma\,(y).$$

Aufgabe 68.

§. 405. Die Differenzialgleichung des dri

Grades

$$0 = Pz - 3P\left(\frac{dz}{dx}\right) + 3P\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - P\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)$$
$$+ Q\left(\frac{dz}{dy}\right) - 2Q\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + Q\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right),$$

wo P und Q was immer für Functionen von x und y seyn mögen, sey gegeben; die Natur der Function z zu bestimmen.

Auflösung.

Wenn sich aus der gegebenen Form leicht erkennen läßt, daß der Werth e^x statt z gesetzt Genüge leiste, so kömmt man durch die Substitution $z = e^x v$ auf folgende Gleichung:

$$-P\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) + Q\left(\frac{d^3v}{dx^2dy}\right) = 0,$$

welche ferner, wenn man $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) = u$ setzt, so daß $v = \int\int u\,dx^2$ ist, übergeht in folgende Form:

$$-P\left(\frac{du}{dx}\right) + Q\left(\frac{du}{dy}\right) = 0.$$

Man setze $du = p\,dx + q\,dy$, so wird $Qq = Pp$, also $q = \frac{Pp}{Q}$, und daher

$$du = p\left(dx + \frac{P}{Q}dy\right);$$

und hieraus ersieht man, daß die Größe p so beschaffen seyn muß, daß die Formel

$$dx + \frac{P}{Q}dy$$

durch sie multiplicirt integrabel werde. Man suche also einen Multiplicator M, welcher den Ausdruck

$Q\,dx + P\,dy$ integrabel macht, so daß

$$\int M(Q\,dx + P\,dy) = s$$

ist. Ich nehme also an, daß man die Function s von x und y bestimmen könne, so werden wir wegen

$$Q\,dx + P\,dy = \frac{ds}{M}$$

$du = \frac{p\,ds}{MQ}$ erhalten, woraus hervorgeht, daß $\frac{p}{MQ}$ eine Function der Größe s bezeichne. Wird also $\frac{p}{MQ} = \Gamma'(s)$ gesetzt, so erhält

man sogleich $u = \Gamma(s)$ und daher $v = \int dx \int dx \Gamma(s)$, wo bey jeder der beyden Integrationen die Größe y als constant angesehen wird. Es wird sich deßhalb unser Problem auf folgende Weise auflösen lassen:

Für die Differenzialformel $Q dx + P dy$ suche man einen sie integrabel machenden Multiplicator M, so daß

$$M(Q dx + P dy) = ds$$

wird; hat man diese Function von s von x und y gefunden, so wird man erhalten:

$$z = e^x \int dx \int dx \Gamma(s) + e^x x \Delta(y) + e^x \Sigma(y).$$

Anmerkung.

§. 406. Bey diesen Gleichungen findet die Bequemlichkeit Statt, daß sie durch die Substitution $z = e^x v$ eine solche Form annehmen, welche sich leicht auf eine einfache, im ersten Abschnitte betrachtete Form zurückführen läßt. Denn obgleich die Differenzialien des dritten Grades nicht getilgt wurden, so verschwanden dennoch die übrigen Glieder aus der Rechnung, so daß man dann die neue Substitution $\left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right) = u$ gebrauchen, und mit Hülfe derselben zu einer Differenzialgleichung des ersten Grades gelangen konnte. Es würde demnach eine einzige Substitution zu demselben Ziele geführt haben, wenn wir sogleich $z = e^x \int\int u\, dx^2$ gesetzt hätten. Es wäre zu wünschen, daß man Vorschriften besäße, mit Hülfe deren derley Substitutionen leicht erkannt werden könnten. Indessen wird man seinen Zweck erreichen können, wenn man das letzte Problem §. 209, welches viel allgemeiner ist, zu Hülfe nimmt.

Aufgabe 67.

§. 407. Sey gegeben die Differenzialgleichung des dritten Grades:

$$0 = (P+Q)z - (2P+3Q)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (P+3Q)\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) - Q\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)$$
$$- R\left(\frac{dz}{dy}\right) + 2R\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) - R\left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy}\right)$$

wo P, Q und R was immer für gegebene Functionen von x und y seyn mögen; die Natur der Function z zu bestimmen.

Auflösung.

Bedienen wir uns derselben Substitution $z = e^x v$, die wir bis-

her gebraucht haben, so wird die vorgelegte Gleichung in folgende transformirt:

$$o = P\left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) - Q\left(\frac{d^3 v}{d x^3}\right) - R\left(\frac{d^3 v}{d x^2 d y}\right),$$

wobey die Bequemlichkeit Statt findet, daß wenn $\left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) = u$ gesetzt wird, nachstehende Differenzialgleichung des ersten Grades zum Vorschein kömmt:

$$o = P u - Q\left(\frac{d u}{d x}\right) - R\left(\frac{d u}{d y}\right),$$

und es ist daher zu untersuchen, was für eine Function von x und y die Größe u ist. Setzen wir also, es sey

$$du = p dx + q dy,$$

so gibt jene Bedingungsgleichung die Relation

$$Pu = Qp + Rq,$$

und wir bilden daher nach dem oben, §. 209, angeführten Kunstgriffe nachstehende drey Gleichungen:

$$\begin{aligned} L du &= L p dx + L q dy \\ M P u dx &= M Q p dx + M R q dx \\ N P u dy &= N Q p dy + N R q dy, \end{aligned}$$

und diese werden, in eine Summe gebracht, folgende Gleichung geben:

$$\begin{aligned} L du + P u (M dx + N dy) = {} & p\left((L + MQ) dx + NQ dy\right) \\ & + q\left((L + NR) dy + MR dx\right). \end{aligned}$$

Da hier die drey Größen L, M und N willkürlich sind, so setze man zwischen denselben zuerst eine solche Relation fest, daß die beyden Theile des letzten Gliedes einen gemeinschaftlichen Factor erhalten. Sey nämlich

$$(L + MQ) : NQ = MR : (L + NR) \quad \text{oder}$$
$$L = - MQ - NR,$$

und wir werden erhalten:

$$- du (MQ + NR) + Pu (M dx + N dy) = (Mq - Np)(R dx - Q dy).$$

Nun suche man einen Multiplicator T, welcher den Ausdruck $R dx - Q dy$ integrabel macht, so daß

$$T (R dx - Q dy) = ds$$

wird; daher wird man sowohl die Function T als s als bekannt ansehen können, und wir erhalten:

$$- du\,(MQ + NR) + Pu\,(Mdx + Ndy) = (Mq - Np)\frac{ds}{T}$$

oder

$$\frac{du}{u} - \frac{P\,(Mdx + Ndy)}{MQ + NR} = \frac{Np - Mq}{u\,(MQ + NR)} \cdot \frac{ds}{T}.$$

Da nun P, Q und R gegebene Functionen von x und y sind, so ist wohl zu merken, daß man zwischen den beyden noch unbestimmten Größen M und N immer eine solche Relation festsetzen könne, daß der Ausdruck $\frac{P\,(Mdx + Ndy)}{MQ + NR}$ die Integration gestattet. Sey also das Integrale desselben $= l\omega$, so daß

$$Mdx + Ndy = \frac{MQ + NR}{P} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \text{ und}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{d\omega}{\omega} + \frac{Np - Mq}{Tu\,(MQ + NR)} \cdot ds$$

wird. Es müssen also die Größen p und q nothwendig so beschaffen seyn, daß man erhält:

$$\frac{Np - Mq}{Tu\,(MQ + NR)} = f'(s), \text{ und daher}$$

$$lu = l\omega + f(s).$$

Schreiben wir also $l\Gamma(s)$ statt $f(s)$, so daß man

$$u = \omega\Gamma(s)$$

erhält, und überdieß

$$v = \int dx \int \omega\, dx\, \Gamma(s) + x\Delta(y) + \Sigma(y);$$

folglich ist:

$$z = e^x \int dx \int \omega\, dx\, \Gamma(s) + e^x x \Delta(y) + e^x \Sigma(y).$$

Zusatz 1.

§. 408. Um also diese Auflösung aus der vorgelegten Form so gleich zu erhalten, suche man erstlich eine solche Function von x und y, die s heißen mag, daß

$$ds = T\,(Rdx - Qdy)$$

wird, und diesen Zweck wird man erreichen, indem man einen Multiplicator T sucht, durch welchen der Differenzialausdruck $Rdx - Qdy$ integrabel wird.

Zusatz 2.

§. 409. Überdieß muß man aber auch die Größe ω suchen. Zu diesem Ende ist es zweckmäßig, zwischen den Größen M und N eine solche Relation aufzusuchen, daß

$$\int \frac{P\,(M\,dx + N\,dy)}{MQ + NR} = l\,\omega,$$

welche Bestimmung immer als ausführbar betrachtet werden kann.

Anmerkung.

§. 410. Da die ganze Rechnung sogleich dahin geführt wird, daß die Function u aus der Gleichung

$$P\,u = Q\left(\frac{du}{dx}\right) + R\left(\frac{du}{dy}\right)$$

bestimmt werden muß, so wird man die Auflösung, ohne jene Umschweife, deren wir uns bey der obigen Auflösung bedient haben, weit leichter auf folgende Art ausführen können, wodurch man einen schönen Zusatz zum ersten Abschnitte erhält. Man setze

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = L\,M\,u \quad \text{und} \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = L\,N\,u,$$

so wird erstlich

$$P = L\,(MQ + NR), \quad \text{und daher}$$

$$L = \frac{P}{MQ + NR};$$

ferner werden wir, weil

$$du = dx\left(\frac{du}{dx}\right) + dy\left(\frac{du}{dy}\right)$$

ist, erhalten:

$$\frac{du}{u} = L\,(M\,dx + N\,dy) = \frac{P\,(M\,dx + N\,dy)}{MQ + NR},$$

wo die Größen M und N so genommen werden müssen, daß die Integration gelingt, und da dieß auf unzählige Arten geschehen kann, so ist die hieraus sich ergebende Auflösung als vollständig anzusehen. Kennt man aber ein particuläres Integrale, so wird sich daraus die vollständige Auflösung weit bequemer auf folgende Art bestimmen lassen. Man setze nämlich

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{P\,(M\,dx + N\,dy)}{MQ + NR},$$

so daß der Werth von ω, welcher für u genommen wird, nun als particuläres Integrale erscheint, und es sey

$$P\,\omega = Q\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + R.\left(\frac{d\omega}{dy}\right).$$

Nun setzen wir für den vollständigen Werth $u = \omega\,\Gamma\,(s)$ und wir erhalten nach gehöriger Substitution:

$$P\omega\Gamma(s) = Q\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\Gamma(s) + R\left(\frac{d\omega}{dy}\right)\Gamma(s)$$
$$+ Q\omega\left(\frac{ds}{dx}\right)\Gamma'(s) + R\omega\left(\frac{ds}{dy}\right)\Gamma'(s).$$

welche Gleichung sich sogleich in folgende zusammenziehen läßt:

$$Q\left(\frac{ds}{dx}\right) + R\left(\frac{ds}{dy}\right) = o,$$

hieraus folgern wir:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right) = TR \quad \text{und} \quad \left(\frac{ds}{dy}\right) = -TQ,$$

und ferner

$$ds = T(Rdx - Qdy);$$

hieraus erhellt, daß die Größe s aus dem Ausdrucke $Rdx - Qdy$ gefunden werde; für diese Formel aber muß zuerst der Factor T, welcher dieselbe integrabel macht, gesucht, dann aber das Integrale derselben für s genommen werden. Man sey also hier vorzüglich darauf aufmerksam, wie schön sich dieselbe Auflösung darstellen lasse, zu welcher wir durch so viele Umstände gelangt sind.

Aufgabe 68.

§. 411. Wenn die Differenzialgleichung des vierten Grades

$$\left(\frac{d^4 z}{dy^4}\right) = a^2\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$$

gegeben ist, die Auffindung der Function z bloß auf die Auflösung einer einfachen Gleichung zurückzuführen.

Auflösung.

Betrachtet man diese Gleichung mit einiger Aufmerksamkeit, so wird man bald einsehen, daß ihr die einfachere Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = b\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

Genüge leiste; denn man erhält hieraus durch Differenziation in Bezug auf y

$$\left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right) = b\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right),$$

und durch nochmahliges Differenziren in derselben Beziehung:

$$\left(\frac{d^4 z}{dy^4}\right) = b\left(\frac{d^3 z}{dx\,dy^2}\right).$$

Differenzirt man aber die angenommene Gleichung nach x, so findet man

$$\left(\frac{d^3 z}{dx\,dy^2}\right) = b\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right),$$

und führt man diesen Werth in der letzten Gleichung ein, so ergibt sich:

$$\left(\frac{d^4 z}{dy^4}\right) = b^2\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right),$$

welcher Ausdruck mit der vorgelegten Gleichung übereinstimmt, wenn $b^2 = a^2$ ist, und dieß kann auf doppelte Art geschehen, wenn

$$b = + a \quad \text{und} \quad b = - a$$

ist. Wenn wir diese beyden einfacheren Gleichungen

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) - a\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0, \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) + a\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

deren erstere $z = P$ und letztere $z = Q$ geben mag, aufgelöst haben, so werden wir für die vorgelegte Gleichung erhalten:

$$z = P + Q,$$

und weil sowohl P als Q zwey willkürliche Functionen enthält, so wird das auf diese Art gefundene Integrale vier solche Functionen enthalten, und wird also vollständig seyn.

Zusatz 1.

§. 412. Es werden leicht unzählige particuläre Auflösungen erhalten, wenn man

$$z = e^{\mu x + \nu y}$$

setzt, denn nach gehöriger Substitution muß nothwendig

$$\nu^4 = \mu^2 a^2 \quad \text{und} \quad \mu = \pm \frac{\nu^2}{a}$$

werden. Sey $\nu = \lambda a$, so wird $\mu = \pm \lambda^2 a$ und das entsprechende Integrale wird seyn:

$$z = e^{\lambda a (y \pm \lambda x)}.$$

Zusatz 2.

§. 413. Man kann auch

$$z = e^{\mu x} \cos. (\nu y + \alpha)$$

setzen, und daher wird

$$\nu^4 = \mu^2 a^2,$$

wie früher, so daß man als eine andere Form der particulären Integralien folgende Gleichung erhält:

$$z = e^{\pm \lambda^2 a x} \cos. (\lambda a y + \alpha).$$

Diese unzähligen Formeln sind, in Verbindung gebracht, als das vollständige Integrale anzusehen.

Zusatz 3.

§. 414. Dieselben Auflösungen werden auch gefunden, wenn man allgemeiner $z = XY$ setzt, daher wird

$$\frac{X d^4 Y}{d y^4} = \frac{a^2 Y d^2 X}{d x^2},$$

und stellt man diese Gleichung unter der Form

$$\frac{d^4 Y}{Y d y^4} = \frac{a^2 d^2 X}{X d x^2}$$

dar, so müssen beyde Glieder derselben constanten Größe gleich seyn.

Anmerkung.

§. 415. Allein die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = b \left(\frac{d z}{d x}\right),$$

auf welche wir die ganze Rechnung zurückgeführt haben, gehört zu jenen Gleichungen, deren allgemeine Auflösung durchaus unmöglich zu seyn scheint, so daß wir bey den particulären Auflösungen stehen bleiben müssen. Die vorgelegte Gleichung aber beruht nicht auf einer bloßen Speculation, denn wenn die sehr kleinen Schwingungen elastischer Scheiben im Allgemeinen bestimmt werden, so stößt man auf eine solche Gleichung des vierten Grades, um deren Auflösung es sich handelt. Hierin liegt auch die Ursache, daß diese Frage noch nicht allgemein aufgelöst werden konnte, wie das Problem von den schwingenden Saiten. Es ist leicht einzusehen, daß auf ähnliche Art die Gleichung des vierten Grades

$$\left(\frac{d^4 z}{d y^4}\right) = a^2 \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) + 2ab \left(\frac{d z}{d x}\right) + b^2 z$$

auf nachstehende doppelte Gleichung des zweyten Grades zurückgeführt werde:

$$\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = \pm a \left(\frac{d z}{d x}\right) \pm b z,$$

und es ist nicht schwer, andere Fälle in der Erfahrung nachzuweisen, bey welchen eine solche Zurückleitung auf einen niedrigern Grad Statt findet.

Kapitel III.

Von der Integration der homogenen Gleichungen, bey welchen die einzelnen Glieder Differenzialformeln desselben Grades enthalten.

Aufgabe 69.

§. 416. Das Integrale der homogenen Gleichung des zweyten Grades

$$A\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + B\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) + C\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = o$$

zu suchen, oder die Natur der Function z zu bestimmen, wobey die Buchstaben A, B, C was immer für constante Größen bezeichnen.

Auflösung.

Ich nenne diese Gleichung homogen, weil sie aus den Differenzialformeln des zweyten Grades besteht, und außerdem keine andern veränderlichen Größen enthält. Für die Auflösung dieser Gleichung bemerke ich, daß derselben eine homogene Gleichung des ersten Grades von folgender Form Genüge leiste:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) + \alpha\left(\frac{dz}{dy}\right) = \Delta = \text{Const.};$$

denn differenzirt man diese Gleichung auf zweyfache Art, nämlich einmahl in Bezug auf x, und einmahl in Bezug auf y, so erhält man:

$$\text{I.}\ \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + \alpha\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = o$$

$$\text{II.}\ \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) + \alpha\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = o.$$

Multiplicirt man nun erstere durch A, letztere aber durch $\frac{C}{\alpha}$ und verbindet beyde Gleichungen, so wird die vorgelegte Gleichung zum Vorscheine kommen, wenn

$$A\alpha + \frac{C}{\alpha} = B \quad \text{oder}$$

$$A\alpha^2 - B\alpha + C = o$$

ist, woraus ein zweyfacher Werth für α erhalten wird, deren jeder mittelst der angenommenen Gleichung einen Theil der gesuchten Function z geben wird. Da also

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \Delta - \alpha \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

ist, so wird man finden:

$$dz = \Delta dx + (dy - \alpha dx) \left(\frac{dz}{dy}\right),$$

und es ist einleuchtend, daß $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ eine Function von $y - \alpha x$ seyn müsse; wird diese $= \Gamma (y - \alpha x)$ gesetzt, so wird man erhalten:

$$z = fx + \Gamma (y - \alpha x),$$

wobey f eine beliebige Constante bezeichnet. Man muß daher bey der Auflösung der vorgelegten Gleichung auf folgende Art vorgehen. Man bilde zuerst die algebraische Gleichung

$$Au^2 + Bu + C = 0,$$

deren einfache Factoren

$$u + \alpha \quad \text{und} \quad u + \beta$$

seyn mögen, so daß

$$Au^2 + Bu + C = A (u + \alpha) (u + \beta),$$

dann wird das gesuchte Integrale seyn:

$$z = fx + \Gamma (y - \alpha x) + \Delta (y - \beta x).$$

Da man sich hier vorstellen muß, daß der erste Theil fx in den beyden unbestimmten Functionen enthalten sey, so wird sich dieser Ausdruck, wegen

$$fx = \frac{f (y - \alpha x) - f (y - \beta x)}{\beta - \alpha}$$

besser auf folgende Art darstellen lassen:

$$z = \Gamma (y - \alpha x) + \Delta (y - \beta x),$$

welche Gleichung wegen der beyden willkürlichen Functionen als das vollständige Integrale betrachtet werden kann, mit Ausnahme des einzigen Falles, in welchem $\beta = \alpha$ ist. Für diesen Fall setzen wir $\beta = \alpha + dx$. Da nun

$$\Delta [y - (\alpha + d\alpha) x] = \Delta (y - \alpha x) - x d\alpha \Delta' (y - \alpha x)$$

ist, und weil der erstere Theil schon in dem ersteren Gliede enthalten ist, und statt des letztern $x \Delta (y - \alpha x)$ geschrieben werden kann, so

wird für den Fall $\beta = \alpha$ oder $B^2 = 4AC$ das Integrale seyn:

$$z = \Gamma(y - \alpha x) + x\Delta(y - \alpha x).$$

Zusatz 1.

§. 417. Es ist einleuchtend, daß für den Fall, wo $\beta = \alpha$ ist, das Integrale auch auf folgende Art ausgedrückt werden könne:

$$z = \Gamma(y - \alpha x) + y\Delta(y - \alpha x),$$

welche Form aber von der obigen nicht verschieden ist.

Zusatz 2.

§. 418. Wenn $C = 0$ ist, so daß man die Gleichung

$$A\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + B\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = 0,$$

und daher

$$Au^2 + Bu = Au\left(u + \frac{B}{A}\right)$$

hat, so wird

$$\alpha = 0 \text{ und } \beta = \frac{B}{A},$$

und das Integrale ist:

$$z = \Gamma(y) + \Delta\left(y - \frac{B}{A}x\right) = \Gamma(y) + \Delta(Ay - Bx).$$

Auf ähnliche Art findet man für die Gleichung

$$B\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) + C\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = 0$$

das Integrale

$$z = \Gamma(x) + \Delta(Cx - By).$$

Zusatz 3.

§. 419. Ferner entspricht der Gleichung

$$a^2\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + 2ab\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) + b^2\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = 0$$

wegen

$$a^2u^2 + 2abu + b^2 = a^2\left(u + \frac{b}{a}\right)^2$$

das Integrale

$$z = \Gamma(ay - bx) + x\Delta(ay - bx).$$

Anmerkung.

§. 420. Die Form dieser Integralien biethet keine Schwierigkeiten dar, so lange die Gleichung

$$Au^2 + Bu + C = 0$$

zwey reelle Wurzeln hat, diese mögen ungleich oder gleich seyn. Werden aber diese Wurzeln imaginär, so daß

$$\alpha = \mu + \nu\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \beta = \mu - \nu\sqrt{-1}$$

wird, dann finden die willkürlichen Functionen beynahe gar keine Anwendung. Denn obgleich die Natur der Functionen Γ und Δ durch beliebig verzeichnete Curven dargestellt wird, so daß $\Gamma(v)$ und $\Delta(v)$ die der Abscisse v entsprechenden Ordinaten bezeichnen, so leuchtet dennoch durchaus nicht ein, wie die Werthe

$$\Gamma(p + q\sqrt{-1}) \quad \text{und} \quad \Delta(p - q\sqrt{-1})$$

dargestellt werden müssen, obgleich die imaginären Theile sich gegenseitig tilgen. Hierin liegt der ungeheure Unterschied zwischen den stätigen und den discontinuirlichen Functionen, indem bey den ersteren die unter der Form

$$\Gamma(p + q\sqrt{-1}) + \Gamma(p - q\sqrt{-1}) \quad \text{und}$$
$$\frac{\Delta(p + q\sqrt{-1}) - \Delta(p - q\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$$

dargestellten Werthe sich immer wirklich ausdrücken lassen, was aber keineswegs der Fall ist, wenn Γ und Δ discontinuirliche Functionen bezeichnen. Man wird also in diesen Fällen die hier gefundene allgemeine Auflösung bloß auf stätige Functionen beschränken müssen, in wiefern nämlich die discontinuirlichen keine Anwendung und Ausführung gestatten.

Aufgabe 70.

§. 421. Sey gegeben die homogene Gleichung des dritten Grades:

$$A\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + B\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right) + C\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right) + D\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) = 0;$$

man suche das vollständige Integrale derselben.

Auflösung.

Daß auch dieser Gleichung, eben so wie im vorhergehenden Probleme, eine einfache Differenzialgleichung des ersten Grades Genüge leiste, fällt deutlich genug in die Augen, daher wird ein particuläres Integrale folgende Form haben:

$$z = \Gamma(y + nx);$$

an entwickle hieraus die einzelnen Differenzialformeln des dritten rades, welche nachstehende Ausdrücke darstellen werden:

$$\left(\frac{d^3 z}{d x^3}\right) = + n^3 \Gamma''' (y + n x); \quad \left(\frac{d^3 z}{d x^2 d y}\right) = n^2 \Gamma''' (y + n x)$$

$$\left(\frac{d^3 z}{d x d y^2}\right) = + n \Gamma''' (y + n x); \quad \left(\frac{d^3 z}{d y^3}\right) = \Gamma''' (y + n x).$$

Werden diese Ausdrücke substituirt, so wird, weil man durch

$$\Gamma''' (x + n x)$$

vidiren kann, nachstehende Gleichung zum Vorscheine kommen:

$$A n^3 + B n^2 + C n + D = 0.$$

Sind die drey Wurzeln derselben

$$n = \alpha, \quad n = \beta \quad \text{und} \quad n = \gamma,$$

ist einleuchtend, daß der vorgelegten Gleichung der Ausdruck

$$z = \Gamma (y + \alpha x) + \Delta (y + \beta x) + \Sigma (y + \gamma x)$$

enüge leistet; da derselbe drey willkürliche Functionen enthält, so ellt er ohne Zweifel das vollständige Integrale dar; nur ist zu bemern, daß wenn zwey Wurzeln gleich sind, z. B. $\gamma = \beta$, das Integrale yn werde:

$$z = \Gamma (y + \alpha x) + \Delta (y + \beta x) + x \Sigma (y + \beta x);$$

id aber alle drey Wurzeln einander gleich, nämlich $\gamma = \beta = \alpha$, wird das gesuchte Integrale seyn:

$$z = \Gamma (y + \alpha x) + x \Delta (y + \alpha x) + x^2 \Sigma (y + \alpha x).$$

Wenn zwey Wurzeln imaginär sind, so gelten die oben gemachn Bemerkungen.

Zusatz 1.

§. 422. Der letzte Fall, in welchem die drey Wurzeln einander eich sind, wird auch dadurch aufgeklärt, daß, wenn statt der Verderlichen x und y die beyden neuen

$$t = x \quad \text{und} \quad u = y + \alpha x$$

ıgeführt werden, die vorgelegte Gleichung in die Form $\left(\frac{d^3 z}{d t}\right) = 0$ sammengezogen wird, deren Integrale offenbar

$$z = \Gamma (u) + x \Delta (u) + x^2 \Sigma (u)$$

Zusatz 2.

§. 423. Es erhellt hieraus also auch, wie bey den homogenen Gleichungen eines höhern Grades, wenn die hieraus abgeleiteten algebraischen Gleichungen mehrere gleiche Wurzeln haben, die Integralien beschaffen seyn werden, so daß dann auch weder der Fall, in welchem gleiche Wurzeln vorkommen, noch die Integration irgend eine Schwierigkeit darbiethet.

Anmerkung.

§. 424. Die Fälle aber, in welchen zwey imaginäre Wurzeln erscheinen, und in welchen die willkürlichen Functionen keinen Nutzen zu haben scheinen, verdienen rücksichtlich der stätigen Functionen, welche Genüge leisten, eine ausführlichere Entwickelung. Die Ausdrücke, welche in diesen Fällen in den Integralien erscheinen, lassen sich aber immer auf folgende Form zurückführen:

$$\Gamma\,[v\,(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\,\sin.\varphi)] + \Delta\,[v\,(\cos.\varphi - \sqrt{-1}\,\sin.\varphi)].$$

Hieraus ergeben sich nun, wenn die Functionen Potenzen sind, Werthe von der Form

$$A\,v^n \cos.n\varphi + B\,v^n \sin.n\varphi \quad \text{oder} \quad A\,v^n \cos.(n\varphi + \alpha);$$

so viel solche Werthe durch irgend eine Vertauschung der Constanten A, n und α angenommen werden können. Wenn aber die Functionen Logarithmen bezeichnen, so ergeben sich ferner Werthe von der Form

$$A\,l\,v + B\varphi.$$

Sind drittens die Functionen Exponentialgrößen, so findet man Werthe von der Form

$$e^{v\cos.\varphi}[A\cos.(v\sin.\varphi) + B\sin.(v\sin.\varphi)] = A e^{v\sin.\varphi}\cos.(v\sin.\varphi + \alpha),$$

und allgemeiner

$$A\,e^{v^n \cos.n\varphi}\cos.(v^n \sin.n\varphi + \alpha).$$

Es lassen sich aber noch sehr viele andere solche Ausdrücke aus der Lehre der imaginären Größen ableiten, welche auf irgend eine Weise mit den angegebenen verbunden, für den aus den beyden imaginären Wurzeln entstehenden Theil des Integrals genommen werden können. Hieraus ergibt sich also eine unzählige Menge von Functionen, durch welche die vollständige Auflösung hervorzugehen scheint, und dennoch kann diese nicht eben so für vollständig gehalten werden, wie dieß in jenen Fällen geschieht, in welchen alle Wurzeln reell sind. Es

ist aber hier zu bemerken, daß man weder in der Mechanik noch in der Physik auf eine Aufgabe gestoßen sey, welche von einem solchen Falle abhängig wäre.

Aufgabe 71.

§. 425. Sey gegeben eine homogene Gleichung eines beliebigen Grades:

$$A\left(\frac{d^\lambda z}{dx^\lambda}\right)+B\left(\frac{d^\lambda z}{dx^{\lambda-1}dy}\right)+C\left(\frac{d^\lambda z}{dx^{\lambda-2}dy^2}\right)+\ldots=0;$$

das vollständige Integrale derselben zu finden.

Auflösung.

Man bilde hieraus die algebraische Gleichung vom Grade λ:

$$An^\lambda+Bn^{\lambda-1}+Cn^{\lambda-2}+\ldots=0,$$

deren λ Wurzeln folgende seyen:

$$n=\alpha,\quad n=\beta,\quad n=\gamma,\quad n=\delta,\ \ldots$$

sind diese sämmtlich ungleich, so wird das vollständige Integrale der vorgelegten Gleichung seyn:

$$z=\Gamma(y+\alpha x)+\Delta(y+\beta x)+\Sigma(y+\gamma x)+\Theta(y+\delta x)+\ldots$$

wobey die Anzahl der verschiedenen Functionen gleich λ seyn wird. Sollte es sich aber ereignen, daß unter diesen Wurzeln zwey oder mehrere gleiche erscheinen, z. B. $\beta=\alpha$ und $\gamma=\alpha$, dann müssen die Functionen, welche diese gleichen Wurzeln enthalten, respective durch die Glieder der geometrischen Progression $1, x, x^2, \ldots$ oder $1, y, y^2, \ldots$ multiplicirt werden, so daß die Anzahl der willkürlichen Functionen nicht vermindert wird. Rücksichtlich der imaginären Wurzeln aber sind immer die früher gemachten Bemerkungen zu beachten, wenn wir nicht etwa die willkürlichen Functionen der imaginären Ausdrücke ausschließen wollen.

Zusatz 1.

§. 426. In dem Falle, in welchem gleiche Wurzeln vorkommen, ist es gleichgültig, welcher geometrischer Reihe wir uns bedienen wollen, wenn die Functionen weder x noch y allein enthalten; wenn aber diese Functionen entweder bloß x oder bloß y enthalten, dann müssen wir jene geometrische Progression nehmen, welche nach den Potenzen der andern verschiedenen Veränderlichen fortschreitet.

Zusatz 2.

§. 427. Wenn in der algebraischen Gleichung die Anfangsglieder A, B, C, ... verschwinden, so daß die Anzahl der Wurzeln kleiner zu seyn scheint, als der Exponent λ, dann sind die fehlenden Wurzeln für unendlich groß zu halten, und diesen werden bloß Functionen von x entsprechen, die in das Integrale eingeführt werden müssen.

Zusatz 3.

§. 428. So muß man, wenn $A = 0$, $B = 0$ und $C = 0$ ist, die drey Wurzeln α, β, γ ohne Ende fortwachsen denken, und aus diesen wird folgender Theil des Integrals entstehen:

$$\Gamma(x) + y\Delta(x) + y^2 + \Sigma(x).$$

Anmerkung.

§. 429. Weil man kaum erst angefangen hat, diesen Theil der Integralrechnung auszubilden, und daher gar keine Untersuchungen dieser Art vorhanden sind, so läßt sich über diesen Abschnitt nichts weiteres sagen, und ich schließe daher hiermit den ersten Theil des zweyten Buches, welches sich mit der Aufsuchung der Functionen zweyer Veränderlichen aus irgend einer gegebenen Relation der Differenzialien beschäftigt. Weit weniger aber noch können wir rücksichtlich des zweyten Theils dieses Buches vortragen, wo die Integralrechnung auf Functionen dreyer Veränderlichen angewendet wird, und es wird sich deßhalb nicht einmahl der Mühe lohnen, diesen Theil in Abschnitte abzutheilen, noch viel weniger die folgenden Theile zu berühren.

Zweytes Buch

der

Integralrechnung.

Zweyter Theil.

Zweyter Theil,

Functionen von drey veränderlichen Größen aus einer gegebenen Relation der Differenzialien zu bestimmen.

Kapitel I.

Von den Differenzialformeln der Functionen, welche drey veränderliche Größen enthalten.

Aufgabe 72.

§. 430. Wenn v irgend eine Function der drey Veränderlichen x, y und z bezeichnet, die Differenzialformeln des ersten Grades derselben darzustellen.

Auflösung.

Da v eine Function der drey veränderlichen Größen x, y und z ist, so wird, wenn man dieselbe auf gewöhnliche Art differenzirt, ihr Differenziale im Allgemeinen durch folgenden Ausdruck dargestellt werden:

$$dv = pdx + qdy + rdz;$$

dieses Differenziale wird nämlich aus drey Theilen bestehen, deren erster pdx für sich gefunden wird, wenn man bey der Differenziation bloß die Größe x als veränderlich behandelt, die beyden übrigen y und z aber als constant ansieht. Auf ähnliche Art wird der zweyte Theil qdy erhalten, wenn man die Function v so differenziirt, daß man bloß die Größe y als variabel, die beyden andern Größen x und z aber als unveränderlich betrachtet. Dasselbe gilt von dem dritten Theile rdz, welcher das Differenziale der Function v, bloß in Bezug auf die Veränderliche z genommen, bezeichnet.

Hieraus erhellt nun, wie man die Größen p, q und r einzeln durch Differenziation finden könne, und die ich hier die Differenzial-

formeln des ersten Grades der Function v nennen werde, und damit man keine neuen Buchstaben in die Rechnung einführen muß, will ich jene Größen ihrer Natur gemäß auf folgende Art anzeigen:

$$p = \left(\frac{dv}{dx}\right); \quad q = \left(\frac{dv}{dy}\right); \quad r = \left(\frac{dv}{dz}\right).$$

Es hat demnach jede Function v dreyer Veränderlichen x, y und z drey Differenzialformeln des ersten Grades, die auf folgende Art bezeichnet werden:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right); \quad \left(\frac{dv}{dy}\right); \quad \left(\frac{dv}{dz}\right).$$

Bey jedem dieser Ausdrücke wird nur eine einzige Größe als veränderlich angesehen, während die beyden andern als constant betrachtet werden, und weil die Differenzialien durch die Division wegfallen, so hat man diese Differenzialformeln in die Classe der endlichen Größen zu setzen.

Zusatz 1.

§. 431. Aus den drey gefundenen Differenzialformeln der Function v wird das auf gewöhnliche Art genommene Differenziale derselben so gebildet, daß

$$dv = dx\left(\frac{dv}{dx}\right) + dy\left(\frac{dv}{dy}\right) + dz\left(\frac{dv}{dz}\right)$$

wird; umgekehrt ist das Integrale dieses Ausdruckes jene Function v selbst, oder auch diese Function um irgend eine Größe vermehrt oder vermindert.

Zusatz 2.

§. 432. Wenn eine Function v der drey Veränderlichen x, y und z gegeben ist, so sind die einzelnen Differenzialformeln derselben

$$\left(\frac{dv}{dx}\right); \quad \left(\frac{dv}{dy}\right); \quad \left(\frac{dv}{dz}\right)$$

auch wieder gewisse Functionen derselben Veränderlichen x, y und z, welche durch Differenziation leicht gefunden werden können. Indessen kann es sich wohl ereignen, daß eine oder mehrere dieser Veränderlichen aus diesen Differenzialformeln ganz wegfallen.

Anmerkung 1.

§. 433. Die Größe v läßt sich ohne Bedenken als Function der drey Veränderlichen x, y und z betrachten, wenn es sich gleich er-

;nen sollte, daß sie bloß zwey Variable enthält, wenn sie nur so zu= nmengesetzt ist, daß die dritte Veränderliche gleichsam zufällig weg= fallen ist, und dieß darf uns um so weniger wundern, da sich der= be Umstand sowohl bey Functionen einer einzigen Veränderlichen, 3 auch bey jenen zweyer Variablen ereignen kann. Denn weil man : Functionen einer Veränderlichen sehr bequem durch die Ordinaten jend einer krummen Linie darzustellen pflegt, wenn nämlich der atur der Curve gemäß ihre Ordinaten als bestimmte Functionen der scisse x betrachtet werden können, so wird der Fall, in welchem die irve in eine gerade, mit der Axe parallele Linie übergeht, ob= ich dann die Ordinate ein[illegible] unveränderlichen Größe gleich wird, nnoch von der allgemeinen Vorstellung, nach welcher die Ordinate 3 Function der Abscisse x betrachtet wird, keineswegs ausgeschlossen, in wenn gefragt wird, was für eine Function y von x sey, wird ir nicht unpassend antworten können, daß diese Function y einer istanten Größe gleich sey.

Was ferner die Functionen zweyer Veränderlichen x und y be= ifft, welche man immer durch die Entfernungen, um welche die ein= nen Puncte irgend einer Fläche von einer beliebigen Ebene abstehen, :stellen kann, wenn nur die beyden Veränderlichen x und y in dieser ene genommen werden, so ist einleuchtend, daß jene Fläche auch beschaffen seyn könne, daß jene Function bloß durch x oder bloß :ch y bestimmt wird. Ja selbst dann, wenn die Fläche eine Ebene n sollte, die mit jener Ebene parallel läuft, geht jene Function ar in eine constante Größe über, und man wird sie demungeachtet eine Function zweyer Veränderlichen betrachten müssen. Wenn : uns daher auch mit den Functionen dreyer Veränderlichen beschäf= en, so werden hierbey dennoch auch solche Functionen vorkommen, lche entweder bloß durch zwey oder nur durch eine der drey Ver= derlichen x, y, z bestimmt werden, oder die sogar constante Größen eichnen.

Anmerkung 2.

§. 434. Es ist schon in der Differenzialrechnung gezeigt worden, 3 die Differenzialien der Functionen, welche mehrere Veränderliche halten, gefunden werden, wenn jede der Veränderlichen für sich :in als variable angesehen wird, und alle auf diese Art erhaltenen fferenzialien in eine Summe gebracht werden. Wenn also die Diffe=

renziation auf diese Weise ausgeführt wird, so werden alle jene Operationen nach Aufhebung des Differenzials die Differenzialformeln geben, welche wir durch die Symbole

$$\left(\frac{dv}{dx}\right), \left(\frac{dv}{dy}\right) \text{ und } \left(\frac{dv}{dz}\right)$$

andeuten, und man sieht zugleich ein, wie die Differenzialausdrücke der Functionen von vier oder mehreren veränderlichen Größen gefunden werden können. Rücksichtlich der Functionen dreyer Veränderlichen x, y und z aber wollen wir einige Beyspiele beyfügen, in welchen wir die drey Differenzialformeln jener Ausdrücke darstellen werden.

Beyspiel 1.

§. 435. Sey die Function dreyer Veränderlichen

$$v = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

gegeben, so werden sich die Differenzialformeln derselben auf folgende Art darstellen.

Da man durch Differenziation

$$dv = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$

erhält, so ist offenbar

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = \alpha; \quad \left(\frac{dv}{dy}\right) = \beta; \quad \left(\frac{dv}{dz}\right) = \gamma;$$

und so bezeichnen alle drey Differenzialausdrücke constante Größen.

Beyspiel 2.

§. 436. Die Function dreyer Veränderlichen sey

$$v = x^\lambda y^\mu z^\nu,$$

so stellen sich die Differenzialformeln derselben auf folgende Art dar.

Differenzirt man auf gewöhnliche Art, so wird:

$$dv = \lambda x^{\lambda-1} y^\mu z^\nu dx + \mu x^\lambda y^{\mu-1} z^\nu dy + \nu x^\lambda y^\mu z^{\nu-1} dz,$$

woraus erhellt, daß die Differenzialformeln folgende seyn werden:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = \lambda x^{\lambda-1} y^\mu z^\nu; \quad \left(\frac{dv}{dy}\right) = \mu x^\lambda y^{\mu-1} z^\nu; \quad \left(\frac{dv}{dz}\right) = \nu x^\lambda y^\mu z^{\nu-1}.$$

Alle diese Ausdrücke sind also neue Functionen der drey Veränderlichen x, y, z, wenn die Exponenten λ, μ, ν entweder von der Nulle oder von der Einheit verschieden sind.

Beyspiel 3.

§. 437. Wenn die Function v bloß die zwey Veränderlichen x und y enthält, die dritte Variable z aber zu ihrer Bildung nichts beyträgt, so werden sich die Differenzialformeln auf folgende Art darstellen.

Weil die Function v nur die zwey Veränderlichen x und y enthält, so wird ihr Differenziale die Form erhalten:

$$dv = pdx + qdy + o.dz;$$

indem nämlich der dritte Theil, der aus der Veränderlichkeit von z entsteht, verschwindet; wir werden demnach erhalten:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = p; \quad \left(\frac{dv}{dy}\right) = q \quad \text{und} \quad \left(\frac{dv}{dz}\right) = o.$$

Zusatz.

§. 438. Es erhellt hieraus also umgekehrt, daß, wenn $\left(\frac{dv}{dz}\right) = o$ ist, die Größe v irgend eine Function der zwey Veränderlichen x und y seyn werde, welche wir in der Folge durch die Gleichung $v = \Gamma(x, y)$ andeuten werden, wobey $\Gamma(x, y)$ irgend eine Function der beyden Veränderlichen x und y bezeichnet.

Anmerkung.

§. 439. Wir werden bald zeigen, daß, wenn eine Function dreyer Veränderlichen aus irgend einer zwischen den Differenzialformeln gegebenen Relation oder festgesetzten Bedingung aufzusuchen ist, durch jede Integration irgend eine willkürliche Function zweyer Veränderlichen eingeführt werde, und daß gerade hierin das Kennzeichen liege, durch welches sich dieser Theil der Integralrechnung von dem vorhergehenden unterscheidet. Denn so wie bey der Aufsuchung der Natur der Functionen einer einzigen Veränderlichen aus einer zwischen den Differenzialien festgesetzten Bedingung, mit welchem Gegenstande sich das ganze erste Buch beschäftiget hat, durch jede Integration eine willkürliche constante Größe in die Rechnung eingeführt wird; eben so haben wir in dem vorhergehenden Theile dieses zweyten Buches gesehen, daß, wenn Functionen zweyer Veränderlichen aus einer zwischen den Differenzialformeln gegebenen Relation zu suchen sind, es zur Wesenheit dieser Abhandlung gehöre, daß durch jede Integration nicht sowohl eine constante Größe, als vielmehr eine ganz willkürliche Function einer

einzigen Veränderlichen in die Rechnung eingeführt werde; denn obgleich in den meisten Fällen diese Functionen, wie z. B. $\Gamma(\alpha x + \beta y)$ die beyden Veränderlichen x und y enthielten, so wurde daselbst dennoch die ganze Größe $\alpha x + \beta y$ als eine einzige Veränderliche angesehen, von welcher der Ausdruck $\Gamma(\alpha x + \beta y)$ irgend eine Function bezeichnet. Man muß demnach hier, wo es sich um Functionen dreyer Veränderlichen handelt, wohl merken, daß durch jede Integration eine willkürliche Function zweyer Veränderlichen in die Rechnung eingeführt werde, woraus sich zugleich die Natur der Integrationen, welche sich auf Functionen dreyer Veränderlichen beziehen, folgern läßt.

Aufgabe 73.

§. 440. **Wenn v irgend eine Function der drey Veränderlichen x, y und z bezeichnet, ihre Differenzialformeln des zweyten und der höhern Grade darzustellen.**

Auflösung.

Da jene Function die drey Differenzialformeln des ersten Grades

$$\left(\frac{dv}{dx}\right), \left(\frac{dv}{dy}\right), \left(\frac{dv}{dz}\right)$$

gibt, so wird jede derselben, gleichsam als neue Function betrachtet, wieder drey Differenzialausdrücke darbiethen, welche sich aber wegen

$$\left(\frac{d^2 v}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^2 v}{dy\,dx}\right)$$

auf folgende sechs Ausdrücke zurückführen lassen:

$$\left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right); \left(\frac{d^2 v}{dy^2}\right); \left(\frac{d^2 v}{dz^2}\right); \left(\frac{d^2 v}{dx\,dy}\right); \left(\frac{d^2 v}{dy\,dz}\right); \left(\frac{d^2 v}{dx\,dz}\right).$$

Die Nenner dieser Ausdrücke zeigen, welche von den drey Größen x, y und z bey jeder Differenziation allein als veränderlich angesehen werden muß. Auf ähnliche Art erhellt, daß die Differenzialformeln des dritten Grades durch folgende zehn Ausdrücke gegeben werden:

$$\left(\frac{d^3 v}{dx^3}\right); \left(\frac{d^3 v}{dx^2\,dy}\right); \left(\frac{d^3 v}{dx\,dy^2}\right);$$

$$\left(\frac{d^3 v}{dy^3}\right); \left(\frac{d^3 v}{dy^2\,dz}\right); \left(\frac{d^3 v}{dy\,dz^2}\right); \left(\frac{d^3 v}{dx\,dy\,dz}\right);$$

$$\left(\frac{d^3 v}{dz^3}\right); \left(\frac{d^3 v}{dz^2\,dx}\right); \left(\frac{d^3 v}{dz\,dx^2}\right).$$

Ferner ist die Anzahl der Differenzialformeln des vierten Grades
i, des fünften 21, u. s. w., welche Zahlen nach den Triangular-
hlen fortschreiten; und es erhellt zugleich aus der Form eines jeden
usdruckes, wie man seinen Werth aus der gegebenen Function v
rch wiederholte Differenziation bestimmen müsse, indem man bey
der Operation eine einzige Größe als veränderlich betrachtet.

Zusatz 1.

§. 441. Dieß sind also alle Differenzialformeln eines jeden Gra-
s, welche sich aus jeder Function dreyer Veränderlichen durch Diffe-
nziation ableiten lassen, und welche ebenfalls als Functionen dreyer
eränderlichen angesehen werden können.

Zusatz 2.

§. 442. So wie also aus einer solchen gegebenen Function ihre
mmtlichen Differenzialformeln mit Hülfe der Differenzialrechnung
funden werden, eben so muß man auch umgekehrt aus irgend einer
gebenen Differenzialformel, oder irgend einer zwischen zweyen oder
ehreren Differenzialausdrücken festgesetzten Relation, die Function,
s welcher dieselben entstehen, mit Hülfe der Integralrechnung auf-
chen.

Anmerkung 1.

§. 443. In der Differenzialrechnung liegt zwar wenig daran,
die Function, welche man zu differenzieren hat, eine oder mehrere
ränderliche Größen enthält, da die Differenziationsregeln für jede
nzahl der Veränderlichen dieselben bleiben, weßhalb es auch nicht
thig war, die Differenzialrechnung nach dieser Verschiedenheit der
unctionen in verschiedene Theile abzutheilen. Allein ganz anders ver-
lt es sich in der Integralrechnung, welche wir nach dieser Verschie-
nheit der Functionen allerdings eintheilen müssen, deren Unterabthei-
ngen sowohl rücksichtlich der eigenthümlichen Natur, als auch rück-
htlich der Vorschriften sehr von einander unterschieden sind. Wir
rden also zeigen müssen, wie man diesen Theil der Integralrechnung,
lcher sich mit den Functionen dreyer Veränderlichen beschäftigt,
eckmäßig zu behandeln habe. Zuerst werden sich am bequemsten jene
lle entwickeln lassen, in welchen der Werth irgend einer einzigen
ifferenzialformel gegeben wird, woraus die Natur der gesuchten Func-
n bestimmt werden muß, weil diese Bestimmung keine Schwierig-

keiten darbiethet. Ferner werde ich mich mit solchen Fragen beschäftigen, bey welchen irgend eine Relation zwischen zweyen oder mehrern Differenzialausdrücken vorgelegt wird, und hierbey kömmt sehr viel darauf an, von welchem Grade diese Ausdrücke sind, und wenn sich aus dem ersten Grade mehrere Fälle behandeln lassen, so läßt sich bey den höhern Graden kaum etwas Erhebliches leisten; ich werde mich also an diese Ordnung bey der gegenwärtigen Abhandlung halten.

Anmerkung 2.

§. 444. Man könnte hier auf den Gedanken gerathen, daß zur Bestimmung der Functionen dreyer Veränderlichen sogar zwey Bedingungen oder Relationen zwischen den Differenzialformeln zuläßig seyen, und daß die Aufgabe unbestimmt bleibe, wenn nur eine einzige Bedingung vorgeschrieben ist.

Denn wenn man hat

$$dv = p\,dx + q\,dy + r\,dz,$$

wobey die Buchstaben p, q, r die Stelle der Differenzialausdrücke des ersten Grades versehen, und es sind z. B. die beyden Bedingungen gegeben:

$$q = p \quad \text{und} \quad r = p,$$

und daher

$$dv = p\,(dx + dy + dz),$$

so ist einleuchtend, daß die Auflösung bekannt seyn könne, nämlich

$$v = \Gamma\,(x + y + z).$$

Allein auf diesen Einwurf antworte ich, daß es bey diesem Beyspiele nur zufällig geschehe, daß die beyden Bedingungen zugleich bestehen können, denn, wird die eine ein wenig geändert, so, daß wofern $q = p$ bleibt, $r = px$ seyn muß, und daher

$$dv = p\,(dx + dy + x\,dz),$$

so ist einleuchtend, daß sich kein Werth für p angeben lasse, mit welchem der Differenzialausdruck

$$dx + dy + x\,dz$$

multiplicirt, den Charakter der Integrabilität erhält, und dieses einzige Beyspiel ist hinreichend, um zu beweisen, daß durch die Angabe zweyer Bedingungen derley Aufgaben mehr als bestimmt werden, und daher auch keine Auflösung gestatten, ausgenommen in gewissen Fäl-

in welchen gleichsam die eine Bedingung schon in der andern ent-
en ist; es ist daher jederzeit eine einzige zwischen den Differenzial-
eln gegebene Bedingung zur Bestimmung eines vorgelegten Pro-
es allerdings hinreichend, und es ist deßhalb ein solches Problem,
durch die Integration eine willkürliche unbestimmte Function ein-
hrt wird, eben so wenig für unbestimmt anzusehen, als die Pro-
te der gewöhnlichen Integralrechnung, deren Auflösung eine will-
iche constante Größe in die Rechnung verwebt.

Kapitel II.

Von der Auffindung der Functionen dreyer Veränderlichen aus einem gegebenen Werthe irgend einer Differenzialformel.

Aufgabe 74.

§. 445. **Wenn der Werth irgend einer Differenzialformel des ersten Grades gegeben ist, die Function dreyer Veränderlichen, aus welchen jener Differenzialausdruck entstanden ist, selbst aufzufinden.**

Auflösung.

Sey v die gesuchte Function der drey Veränderlichen x, y und z und S irgend eine gegebene Function derselben, der der Differenzialausdruck $\left(\frac{dv}{dx}\right)$ gleich seyn soll. Da also $\left(\frac{dv}{dx}\right) = S$ ist, so wird, wenn die Größe x allein als veränderlich, die beyden übrigen y und z aber als constant angesehen werden: $dv = S\,dx$, und daher

$$v = \int S\,dx + \text{Const.},$$

wobey zu bemerken ist, daß bey der Integration des Ausdruckes $S\,dx$ die beyden Größen y und z als constant angesehen, und statt Const. irgend eine Function von y und z gesetzt werden müsse. Die gesuchte Function wird sich demnach auf folgende Art darstellen lassen:

$$v = \int S\,dx + T\,(y, z);$$

hier bezeichnet nämlich der Ausdruck $T\,(y, z)$ irgend eine Größe, die aus y und z und constanten Größen auf was immer für eine Art zusammengesetzt ist.

Ist $\left(\frac{dv}{dy}\right) = S$ gegeben, so wird man auf ähnliche Art erhalten:

$$v = \int S\,dy + T\,(x, z),$$

und die Integration der Gleichung $\left(\frac{dv}{dz}\right) = S$ gibt:

$$v = \int S\,dz + T\,(x, y).$$

Zusatz 1.

§. 446. Man sieht nun zur Genüge ein, daß hier durch die Integration solcher Functionen statt der Constanten eine willkürliche Func-

tion zweyer veränderlichen Größen eingeführt werde, und daß eben in diesem Umstande der Charakter dieser Integrationen gesucht werden müsse.

Zusatz 2.

§. 447. Wir haben also hier die Auflösung jenes Problemes gegeben, in welchem eine solche Function v der drey Veränderlichen x, y, z gesucht wird, daß, wenn man

$$dv = p\,dx + q\,dy + r\,dz$$

setzt, entweder $p = S$, oder $q = S$ oder $r = S$ werde, wobey S irgend eine gegebene Function bezeichnet, welche dieselben Veränderlichen oder zwey oder eine einzige derselben enthält.

Zusatz 3.

§. 448. Wenn also $\left(\frac{dv}{dx}\right) = 0$ oder $p = 0$ seyn soll, so wird die gesuchte Function seyn $v = \Gamma(y, z)$, und damit $\left(\frac{dv}{dy}\right) = 0$ werde, wird man $v = \Gamma(x, z)$ haben, damit aber endlich $\left(\frac{dv}{dy}\right) = 0$ werde, muß $v = \Gamma(x, y)$ seyn.

Anmerkung 1.

§. 449. So wie wir im vorhergehenden Theile die willkürlichen Functionen einer einzigen Veränderlichen durch die Ordinaten beliebiger, regelmäßiger oder selbst irregulärer Curven darstellen konnten, eben so lassen sich auch in diesem Theile die willkürlichen Functionen zweyer Veränderlichen durch eine wie immer beschriebene Fläche darstellen. So wird, wenn wir uns über einer Ebene, in welcher die beyden Coordinaten x und y auf gewöhnliche Art angenommen werden, eine beliebige Fläche ausgedehnt denken, die dritte Coordinate, welche den Abstand eines beliebigen Punctes der Fläche von jener Ebene bezeichnet, irgend eine Function der beyden Veränderlichen x und y darstellen. Auf diese Art scheint man am zweckmäßigsten zu einer richtigen Idee von derley Functionen zu gelangen, da sie uns nicht allein über die Natur dieser regelmäßigen Functionen, sondern auch über die Beschaffenheit der irregulären den gehörigen Aufschluß gibt.

Anmerkung 2.

§. 450. Es ist hier auch nicht überflüssig, zu bemerken, daß

solche Functionen zweyer veränderlichen Größen auf unendlich verschiedene Arten dargestellt werden können. Denn lassen wir in der erwähnten Ebene die beyden Coordinaten x und y in zwey andere, t und u übergehen, so daß $t = \alpha x + \beta y$ und $u = \gamma x + \delta y$ wird, so ist einleuchtend, daß die Function der beyden Veränderlichen t und u oder $\Gamma(t, u)$ mit der Function der Variabeln x und y, oder $\Gamma(x, y)$ übereinstimme; denn werden statt t und u jene Werthe für x und y gesetzt, so kömmt in der That jene Function zum Vorschein, welche bloß die zwey Veränderlichen x und y enthält. Wenn weit allgemeiner t irgend einer Function von x und y gleich gesetzt wird, und eben so u einer andern solchen Function, so wird nach gehöriger Substitution $\Gamma(t, u)$ in eine Function von x und y übergehen, die durch $\Delta(x, y)$ ausgedrückt werden soll; denn es ist nicht nöthig, daß das Functionszeichen Γ, welches gleichsam die Art und Weise der Zusammensetzung bezeichnet, in beyden Fällen dasselbe sey, indem es sich hier im Allgemeinen um beliebige Functionen handelt. Wenn daher in der Folge etwa Functionen von der Form

$$\Gamma(ax + by, \ fx^2 + gy^2) \quad \text{oder} \quad \Gamma\left[\sqrt{x^2 + y^2}, \ l\frac{x}{y}\right] \text{ zc.}$$

vorkommen, so kann man statt derselben immer den einfachen Ausdruck $\Gamma(x, y)$ schreiben.

Anmerkung 3.

§. 451. Die Betrachtung der gegebenen Auflösung leitet uns auf folgende Reflexionen.

Erstlich wenn für

$$dv = p dx + q dy + r dz$$

die Größe $p = \left(\frac{dv}{dx}\right) = o$ seyn soll, so wird man erhalten:

$$dv = q dy + r dz,$$

woraus hervorgeht, daß v eine solche Größe sey, deren Differenziale die Form $q dy + r dz$ haben wird, was nur dann möglich ist, wenn die Größe v bloß eine Function der beyden Veränderlichen y und z bezeichnet, und die dritte Größe x ganz ausschließt; und weil zwischen den Größen q und r keine Bedingung festgesetzt ist, so behaupten wir mit Recht, daß man statt der Größe v irgend eine Function der beyden Veränderlichen y und z nehmen könne, oder daß $v = \Gamma(y, z)$

sey, und eben diese Auflösung hat auch die Betrachtung der Formel $\left(\frac{dv}{dx}\right) = 0$ gegeben.

Wenn ferner allgemeiner $\left(\frac{dv}{dx}\right) = p = S$ seyn soll, wobey S irgend einen aus den Veränderlichen x, y und z zusammengesetzten Ausdruck bezeichnet, so werden wir erhalten:

$$dv = S\,dx + q\,dy + r\,dz,$$

welche Gleichung auf folgende Art aufgelöst wird.

Man suche zuerst das Integrale der Formel $S\,dx$, indem man bloß die Größe x als veränderlich betrachtet, und setze dasselbe $= V$. Diese Größe soll nun, wenn sie in Bezug auf alle drey Veränderliche differenzirt wird, die Gleichnng

$$dV = S\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

geben, und da hieraus

$$S\,dx = dV - Q\,dy - R\,dz$$

folgt, so wird man erhalten:

$$dv = dV + (q - Q)\,dy + (r - R)\,dz, \quad \text{oder}$$
$$d(v - V) = (q - Q)\,dy + (r - R)\,dz,$$

und hieraus geht, wie früher, hervor, daß die Größe $v - V$ irgend einer Function der beyden Veränderlichen y und z gleich gesetzt werden müsse. Weil nun $V = \int S\,dx$ ist, so erhält man demnach, wie oben:

$$v = \int S\,dx + \Gamma(y, z).$$

Der Schluß, durch welchen wir dahin gelangten, verdient wohl bemerkt zu werden, da er auch in dem ersten Theile vorzüglich gute Dienste leisten kann; denn ist die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = a^2 \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$$

gegeben, so wird man, weil

$$d.\left(\frac{dz}{dx}\right) = dx \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + dy \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) \quad \text{und}$$
$$d.\left(\frac{dz}{dy}\right) = dx \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) + dy \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)$$

ist, erhalten:

$$a\,d.\left(\frac{dz}{dx}\right) + d.\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)(a\,dx + a^2\,dy)$$
$$+ \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)(a\,dy + dx),$$

oder

$$a\,d.\left(\frac{dz}{dx}\right) + d.\left(\frac{dz}{dy}\right) = (d\text{[illegible]}\,a\,dy)\left[a\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)\right].$$

Das Integrale des letztern Gliedes ist offenbar: $T(x + ay)$, und daher

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = -\,a\left(\frac{dz}{dx}\right) + a\Gamma'(x + ay),$$

wodurch eine Integration als vollendet zu betrachten ist. Da nun

$$dz = dx\left(\frac{dz}{dx}\right) + dy\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

ist, so wird man erhalten:

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)(dx - a\,dy) + a\,dy\,\Gamma'(x + ay).$$

Sey nun

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p \quad \text{und} \quad x - ay = t,$$

damit man

$$dz = p\,dt + a\,dy\,\Gamma'(t + 2ay)$$

für die zwey Veränderlichen t und y bekömmt, und daher

$$z = \tfrac{1}{2}\Gamma(t + 2ay) + \int dt\,[p - \tfrac{1}{2}\Gamma'(t + 2ay)]$$
$$= \Gamma(x + ay) + \Delta(x - ay),$$

weil

$$\Delta(t) = \Delta(x - ay) \quad \text{und} \quad \Gamma(t + 2ay) = \Gamma(x + ay)$$

ist.

Aufgabe 75.

§. 452. Die Natur einer Function dreyer Veränderlichen x, y, z zu bestimmen, deren eine Differenzialformel des zweyten Grades irgend einer gegebenen Function S gleich wird.

Auflösung.

Es bezeichne v die gesuchte Function, und da dieser sechs Differenzialformeln des zweyten Grades entsprechen, so nehmen wir an, es müsse $\left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right) = S$ seyn, so erhalten wir nach der ersten Integration:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = \int S\,dx + \Gamma(y, z),$$

nd ferner durch nochmahliges Integriren:

$$v = \int dx \int S dx + x\Gamma(y, z) + \Delta(y, z),$$

o bey der doppelten Integration der Formel $\int dx \int S dx$ bloß die
röße x als veränderlich angesehen wird, wie wir bereits oben schon
innert haben. Auf ähnliche Art integrirt man auch die Gleichungen

$$\left(\frac{d^2 v}{d y^2}\right) = S \text{ und } \left(\frac{d^2 v}{d z^2}\right) = S.$$

Für die übrigen Differenzialausdrücke des zweyten Grades ist es
nreichend, die einzige Formel $\left(\frac{d^2 v}{dx\,dy}\right) = S$ aufzulösen. Integrirt
an diese zuerst bloß in Bezug auf x, so wird man finden:

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \int S dx + f(y, z);$$

tegrirt man ferner zum zweyten Mahle in Bezug auf die Veränder=
he y, so ergibt sich

$$v = \int dy \int S dx + \int dy\, f(y, z) + \Delta(x, z),$$

bey ich zuerst bemerke, daß, wenn man auf die Ordnung zwischen
n beyden Veränderlichen x und y keine Rücksicht nimmt, der erste
eil durch den Ausdruck $\int\int S\,dx\,dy$ dargestellt werden könne. Wenn
ner f (y, z) was immer für eine Function von y und z bezeichnet,
d man multiplicirt sie durch dy, und integrirt sie dann, indem
in z als constant ansieht, so ist einleuchtend, daß von Neuem eine
nction von y und z zum Vorschein komme, und daß, weil jene auf
ne Weise bestimmt, auch diese unbestimmt und daher willkürlich seyn
rde; wir können daher setzen:

$$v = \int\int S\,dx\,dy + \Gamma(y, z) + \Delta(x, z).$$

Zusatz 1.

§. 453. Ich bemerke hier, daß durch die Integration der Formel
y f (y, z) der Ausdruck Δ (x, z) von selbst in die Rechnung ver=
ht werde; denn da daselbst bloß die Größe y als veränderlich ange=
en wird, so kann man statt der constanten Größe, die bey der In=
ration beygefügt werden muß, jede beliebige Function von x und z
en.

Zusatz 2.

§. 454. Wenn jene gegebene Function S verschwindet, so wird
 nachstehende Integration erhalten:

wenn $\left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) = 0$ ist, so wird $v = x\Gamma(y, z) + \Delta(y, z)$
» $\left(\frac{d^2 v}{d y^2}\right) = 0$ » » $v = y\Gamma(x, z) + \Delta(x, z)$
» $\left(\frac{d^2 v}{d z^2}\right) = 0$ » » $v = z\Gamma(x, y) + \Delta(x, y)$
» $\left(\frac{d^2 v}{d x d y}\right) = 0$ » » $v = \Gamma(x, z) + \Delta(y, z)$
» $\left(\frac{d^2 v}{d x d z}\right) = 0$ » » $v = \Gamma(x, y) + \Delta(y, z)$
» $\left(\frac{d^2 v}{d y d z}\right) = 0$ » » $v = \Gamma(x, y) + \Delta(x, z)$

Zusatz 3.

§. 455. Weil man hier zweymahl integriren muß, und auch zwey willkürliche Functionen, deren jede zwey Veränderliche enthält, in die Rechnung eingeführt worden sind, so ist dieß das sicherste Kennzeichen, daß die gefundenen Integralien vollständig seyen.

Anmerkung.

§. 456. Eben diese Integralien lassen sich auch noch auf eine andere Art entwickeln, welche sich auf das oben (§. 451) angeführte Princip stützt; daß man nämlich, wenn

$$dv = S dx + q dy + r dz$$

ist, die Gleichung finden werde:

$$v = \int S dx + f(y, z).$$

Ist also $\left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) = S$, so wird man diesem Grundsatze gemäß erhalten:

$$d.\left(\frac{d v}{d x}\right) = S dx + dy\left(\frac{d^2 v}{d x d y}\right) + dz\left(\frac{d^2 v}{d x d z}\right).$$

Vergleichen wir diese Formel mit der obigen, so erhalten wir $\left(\frac{d v}{d x}\right)$ statt v, statt q und r aber die Formeln

$$\left(\frac{d^2 v}{d x d y}\right) \text{ und } \left(\frac{d^2 v}{d x d z}\right),$$

und daher wird das Integrale seyn:

$$\left(\frac{d v}{d x}\right) = \int S dx + f(y, z).$$

Da nun ferner

$$dv = \left(\frac{dv}{dx}\right) dx + \left(\frac{dv}{dy}\right) dy + \left(\frac{dv}{dz}\right) dz$$

ist, so wird man finden:

$$dv = dx \int S dx + dx f(y, z) + dy \left(\frac{dv}{dy}\right) + dz \left(\frac{dv}{dz}\right),$$

woraus offenbar

$$v = \int dx \int S dx + x\Gamma(y, z) + \Delta(y, z)$$

auf dieselbe Art folgt. Ganz auf dieselbe Weise muß die Rechnung für die Gleichung $\left(\frac{d^2 v}{dx dy}\right) = S$ geführt werden, denn hieraus erhält man:

$$d \cdot \left(\frac{dv}{dy}\right) = S dx + dy \left(\frac{d^2 v}{dy^2}\right) + dz \left(\frac{d^2 v}{dy dz}\right),$$

und das Integrale hiervon ist:

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \int S dx + f(y, z);$$

die zweyte Integration führe man in folgender Form aus:

$$dv = dy \int S dx + dy f(y, z) + dx \left(\frac{dv}{dx}\right) + dz \left(\frac{dv}{dz}\right),$$

und weil

$$\int dy f(y, z) = \Gamma(y, z)$$

ist, so ergibt sich hieraus wie früher:

$$v = \iint S dx dy + \Gamma(y, z) + \Delta(x, z).$$

Aufgabe 76.

§ 457. Man bestimme die Natur einer Function dreyer Veränderlichen x, y, z, für welche irgend eine Differenzialformel des dritten Grades einer gegebenen beliebigen Größe S gleich wird, die aus jenen Veränderlichen und constanten Größen wie immer zusammengesetzt seyn mag.

Auflösung.

Man setze die gesuchte Function $= v$, und gehe nicht sowohl ihre einzelnen Differenzialformeln des dritten Grades durch, als vielmehr jene, deren Beziehung verschieden ist.

Sey also erstens $\left(\frac{d^3 v}{dx^3}\right) = S$, so gibt die erste Integration

wenn $\left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) = 0$ ist, so wird $v = x\Gamma(y, z) + \Delta(y, z)$

» $\left(\frac{d^2 v}{d y^2}\right) = 0$ » » $v = y\Gamma(x, z) + \Delta(x, z)$

» $\left(\frac{d^2 v}{d z^2}\right) = 0$ » » $v = z\Gamma(x, y) + \Delta(x, y)$

» $\left(\frac{d^2 v}{d x d y}\right) = 0$ » » $v = \Gamma(x, z) + \Delta(y, z)$

» $\left(\frac{d^2 v}{d x d z}\right) = 0$ » » $v = \Gamma(x, y) + \Delta(y, z)$

» $\left(\frac{d^2 v}{d y d z}\right) = 0$ » » $v = \Gamma(x, y) + \Delta(x, z)$

Zusatz 3.

§. 455. Weil man hier zweymahl integriren muß, und auch zwey willkürliche Functionen, deren jede zwey Veränderliche enthält, in die Rechnung eingeführt worden sind, so ist dieß das sicherste Kennzeichen, daß die gefundenen Integralien vollständig seyen.

Anmerkung.

§. 456. Eben diese Integralien lassen sich auch noch auf eine andere Art entwickeln, welche sich auf das oben (§. 451) angeführte Princip stützt; daß man nämlich, wenn

$$dv = S dx + q dy + r dz$$

ist, die Gleichung finden werde:

$$v = \int S dx + f(y, z).$$

Ist also $\left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) = S$, so wird man diesem Grundsatze gemäß erhalten:

$$d.\left(\frac{dv}{dx}\right) = S dx + dy\left(\frac{d^2 v}{d x d y}\right) + dz\left(\frac{d^2 v}{d x d z}\right).$$

Vergleichen wir diese Formel mit der obigen, so erhalten wir $\left(\frac{dv}{dx}\right)$ statt v, statt q und r aber die Formeln

$$\left(\frac{d^2 v}{d x d y}\right) \text{ und } \left(\frac{d^2 v}{d x d z}\right),$$

und daher wird das Integrale seyn:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = \int S dx + f(y, z).$$

Da nun ferner

$$dv = \left(\frac{dv}{dx}\right) dx + \left(\frac{dv}{dy}\right) dy + \left(\frac{dv}{dz}\right) dz$$

ist, so wird man finden:

$$dv = dx \int S dx + dx f(y, z) + dy \left(\frac{dv}{dy}\right) + dz \left(\frac{dv}{dz}\right),$$

woraus offenbar

$$v = \int dx \int S dx + x \Gamma(y, z) + \Delta(y, z)$$

auf dieselbe Art folgt. Ganz auf dieselbe Weise muß die Rechnung für die Gleichung $\left(\frac{d^2 v}{dx dy}\right) = S$ geführt werden, denn hieraus erhält man:

$$d . \left(\frac{dv}{dy}\right) = S dx + dy \left(\frac{d^2 v}{dy^2}\right) + dz \left(\frac{d^2 v}{dy dz}\right),$$

und das Integrale hiervon ist:

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \int S dx + f(y, z);$$

die zweyte Integration führe man in folgender Form aus:

$$dv = dy \int S dx + dy f(y, z) + dx \left(\frac{dv}{dx}\right) + dz \left(\frac{dv}{dz}\right),$$

und weil

$$\int dy f(y, z) = \Gamma(y, z)$$

ist, so ergibt sich hieraus wie früher:

$$v = \int\int S dx dy + \Gamma(y, z) + \Delta(x, z).$$

Aufgabe 76.

§ 457. Man bestimme die Natur einer Function dreyer Veränderlichen x, y, z, für welche irgend eine Differenzialformel des dritten Grades einer gegebenen beliebigen Größe S gleich wird, die aus jenen Veränderlichen und constanten Größen wie immer zusammengesetzt seyn mag.

Auflösung.

Man setze die gesuchte Function = v, und gehe nicht sowohl ihre einzelnen Differenzialformeln des dritten Grades durch, als vielmehr jene, deren Beziehung verschieden ist.

Sey also erstens $\left(\frac{d^3 v}{dx^3}\right) = S$, so gibt die erste Integration

sogleich

$$\left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) = \int S d x + 2 \Gamma (y, z),$$

dann aber gibt die zweyte:

$$\left(\frac{d v}{d x}\right) = \int d x \int S d x + 2 x \Gamma (y, z) + \Delta (y, z),$$

und hieraus folgt endlich:

$$v = \int d x \int d x \int S d x + x^2 \Gamma (y, z) + x \Delta (y, z) + \Sigma (y, z).$$

Sey zweytens $\left(\frac{d^3 v}{d x^2 d y}\right) = S$, so erhält man durch die beyden ersten Integrationen wie früher:

$$\left(\frac{d v}{d y}\right) = \int d x \int S d x + x \Gamma (y, z) + \Delta (y, z);$$

weil wir nun, wie wir bereits gesehen haben,

$$\Gamma (y, z) \quad \text{statt} \quad \int d y \Gamma (y, z)$$

schreiben können, so finden wir durch die dritte Integration:

$$v = \int^3 S d x^2 d y + x \Gamma (y, z) + \Delta (y, z) + \Sigma (x, z).$$

In diesen beyden Fällen aber sind alle Differenzialformeln des dritten Grades enthalten, wenn man die veränderlichen Größen vertauscht, die letzte Formel $\left(\frac{d^3 v}{d x d y d z}\right)$ ausgenommen, die wir deßhalb abgesondert behandeln müssen.

Sey also $\left(\frac{d^3 v}{d x d y d z}\right) = S$, so erhält man, wenn zuerst bloß in Bezug auf die Veränderliche x integrirt wird:

$$\left(\frac{d^2 v}{d y d z}\right) = \int S d x + f (y, z).$$

Nun integrire man zum zweyten Mahle bloß in Bezug auf die Veränderliche y, und man wird finden:

$$\left(\frac{d v}{d z}\right) = \int\int S d x d y + \Gamma (y, z) + \Delta (x, z),$$

und daher gibt endlich die dritte Integration in Bezug auf z:

$$v = \int^3 S d x d y d z + \Gamma (y, z) + \Delta (x, z) + \Sigma (x, y),$$

und so ist das Problem vollkommen aufgelöst.

Zusatz 1.

§. 458. Weil hier eine dreyfache Integration erforderlich war,

so umfassen die gefundenen Integralien auch drey willkürliche Functionen, deren jede zwey veränderliche Größen enthält, wie es die Natur der vollständigen Integralien erfordert.

Zusatz 2.

§. 459. Verschwindet die gegebene Größe S, so werden sich diese Integralien auf folgende Art darstellen.

Wenn $\left(\frac{d^3 v}{d x^3}\right) = 0$ ist, so wird man erhalten:

$$v = x^2 \Gamma (y, z) + x \Delta (y, z) + \Sigma (y, z),$$

wenn aber $\left(\frac{d^3 v}{d x^2 d y}\right) = 0$ ist, so ergibt sich

$$v = x \Gamma (y, z) + \Delta (y, z) + \Sigma (x, z);$$

ist endlich $\left(\frac{d^3 v}{d x\, d y\, d z}\right) = 0$, so wird man haben:

$$v = \Gamma (y, z) + \Delta (x, z) + \Sigma (x, y).$$

Anmerkung.

§. 460. Dieselben Integralien können auch nach einer zweyten, oben erklärten Methode gefunden werden, und es wäre überflüssig, die einzelnen Operationen hier beyzufügen. Eben so wenig wird es nöthig seyn, diese Untersuchungen auf die Differenzialformeln höherer Grade auszudehnen, indem das Gesetz des Fortgangs der willkürlichen Functionen, welche die einzelnen Theile der Integralien bilden, sowohl für sich, als auch nach den bereits oben angeführten Erklärungen hinreichend deutlich ist. Wir haben also den Gegenstand dieses Kapitels, in welchem irgend eine Differenzialformel einer gegebenen Größe gleich seyn soll, vollständig aus einander gesetzt. Bevor ich jedoch weiter gehe, will ich noch zwey ziemlich allgemeine Fälle anführen, deren Auflösung sich ohne Schwierigkeit auf die vorhergehenden bereits behandelten Theile der Integralrechnung zurückführen läßt, und die man daher hier als bekannt ansehen kann, wenn nicht etwa die Schwierigkeiten, die sich uns hier entgegenstellen, auf die gegenwärtigen Untersuchungen sich beziehen.

Aufgabe 77.

§. 461. Wenn in der vorgelegten Relation, aus welcher die Natur einer Function der drey Veränder-

lichen x, y und z bestimmt werden muß, keine andern Differenzialformeln erscheinen, als solche, welche aus der Veränderlichkeit einer einzigen Größe x entstehen, nämlich die Ausdrücke:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right), \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right), \left(\frac{d^3v}{dx^3}\right), \text{ etc.}$$

die gesuchte Function zu bestimmen.

Auflösung.

Da die Gleichung, welche die vorgelegte Relation enthält, außer den erwähnten Formeln keine andere Differenzialausdrücke enthält, so werden in derselben die beyden Größen y und z als constant angesehen, und diese lassen sich daher auch bey den einzelnen Integrationen als solche behandeln; man muß sich daher vorstellen, daß die vorgelegte Gleichung bloß die zwey Veränderlichen x und v enthalte, und man wird, wenn die Klammern der Differenzialausdrücke weggelassen werden, eine Differenzialgleichung erhalten, welche in das erste Buch gehört, und bey welcher, wenn sie auf höhere Grade sich erstrecken sollte, das Element dx als constant betrachtet werden muß. Läßt sich also diese Gleichung mit Hülfe der daselbst vorgetragenen Vorschriften integriren, so setze man statt der Constanten, welche durch die einzelnen Integrationen eingeführt werden, willkürliche Functionen der zwey Veränderlichen y und z, nämlich:

$$\Gamma(y, z), \quad \Delta(y, z), \quad \text{etc.},$$

und so wird man die vollständige Auflösung des vorgelegten Problemes erhalten.

Zusatz 1.

§. 462. Außer den zahlreichen Fällen der Integrabilität, die wir im ersten Buche auseinander gesetzt haben, werden also auch folgende Differenzialgleichungen, von einem so hohen Grade sie auch immer seyn mögen, aufgelöst werden können:

$$S = Av + B\left(\frac{dv}{dx}\right) + C\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + D\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) + \text{etc.}$$

und

$$S = Av + Bx\left(\frac{dv}{dx}\right) + Cx^2\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + Dx^3\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) + \ldots$$

Zusatz 2.

§ 463. Werden nämlich die Klammern weggelassen, so erhält man solche Differenzialgleichungen, deren Integration wir in den letzten Kapiteln des ersten Buches gelehrt haben; man hat bloß statt der Constanten, die durch Integration eingeführt werden, Functionen von der Form:

$$\Gamma(y, z), \quad \Delta(y, z), \quad \Sigma(y, z), \text{ ꝛc.}$$

zu schreiben, damit auf diese Weise die Integralien vollständig erhalten werden.

Anmerkung.

§. 464. Hierher kann man auch jene gegebene Relationen rechnen, in welchen Differenzialausdrücke, die die beyden Elemente dx und dy enthalten, so erscheinen, daß das Element dy durchaus dieselbe Anzahl von Dimensionen hat, also Ausdrücke von der Form:

$$\left(\frac{dv}{dy}\right); \left(\frac{d^2 v}{dx\, dy}\right); \left(\frac{d^3 v}{dx^2\, dy}\right); \left(\frac{d^4 v}{dx^3\, dy}\right); \text{ ꝛc. oder}$$

$$\left(\frac{d^2 v}{dy^2}\right); \left(\frac{d^3 v}{dx\, dy^2}\right); \left(\frac{d^4 v}{dx^2\, dy^2}\right); \left(\frac{d^5 v}{dx^3\, dy^2}\right); \text{ ꝛc.};$$

wo aber dann die Größe v selbst nirgends vorkommt. Denn wenn wir für den ersten Fall $\left(\frac{dv}{dy}\right) = u$ setzen, für den letztern aber $\left(\frac{d^2 v}{dy^2}\right) = u$, so wird die Relation auf den Fall der Aufgabe zurückgeführt werden, indem sie keine andern Differenzialformeln enthält, als

$$\left(\frac{du}{dx}\right), \left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right), \left(\frac{d^3 u}{dx^3}\right), \text{ ꝛc.}$$

und etwa die Function u selbst. Wenn wir daher die Gleichung nach den oben gelehrten Vorschriften integriren, und daraus die Function u bestimmen können, so wird auch, wenn man statt u entweder $\left(\frac{dv}{dy}\right)$ oder $\left(\frac{d^2 v}{dy^2}\right)$ setzt, damit $\left(\frac{dv}{dy}\right) = S$ oder $\left(\frac{d^2 v}{dy^2}\right) = S$ werde, die Function v selbst nach den Vorschriften dieses Kapitels bestimmt werden. Ja es werden sich auf diese Art auch solche Gleichungen, die bloß Differenzialausdrücke enthalten, nämlich:

$$\left(\frac{d^{\mu+\nu} v}{dy^\mu\, dz^\nu}\right), \left(\frac{d^{\mu+\nu+1} v}{dx\, dy^\mu\, dz^\nu}\right), \left(\frac{d^{\mu+\nu+2} v}{dx^2\, dy^\mu\, dz^\nu}\right), \text{ ꝛc.},$$

wo alle drey Elemente dx, dy, dz vorkommen, auflösen lassen;

denn wird $\left(\frac{d^{\mu+\nu} v}{d y^{\mu} d z^{\nu}}\right) = u$ gesetzt, so wird die ganze Gleichung keine andern Formeln enthalten, als

$$\left(\frac{d u}{d x}\right), \left(\frac{d^2 u}{d x^2}\right), \left(\frac{d^3 u}{d x^3}\right), \text{ic.}$$

nebst der Function u selbst, und so wird sich die Gleichung auf den Fall dieses Problemes bringen lassen. Erhält man durch die Auflösung derselben die Gleichung $u = S = \left(\frac{d^{\mu+\nu} v}{d y^{\mu} d z^{\nu}}\right)$, wobey S eine schon bekannte Function bezeichnet, so biethet die Bestimmung der Function v selbst weiter keine Schwierigkeiten dar. Es gibt aber außerdem auch einen andern Fall, der sich auf den zweyten Theil des zweyten Buches zurückführen läßt, und den ich in dem folgenden Probleme erörtern werde.

Aufgabe 78.

§. 465. Wenn in der vorgelegten Relation, aus welcher man eine Function v der drey Veränderlichen x, y und z zu bestimmen hat, keine andern Differenzialausdrücke erscheinen, als jene, welche bloß aus der Veränderlichkeit der beyden Größen x und y entspringen, indem das dritte Element dz ganz ausgeschlossen wird; die Function v zu finden.

Auflösung.

Weil in der aufzulösenden Gleichung, in welcher die gegebene Relation enthalten ist, die Größe z nicht als Veränderliche vorkommt, so muß man bey allen Integrationen, so viel deren auch ausgeführt werden müssen, die Größe z als constant behandeln. Die Auflösung dieser Gleichung gehört also in den vorhergehenden Theil, indem eine Function, die bloß die beyden Veränderlichen x und y enthält, aus der zwischen den Differenzialformeln gegebenen Relation zu bestimmen ist. Wenn sich daher die Rechnung ausführen läßt, und das Integrale gefunden ist, so werden in demselben eben so viele willkürliche Functionen einer einzigen Veränderlichen erscheinen, die auf eine bestimmte Art aus x und y zusammengesetzt sind, wie viele Integrationen erforderlich waren. Sey Γ (t) eine solche Function, wobey wir an-

nehmen, daß t durch x und y gegeben sey. Damit nun die Auflösung unserem gegenwärtigen Zwecke entspreche, nach welchem wir die Größe z den Veränderlichen beyzählten, schreibe man statt jeder willkürlichen Function $\Gamma(t)$ hier $\Gamma(t, z)$, nämlich eine Function zweyer Veränderlichen, und so wird man das vollständige Integrale erhalten.

Zusatz 1.

§. 466. Wenn also die vorgelegte Gleichung folgende ist:

$$\left(\frac{d^2 v}{d y^2}\right) = a^2 \left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right),$$

so wird, weil wir im vorhergehenden Theile

$$v = \Gamma(x + ay) + \Delta(x - ay)$$

gefunden haben, für den vorliegenden Fall, in welchem v eine Function der drey Veränderlichen x, y, z seyn soll, das Integrale sich auf folgende Art darstellen:

$$v = \Gamma[(x + ay), z] + \Delta[(x - ay), z].$$

Zusatz 2.

§. 467. Es muß nämlich hier erinnert werden, daß der Ausdruck

$$\Gamma[(x + ay), z]$$

irgend eine Function zweyer Veränderlichen bezeichne, deren eine $= x + ay$, deren andere aber $= z$ ist; und daher wird man die Function selbst durch die Ordinate, auf eine gewisse Fläche bezogen, darstellen können.

Anmerkung.

§. 468. Allein die in dem Probleme angeführten Gleichungen werden sich nicht nur auf den vorhergehenden Theil der Integralrechnung zurückführen lassen, sondern auch noch unzählige andere, die durch irgend eine Substitution auf jene Form gebracht werden können. Wenn z. B. in der vorgelegten Gleichung keine andern Differenzialformeln erscheinen, als jene, bey welchen durchaus das Element dz nur eine einzige Dimension hat, nämlich:

$$\left(\frac{dv}{dz}\right); \left(\frac{d^2 v}{dx\, dz}\right); \left(\frac{d^2 v}{dy\, dz}\right); \left(\frac{d^3 v}{dx^2 dz}\right); \left(\frac{d^3 v}{dx\, dy\, dz}\right); \left(\frac{d^3 v}{dy^2 dz}\right); \text{ic.}$$

so wird jene Gleichung durch die Substitution $\left(\frac{dv}{dz}\right) = u$ offenbar

in eine andere verwandelt, aus der nun die Function u zu bestimmen ist, und die auf den in dem Probleme erörterten Fall zurückgeführt werden muß. Wenn demnach hieraus die Natur der Function u bestimmt werden kann, so daß $u = S$ wird, so hat man noch die Gleichung $\left(\frac{dv}{dz}\right) = S$ aufzulösen, woraus man, wie wir früher gesehen haben, erhält:

$$v = \int S\,dz + \Gamma\,(x, y).$$

Eben so hat man sich zu benehmen, wenn sich die vorgelegte Gleichung mit Hülfe der Substitution

$$\left(\frac{d^2 v}{dz^2}\right) = u \text{ oder } \left(\frac{d^3 v}{dz^3}\right) = u, \text{ ꝛc.}$$

auf den Fall unserer Aufgabe zurückbringen läßt. Die Sache ist auch für sich klar, wenn mit Hülfe irgend einer Transformation die vorgelegte Gleichung auf den Fall unseres Problemes zurückgeführt werden kann. Solche Transformationen habe ich oben aber mehrere auseinander gesetzt, wenn entweder statt der gesuchten Function v eine andere u eingeführt wird, indem man $v = Su$ setzt, oder wenn die Veränderlichen x, y, z in andere p, q, r verwandelt werden, welche zu jenen in einer gewissen Relation stehen. Diese Rechnung habe ich für den Fall zweyer Veränderlichen oben ausführlicher auseinander gesetzt, und sie ist so einleuchtend, daß eine ähnliche Reduction für den Fall dreyer veränderlichen Größen leicht angewendet werden kann. In der Folge werden vielleicht dennoch solche Transformationen vorkommen; ich gehe nun zu andern Fällen über, wo Differenzialausdrücke jeder Art erscheinen, werde aber die Sache schwerlich über die ersten Elemente hinaus fortführen können.

Kapitel III.

Von der Auflösung der Differenzialgleichungen des ersten Grades.

Aufgabe 79.

§. 469. Wenn für eine Function v der drey Veränderlichen $x, y, z,$ nachdem

$$dv = pdx + qdy + rdz$$

gesetzt worden ist, die Relation Statt findet:

$$\alpha p + \beta q + \gamma r = 0;$$

die Natur der Function v zu bestimmen.

Auflösung.

Da

$$\gamma dv = \gamma p dx + \gamma q dy - (\alpha p + \beta q)\, dz$$

ist, so wird man erhalten:

$$\gamma dv = p\,(\gamma dx - \alpha dz) + q\,(\gamma dy - \beta dz),$$

und daher wird man, wenn

$$\gamma x - \alpha z = t \quad \text{und} \quad \gamma y - \beta z = u$$

gesetzt wird, finden:

$$\gamma dv = pdt + qdu;$$

woraus hervorgeht, daß die Größe v irgend einer Function der beyden Veränderlichen t und u gleich sey, so daß

$$v = \Gamma\,(t, u)$$

wird, und wenn man die angenommenen Werthe wieder herstellt:

$$v = \Gamma\,[(\gamma x - \alpha z),\ (\gamma y - \beta z)],$$

welche Gleichung also die Auflösung der Aufgabe enthält, wenn zwischen den Differenzialformeln die Bedingung festgesetzt wird, daß

$$\alpha \left(\frac{dv}{dx}\right) + \beta \left(\frac{dv}{dy}\right) + \gamma \left(\frac{dv}{dz}\right) = 0$$

seyn soll, und daher wird das Integrale dieser Gleichung deutlicher in folgender Form dargestellt:

$$v = \Gamma\left[\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma}\right),\ \left(\frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma}\right)\right].$$

Zusatz 1.

§. 470. Es ist einleuchtend, daß sich dieses Integrale auch unter folgender Form darstellen lasse:

$$v = \Gamma\left[\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right), \left(\frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma}\right)\right],$$

wenn nämlich im Allgemeinen, wie wir oben bemerkt haben,

$$\Gamma(x, y) = \Delta(t, u)$$

ist, wenn t und u auf irgend eine Weise durch x und y bestimmt werden.

Zusatz 2.

§. 471. Ja man kann auch behaupten, daß, wenn die drey Formeln

$$\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}, \quad \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma}, \quad \frac{z}{\gamma} - \frac{x}{\alpha}$$

zusammengestellt werden, die Größe v irgend eine Function dieser drey Ausdrücke sey, wenn nämlich eine derselben durch die beyden andern gegeben ist, und dem ungeachtet ist v einer Function gleich, die bloß zwey veränderliche Größen enthält.

Aufgabe 80.

§. 472. Wenn für

$$dv = pdx + qdy + rdz$$

die Bedingungsgleichung

$$px + qy + rz = nv, \text{ oder}$$

$$nv = x\left(\frac{dv}{dx}\right) + y\left(\frac{dv}{dy}\right) + z\left(\frac{dv}{dz}\right)$$

Statt finden soll, die Natur dieser Function v zu bestimmen.

Auflösung.

Man nehme aus der vorgeschriebenen Bedingung den Werth

$$r = \frac{nv - px - qy}{z},$$

so erhält man durch Substitution desselben:

$$dv - \frac{nvdz}{z} = p\left(dx - \frac{xdz}{z}\right) + q\left(dy - \frac{ydz}{z}\right),$$

oder

$$dv - \frac{n v dz}{z} = pz \cdot d \cdot \frac{x}{z} + qz \cdot d \cdot \frac{y}{z}.$$

Damit nun das erste Glied integrabel werde, multiplicire man mit $\frac{1}{z^n}$, so daß man bekömmt:

$$d \cdot \frac{v}{z^n} = \frac{pz}{z^n} d \cdot \frac{x}{z} + \frac{qz}{z^n} d \cdot \frac{y}{z}.$$

Da nun die Größen p und q nicht bestimmt sind, weil aus einer Gleichung von der Form

$$dV = PdX + QdY$$

sich im Allgemeinen ergibt:

$$V = \Gamma (X, Y),$$

so folgern wir für unsern Fall:

$$\frac{v}{z^n} = \Gamma \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \text{ oder}$$

$$v = z^n \Gamma \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right).$$

Wenn man nämlich irgend eine Function zweyer Veränderlichen $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ durch z^n, oder was dasselbe ist, durch x^n oder y^n multiplicirt, so erhält man für die Function v einen schicklichen Werth, welcher der vorgeschriebenen Bedingung Genüge leistet.

Zusatz 1.

§. 473. Es ist aber einleuchtend, daß der Ausdruck $\Gamma\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ eine solche Function bezeichne, in welcher die drey Veränderlichen x, y, z durchaus Größen von keiner Dimension bilden, und daß umgekehrt alle Functionen von dieser Form in jenem Ausdrucke enthalten seyen.

Zusatz 2.

§. 474. Hat man aber ferner mit z^n multiplicirt, so entsteht eine homogene Function der drey Veränderlichen x, y, z, für welche die Anzahl der Dimensionen $= n$ ist, und daher läßt sich die Auflösung unseres Problemes so geben, daß die gesuchte Größe v eine homogene Function der drey Veränderlichen x, y und z werde, bey welcher die Anzahl der Dimensionen $= n$ ist.

Zusatz 3.

§. 475. Ist also die vorgeschriebene Bedingung durch die Gleichung

$$px + qy + rz = 0, \text{ oder}$$

$$x\left(\frac{dv}{dx}\right) + y\left(\frac{dv}{dy}\right) + z\left(\frac{dv}{dz}\right) = 0$$

gegeben, so wird die Größe v eine homogene Function keiner Dimension von den drey Veränderlichen x, y und z bezeichnen.

Anmerkung.

§. 476. Auf ähnliche Art gelingt die Auflösung, wenn die vorgeschriebene Bedingung die Existenz folgender Relation erfordert:

$$\alpha px + \beta qy + \gamma rz = nv, \text{ oder}$$

$$\alpha x\left(\frac{dv}{dx}\right) + \beta y\left(\frac{dv}{dy}\right) + \gamma z\left(\frac{dv}{dz}\right) = nv,$$

denn weil dann

$$r = \frac{nv - \alpha px - \beta qy}{\gamma z}$$

ist, so wird man erhalten:

$$dv - \frac{nvdz}{\gamma z} = p\left[dx - \frac{\alpha xdz}{\gamma z}\right] + q\left[dy - \frac{\beta ydz}{\gamma z}\right].$$

Diese Gleichung stelle man unter folgender Form dar:

$$\frac{\gamma dv}{v} - \frac{ndz}{z} = \frac{px}{v}\left[\frac{\gamma dx}{x} - \frac{\alpha dz}{z}\right] + \frac{qy}{v}\left[\frac{\gamma dy}{y} - \frac{\beta dz}{z}\right],$$

woraus wir dann folgern, daß das Integrale des ersten Gliedes, nämlich $\gamma lv - nlz$ irgend einer Function der beyden Größen

$$\gamma lx - \alpha lz \quad \text{und} \quad \gamma ly - \beta lz$$

gleich sey, und daß man, wenn man von den Logarithmen auf Zahlen übergeht, erhalten werde:

$$\frac{v^\gamma}{z^n} = \Gamma\left(\frac{x^\gamma}{z^\alpha}, \frac{y^\gamma}{z^\beta}\right).$$

Wir wollen nun $\alpha = \frac{1}{\lambda}$, $\beta = \frac{1}{\mu}$ und $\gamma = \frac{1}{\nu}$ setzen, damit sich die vorgeschriebene Bedingung unter der Form

$$\frac{px}{\lambda} + \frac{qy}{\mu} + \frac{rz}{\nu} = nv$$

darstelle, und es wird dann die Auflösung auf folgenden Ausdruck zu-

rückgeführt werden:

$$v = z^{\nu n} \Delta \left(\frac{x^\lambda}{z^\nu}, \frac{y^\mu}{z^\nu} \right).$$

Wenn wir ferner

$$x^\lambda = X, \quad y^\mu = Y \quad \text{und} \quad z^\nu = Z$$

setzen, so werden wir finden:

$$v = Z^n \Delta \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z} \right),$$

und daher bezeichnet die gesuchte Größe v eine homogene Function, in welcher die drey Veränderlichen X, Y und Z durchaus dieselbe Anzahl von Dimensionen $= n$ bilden.

Aufgabe 81.

§. 477. Wenn die Relation

$$dv = pdx + qdy + rdz$$

Statt findet, und die Bedingungsgleichung

$$px + qy + rz = nv + S,$$

wobey S irgend eine bekannte Function der Veränderlichen x, y, z bezeichnet, gegeben ist, die Natur der gesuchten Function v zu bestimmen.

Auflösung.

Da die vorgeschriebene Bedingung den Werth

$$r = \frac{nv + S - px - qy}{z}$$

gibt, so wird man erhalten:

$$dv - \frac{nvdz}{z} = \frac{Sdz}{z} + p\left(dx - \frac{xdz}{z}\right) + q\left(dy - \frac{ydz}{z}\right)$$

oder

$$d \cdot \frac{v}{z^n} = \frac{Sdz}{z^{n+1}} + \frac{p}{z^{n-1}} d \cdot \frac{x}{z} + \frac{q}{z^{n-1}} d \cdot \frac{y}{z}.$$

Sey $x = tz$ und $y = uz$, so daß nun S eine Function der drey Veränderlichen t, u und z wird, und man integrire den Differenzialausdruck $\frac{Sdz}{z^{n+1}}$ so, daß die Größen t und u als constant angesehen werden, so wird man, wenn dieses Integrale $= V$ gesetzt wird, finden:

$$v = V z^n + z^n \Gamma\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right),$$

wo der letztere Theil eine homogene Function der drey Veränderlichen x, y, z bezeichnet, und bey welcher die Anzahl der Dimensionen $= n$ ist.

Zusatz 1.

§. 478. Wenn S eine constante Größe $= C$ ist, so wird man erhalten:

$$V = \int \frac{C\,dz}{z^{n+1}} = -\frac{C}{n z^n},$$

daher ergibt sich als erstes Glied des Integrals:

$$V z^n = -\frac{C}{n}.$$

Hieraus geht hervor, daß derselbe Werth zum Vorschein kommen werde, wenn man die Größen x, y und z mit einander vertauscht.

Zusatz 2.

§. 479. Bezeichnet S eine homogene Function von x, y und z, bey welcher die Anzahl der Dimensionen $= m$ ist, so erhält man, weil, wenn $x = tz$ und $y = uz$ gesetzt wird, $S = M z^m$ wird, so daß M bloß die Größen t und u enthält, und daher für constant anzusehen ist:

$$N = \int M z^{m-n-1}\,dz = \frac{M z^{m-n}}{m-n} = \frac{S}{(m-n)\,z^n},$$

und so wird das erste Glied des Integrales $= \frac{S}{m-n}$ seyn.

Zusatz 3.

§. 480. Wird aber in diesem Falle $m = n$, so findet man

$$V = M l z + C = M l . a z,$$

und das erste Glied des Integrales ist:

$$= M z^n l . a z = S l . a z.$$

Mit gleichem Rechte wird dieses aber auch seyn:

$$= S l . b y \quad \text{oder} \quad = S l . a x,$$

was deutlich genug in die Augen fällt, indem die Differenz dieser Werthe eine homogene Function von n Dimensionen wird, und daher in dem andern Theile des Integrales enthalten ist.

Anmerkung.

§. 481. Das Princip dieser Auflösung liegt in dem sehr allgemeinen Lehnsatze, daß, wenn

$$dv = SdZ + PdX + QdY$$

ist, wobey S eine gegebene Function, P und Q aber unbestimmte Functionen bezeichnen, erhalten werde:

$$v = \int SdZ + \Gamma(X, Y).$$

Allein es ist hier nicht hinreichend, anzudeuten, daß bey der Integration des Ausdruckes SdZ bloß die Größe Z als veränderlich anzusehen sey, sondern es muß überdieß noch bemerkt werden, daß die beyden Größen X und Y wie constante Größen zu behandeln seyen. Wenn daher zufällig S die vorgelegte Function der drey andern Veränderlichen x, y, z ist, aus welchen die Größen X, Y und Z, auf welche hier Rücksicht zu nehmen ist, auf eine bestimmte Weise gebildet werden, so müssen zuerst statt x, y, z die Größen X, Y, Z eingeführt werden, damit S als Function von X, Y und Z erscheine; dann aber muß man endlich, wenn die beyden Größen X und Y als constant, und bloß Z als veränderlich angesehen wird, das Integrale $\int SdZ$ nehmen. So sind also in dem Falle unseres Problemes für das Integrale $\int S\frac{dz}{z^{n+1}}$ die Größen $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ als constant anzusehen, indem man bloß z als veränderlich betrachtet. Man muß daher in der Function S die Größe $x = tz$ und $y = uz$ setzen, damit S eine Function von z, $t = \frac{x}{z}$ und $u = \frac{y}{z}$ werde, von welchen Größen die beyden letztern als unveränderlich anzusehen sind. Man würde also in diesem Falle einen großen Fehler begehen, wenn man z als veränderlich ansehe, die beyden übrigen x und y aber als unveränderlich behandeln wollte; weil man sich vorstellen muß, daß die beyden Größen x und y die Variable z ebenfalls enthalten. Da aber nach Vertauschung der Veränderlichen für das erste Glied des Integrals derselbe Ausdruck zum Vorschein kommen muß, so daß

$$z^n\int S\frac{dz}{z^{n+1}} = x^n\int S\frac{dx}{x^{n+1}}$$

wird, so ist einleuchtend, daß man, wenn $x = tz$ und $dx = tdz$ gesetzt wird, weil t constant genommen werden muß, erhalte:

$$x^n\int S\frac{dx}{x^{n+1}} = t^nz^n\int\frac{Stdz}{t^{n+1}z^{n+1}} = z^n\int\frac{Sdz}{z^{n+1}};$$

denn in beyden Integrationen müssen die Verhältnißquotienten der Veränderlichen $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{x}{y}$ als constant angesehen werden, und daher wird nach gehöriger Reduction die Größe $t = \frac{x}{z}$ mit Recht als unveränderlich betrachtet.

Aufgabe 82.

§. 482. **Die Natur der Function v zu bestimmen, wenn**

$$dv = pdx + qdy + rdz$$

gesetzt, und die Bedingungsgleichung gegeben wird:

$$pL + qM + rN = o,$$

wobey L, M, N gegebene Functionen der Veränderlichen x, y und z sind, nämlich L bloß eine Function von x, M von y und N von z allein.

Auflösung.

Weil $r = \frac{-pL - qM}{N}$ ist, so wird die ursprüngliche Gleichung

$$dv = p\left(dx - \frac{Ldz}{N}\right) + q\left(dy - \frac{Mdz}{N}\right) \text{ oder}$$

$$dv = pL\left(\frac{dx}{L} - \frac{dz}{N}\right) + qM\left(\frac{dy}{M} - \frac{dz}{N}\right).$$

Man setze nun

$$t = \int\frac{dx}{L} - \int\frac{dz}{N} \text{ und}$$

$$u = \int\frac{dy}{M} - \int\frac{dz}{N},$$

damit man erhalte:

$$dv = pLdt + qMdu,$$

so ist einleuchtend, daß die Größe v irgend einer Function der beyden Veränderlichen t und u gleich seyn müsse, welche man auch so angeben kann, daß, wenn die drey Integralformeln $\int\frac{dx}{L}$, $\int\frac{dy}{M}$ und $\int\frac{dz}{N}$ genommen werden, die Differenzen zwischen je zwey derselben für t und u gesetzt werden müssen.

Anmerkung 1.

§. 483. Die Auflösung würde auch gelungen seyn, wenn

$\frac{L}{N}$ bloß eine Function von x und z, und $\frac{M}{N}$ nur eine Function von y und z gewesen wäre; denn dann hätte man die zur Integration schicklichen Multiplicatoren P und Q suchen müssen, damit

$$P\left(dx - \frac{L\,dz}{N}\right) = dt \quad \text{und}$$
$$Q\left(dy - \frac{M\,dz}{N}\right) = du$$

geworden wäre, und man würde, weil

$$dv = \frac{p\,dt}{P} + \frac{q\,du}{Q}$$

ist, erhalten:

$$v = \Gamma\,(t,\ u).$$

Durch die Vertauschung der Veränderlichen x, y und z ergeben sich aber auch noch andere Fälle, welche die Auflösung gestatten. Wenn aber die Größen L, M, N anders beschaffen sind, so kennt man keinen bestimmten Weg, auf dem man zur Auflösung gelangen könnte, und derselbe scheint allerdings sehr versteckt zu liegen, da wir für den ziemlich einfachen Fall

$$(y + z)\,p + (x + z)\,q + (x + y)\,z = 0$$

auf mehreren Umwegen endlich zu der Auflösung gekommen sind, daß

$$v = \Gamma\,(t,\ u)$$

wird, wenn man

$$t = (x + y + z)\,(x - z)^2 \quad \text{und}$$
$$u = (x + y + z)\,(y - z)^2$$

setzt. Weil also die beyden Größen t und u, von welchen jede Function statt v gesetzt, der aufgestellten Bedingung Genüge leistet, in diesem Falle so sehr verwickelt sind, so wird man noch weit weniger eine allgemeine Auflösung erwarten können.

Anmerkung 2.

§. 484. Die Auflösung läßt sich aber noch auf mehrere andere Fälle ausdehnen. Wenn die gegebenen Functionen L, M, N so beschaffen sind, daß sich andere Functionen E, F, G, H, auffinden lassen, durch welche man erhält:

$$E\left(dx - \frac{L\,dz}{N}\right) + F\left(dy - \frac{M\,dz}{N}\right) = dt \quad \text{und}$$
$$G\left(dx - \frac{L\,dz}{N}\right) + H\left(dy - \frac{M\,dz}{N}\right) = du,$$

so wird man, wenn

$$p = PE + QG \quad \text{und} \quad q = PF + QH$$

gesetzt wird, finden:

$$dv = Pdt + Qdu.$$

Hier sind die unbestimmten Functionen P und Q statt p und q eingeführt worden, und die Größe v wird irgend einer Function der beyden Veränderlichen t und u gleich seyn, oder man wird erhalten:

$$v = \Gamma\,(t, u).$$

Die ganze Rechnung geht also darauf hinaus, daß für die gegebenen Functionen L, M, N, die Functionen E, F, G, H gefunden werden, was zwar immer möglich zu seyn scheint; allein diese Untersuchung ist gewöhnlich weit schwieriger, als die Beantwortung der vorgelegten Frage selbst. Allein es ist hinreichend, zwey solche Functionen E und F aufzufinden, und hieraus die Größe t zu bestimmen, weil dann durch Vertauschung der Veränderlichen x, y, z mit den entsprechenden Functionen L, M, N zugleich ein schicklicher Werth von u von selbst erhalten wird. So gibt z. B. in dem vorhin angeführten Beyspiele, wo

$$L = y + z, \quad M = x + z, \quad N = x + y$$

ist, nachdem wir

$$t = (x + y + z)\,(x - z)^2$$

gefunden haben, die bloße Vertauschung, auf der Stelle

$$u = (x + y + z)\,(y - z)^2,$$

oder auch

$$u = (x + y + z)\,(x - y)^2;$$

denn es ist gleichgültig, welchen Werth wir gebrauchen wollen.

Aufgabe 83.

§. 485. Die Natur der Function v zu untersuchen, wenn

$$dv = pdx + qdy + rdz$$

gesetzt wird, und die Bedingungsgleichung $pqr = 1$ Statt finden soll.

Auflösung.

Weil $r = \frac{1}{pq}$ ist, so wird man haben:

$$dv = p\,dx + q\,dy + \frac{dz}{pq},$$

und hieraus folgern wir:

$$v = px + qy + \frac{z}{pq} - \int\left[x\,dp + y\,dq - \frac{z\,dp}{p^2q} - \frac{z\,dq}{pq^2}\right].$$

Durch diese Transformation haben wir den Zweck erreicht, daß der Integralausdruck nur die beyden Differenzialien dp und dq enthält. Setzen wir diese also an die Stelle der Hauptgrößen, so schließen wir, daß jener Integralausdruck irgend einer Function der beyden Veränderlichen p und q gleich seyn müsse. Sey S eine solche Function, daß

$$v = px + qy + \frac{z}{pq} - S$$

wird, so hat man nur noch, weil die Größen p und q noch in der Rechnung erscheinen, zwey andere Größen zu eliminiren, und dieser Zweck läßt sich erreichen, weil

$$dS = \left(x - \frac{z}{p^2q}\right)dp + \left(y - \frac{z}{pq^2}\right)dq,$$

und daher

$$x - \frac{z}{p^2q} = \left(\frac{dS}{dp}\right) \text{ und } y - \frac{z}{pq^2} = \left(\frac{dS}{dq}\right)$$

ist. Es wird sich also nun die Auflösung auf folgende Art darstellen. Man führe die drey Veränderlichen p, q und z ein, nehme irgend eine Function S der beyden Variablen p und q, und setze

$$x = \frac{z}{p^2q} + \left(\frac{dS}{dp}\right) \text{ und } y = \frac{z}{pq^2} + \left(\frac{dS}{dq}\right),$$

so wird dann die gesuchte Function v durch folgende Gleichung bestimmt werden:

$$v = \frac{3z}{pq} + p\left(\frac{dS}{dp}\right) + q\left(\frac{dS}{dq}\right) - S,$$

oder, wenn man die Größe v lieber durch die drey Veränderlichen x, y und z ausdrücken will, so suche man aus den beyden Gleichungen

$$x = \frac{z}{p^2q} + \left(\frac{dS}{dp}\right) \text{ und } y = \frac{z}{pq^2} + \left(\frac{dS}{dq}\right)$$

die Werthe von p und q, so wird man, wenn dieselben in der Function S substituirt worden sind, erhalten:

$$v = px + qy + \frac{z}{pq} - S,$$

und so werden wir der Forderung Genüge leisten.

Zusatz 1.

§. 486. Nimmt man für die Function S die constante Größe C, so wird man, weil

$$p^2 q = \frac{z}{x} \text{ und } p q^2 = \frac{z}{y}$$

ist, erhalten:

$$pq = \sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}} \text{ und daher}$$

$$p = \sqrt[3]{\frac{yz}{x^2}} \text{ und } q = \sqrt[3]{\frac{xz}{y^2}},$$

folglich findet man:

$$v = 3\sqrt[3]{xyz} - C,$$

und dieser Ausdruck ist ein particulärer Werth, welcher unserer Aufgabe Genüge leistet.

Zusatz 2.

§. 487. Weil in der vorgeschriebenen Bedingungsgleichung

$$pqr = 1 \text{ oder } \left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dz}\right) = 1$$

bloß die Differenzialien der drey Veränderlichen x, y und z erscheinen, so kann man dieselben um beliebige constante Größen vermehren, wodurch man folgende etwas allgemeinere Auflösung erhält:

$$v = 3\sqrt[3]{(x+a)(y+b)(z+c)} - C.$$

Anmerkung 1.

§. 488. Es gibt außerdem noch einen andern Fall, der einer leichten Entwickelung fähig ist, indem man $S = 2c\sqrt{pq}$ setzt, woraus sich ergibt:

$$p = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\sqrt[3]{\frac{z}{\sqrt{xy} - c}} \text{ und } q = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\sqrt[3]{\frac{z}{\sqrt{xy} - c}},$$

und daher

$$S = 2c\sqrt[3]{\frac{z}{\sqrt{xy} - c}}.$$

Wir erhalten also:

$$v = 3\sqrt[3]{z(\sqrt{xy} - c)^2},$$

und durch Vertauschung der Veränderlichen werden wir auf ähnliche Art finden:

$$v = 3\sqrt[3]{y(\sqrt{xz} - b)^2} \quad \text{und} \quad v = 3\sqrt[3]{x(\sqrt{yz} - a)^2},$$

wo man ferner $x + f$, $y + g$ und $z + k$ für x, y und z schreiben kann. Übrigens ist einleuchtend, daß die allgemeine Auflösung eben so gut gelingt, wenn die Größe r irgend einer Function von p und q gleich seyn soll, oder wenn zwischen den Größen p, q und r irgend eine Gleichung gegeben wird.

Anmerkung 2.

§. 489. Setzt man

$$dv = pdx + qdy + rdz,$$

und wird zwischen den Ausdrücken

$$p = \left(\frac{dv}{dx}\right), \quad q = \left(\frac{dv}{dy}\right), \quad r = \left(\frac{dv}{dz}\right)$$

irgend eine Gleichung gegeben, durch deren Differenziation die Gleichung

$$Pdp + Qdq + Rdr = 0$$

erhalten werden soll, und man nimmt dann

$$S = \int (xdp + ydq + zdr),$$

so daß man findet:

$$v = px + qy + rz - S,$$

so nehme man nun eine beliebige Function der drey Veränderlichen p, q und r, welche wir durch V bezeichnen wollen, und deren Differenziation die Gleichung

$$dV = Ldp + Mdq + Ndr$$

geben mag, so ist dann

$$0 = Pudp + Qudq + Rudr,$$

und daher

$$dV = (L + Pu)\,dp + (M + Qu)\,dq + (N + Ru)\,dr.$$

Diese Formel ist wegen der neuen Veränderlichen u, die wir eingeführt haben, ganz allgemein. Man setze nun $S = V$, so wird man erhalten:

$$x = L + Pu; \quad y = M + Qu; \quad z = N + Ru;$$

so daß nun außer den Veränderlichen p, q, r, von welchen jede durch

die beyden andern bestimmt wird, die neue Variable u erscheint, wodurch wir bereits die drey Größen x, y und z so bestimmt haben, daß sich mittelst derselben umgekehrt die Größen p, q, r und u angeben lassen; dann aber wird man haben:

$$v = px + qy + rz - V.$$

Hat man demnach für V irgend eine Function der drey Variablen p, q und r genommen, zwischen welchen die Bedingungsgleichung

$$Pdp + Qdq + Rdr = 0$$

der Annahme gemäß Statt finden soll, so setze man

$$x = Pu + \left(\frac{dV}{dp}\right); \quad y = Qu + \left(\frac{dV}{dq}\right); \quad z = Ru + \left(\frac{dV}{dr}\right)$$

und man wird erhalten:

$$v = (Pp + Qq + Rr)\,u + p\left(\frac{dV}{dp}\right) + q\left(\frac{dV}{dq}\right) + r\left(\frac{dV}{dr}\right) - V,$$

welche Auflösung deßhalb den Vorzug vor der vorhergehenden verdient, weil bey derselben die drey Größen p, q, r dieselben Verbindungen eingehen.

Aufgabe 84.

§. 490. Die Natur der Function v zu bestimmen, wenn

$$dv = pdx + qdy + rdz$$

gesetzt wird, und die Bedingungsgleichung $pqr = \frac{v^3}{xyz}$ Statt finden soll.

Auflösung.

Nehmen wir $p = \frac{Pv}{x}$, $q = \frac{Qv}{y}$, $r = \frac{Rv}{z}$, so wird man, weil der vorgeschriebenen Bedingung gemäß $PQR = 1$ seyn muß, erhalten:

$$\frac{dv}{v} = \frac{Pdx}{x} + \frac{Qdy}{y} + \frac{Rdz}{z}.$$

Setzen wir nun

$$lv = V; \quad lx = X; \quad ly = Y; \quad lz = Z;$$

so werden wir die Gleichung finden:

$$dV = PdX + QdY + RdZ,$$

für welche $PQR = 1$ seyn muß. Da diese Untersuchung von dem

vorhergehenden Probleme nicht abweicht, so wird dieselbe Auflösung auch sehr leicht dorthin übertragen werden.

Anmerkung.

§. 491. Mehrere Fälle, welche sich vielleicht in diesem Kapitel behandeln ließen, entwickle ich hier nicht, theils weil man ihre Anwendung noch nicht erkennt, theils aber, und zwar vorzüglich deßhalb, weil ich mir vorgenommen habe, bloß die ersten Principien dieses noch ganz unbekannten Theiles der Integralrechnung kurz anzudeuten. Über die Differenzialformeln höherer Grade aber, welche in der vorgelegten Bedingungsgleichung erscheinen dürften, läßt sich kaum etwas sagen, außer einigen Bemerkungen, welche die homogenen Gleichungen betreffen, und mit diesen will ich also diesen Theil der Integralrechnung schließen, und zugleich das ganze Werk seinem Ende entgegenführen.

Kapitel IV.

Von der Auflösung der homogenen Differenzialgleichungen.

Aufgabe 85.

§. 492. **Wenn v irgend einer Function der beyden Größen t und u, die durch die drey Veränderlichen x, y und z so bestimmt sind, daß**

$$t = \alpha x + \beta z \text{ und } u = \gamma y + \delta z$$

wird, gleich ist, daraus ihre Differenzialformeln aller Grade zu bestimmen.

Auflösung.

Da v eine Function der Größen

$$t = \alpha x + \beta z \text{ und } u = \gamma y + \delta z$$

ist, so werden ihre Differenzialformeln, die aus diesen beyden Veränderlichen entstehen, bekannt seyn, nämlich:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right); \left(\frac{dv}{du}\right); \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right); \left(\frac{d^2v}{dt\,du}\right); \left(\frac{d^2v}{du^2}\right) \text{ etc.};$$

hieraus erhalten wir aber sogleich

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = \alpha\left(\frac{dv}{dt}\right); \left(\frac{dv}{dy}\right) = \gamma\left(\frac{dv}{du}\right); \left(\frac{dv}{dz}\right) = \beta\left(\frac{dv}{dt}\right) + \delta\left(\frac{dv}{du}\right);$$

nämlich die Differenzialformeln des ersten Grades. Für die Differenzialformeln des zweyten Grades aber finden wir:

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) = \alpha^2\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right); \left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = \gamma^2\left(\frac{d^2v}{du^2}\right)$$

$$\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right) = \beta^2\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) + 2\beta\delta\left(\frac{d^2v}{dt\,du}\right) + \delta^2\left(\frac{d^2v}{du^2}\right)$$

$$\left(\frac{d^2v}{dx\,dy}\right) = \alpha\gamma\left(\frac{d^2v}{dt\,du}\right); \left(\frac{d^2v}{dx\,dz}\right) = \alpha\beta\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) + \alpha\delta\left(\frac{d^2v}{dt\,du}\right)$$

und

$$\left(\frac{d^2v}{dy\,dz}\right) = \beta\gamma\left(\frac{d^2v}{dt\,du}\right) + \gamma\delta\left(\frac{d^2v}{du^2}\right).$$

Auf ähnliche Art gehen wir weiter auf den dritten Grad über:

$$\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) = \alpha^3\left(\frac{d^3v}{dt^3}\right); \left(\frac{d^3v}{dy^3}\right) = \gamma^3\left(\frac{d^3v}{du^3}\right)$$

$$\left(\frac{d^3v}{dz^3}\right)=\beta^3\left(\frac{d^3v}{dt^3}\right)+3\beta^2\delta\left(\frac{d^3v}{dt^2du}\right)+3\beta\delta^2\left(\frac{d^3v}{dtdu^2}\right)+\delta^3\left(\frac{d^3v}{du^3}\right)$$

$$\left(\frac{d^3v}{dx^2dy}\right)=\alpha^2\gamma\left(\frac{d^3v}{dt^2du}\right);\ \left(\frac{d^3v}{dxdy^2}\right)=\alpha\gamma^2\left(\frac{d^3v}{dtdu^2}\right)$$

$$\left(\frac{d^3v}{dx^2dz}\right)=\alpha^2\beta\left(\frac{d^3v}{dt^3}\right)+\alpha^2\delta\left(\frac{d^3v}{dt^2du}\right)$$

$$\left(\frac{d^3v}{dy^2dz}\right)=\beta\gamma^2\left(\frac{d^3v}{dtdu^2}\right)+\gamma^2\delta\left(\frac{d^3v}{du^3}\right)$$

$$\left(\frac{d^3v}{dxdz^2}\right)=\alpha\beta^2\left(\frac{d^3v}{dt^3}\right)+2\alpha\beta\delta\left(\frac{d^3v}{dt^2du}\right)+\alpha\delta^2\left(\frac{d^3v}{dtdu^2}\right)$$

$$\left(\frac{d^3v}{dydz^2}\right)=\beta^2\gamma\left(\frac{d^3v}{dt^2du}\right)+2\beta\gamma\delta\left(\frac{d^3v}{dtdu^2}\right)+\gamma\delta^2\left(\frac{d^3v}{du^3}\right)$$

$$\left(\frac{d^3v}{dxdydz}\right)=\alpha\beta\gamma\left(\frac{d^3v}{dt^2du}\right)+\alpha\gamma\delta\left(\frac{d^3v}{dtdu^2}\right),$$

woraus sich leicht absehen läßt, wie man diese Differenzialformeln für die höheren Grade fortsetzen müsse.

Anmerkung 1.

§. 493. Man wird vielleicht glauben, daß dieses Problem allgemeiner hätte aufgefaßt werden müssen, indem man die Größen t und u durch die drey Veränderlichen x, y und z so bestimmt, daß

$$t=\alpha x+\beta y+\gamma z \quad \text{und} \quad u=\delta x+\varepsilon y+\zeta z$$

würde. Allein da diese Voraussetzung bloß zu dem Ende gemacht wurde, damit v als eine Function von t und u erschien, so ist einleuchtend, daß man dann auch v als eine Function der beyden Größen $\varepsilon t-\beta u$ und $\delta t-\alpha u$ behandeln könne, wovon die erstere kein y, letztere aber kein x enthalten wird. Man muß daher die gemachte Voraussetzung als ganz allgemein betrachten; allein es wird dennoch hier eine Ausnahme zulässig zu seyn scheinen, wenn $t=x+z$ und $u=x-z$ ist, weil hier der Werth von u nicht vorkömmt. Allein auch in diesem Falle wird die Größe v, wenn sie auch als Function von $t+u$ und $t-u$ betrachtet wird, dennoch als Function von x und z erscheinen, welcher Fall allerdings in der Voraussetzung liegt, wenn $\beta=0$ und $\gamma=0$ genommen wird.

Anmerkung 2.

§. 494. Ich habe dieses Problem deßhalb vorausgeschickt, weil ich hier keine andern Differenzialgleichungen behandeln will, als jene, denen ein solcher Werth Genüge leistet, daß v irgend einer Function

der zwey neuen Veränderlichen t und u gleich wird, welche Größen von den ursprünglichen x, y, z so abhängen sollen, daß, wie wir angenommen haben

$$t = \alpha x + \beta y \quad \text{und} \quad u = \gamma y + \delta z$$

sey. Es fällt aber leicht in die Augen, daß solche Gleichungen, denen auf diese Art Genüge geleistet werden kann, homogen seyen, so daß die aufzulösende Gleichung nur aus Differenzialformeln desselben Grades besteht, die sämmtlich durch constante Größen multiplicirt und durch Addition mit einander verbunden sind, welcher Benennung der homogenen Gleichungen ich mich schon im vorhergehenden Kapitel bedient habe. Ist also eine solche homogene Gleichung vorgelegt, so substituire man statt der einzelnen, durch die Elemente dx, dy und dz gebildeten Differenzialausdrücke die hier gefundenen, und durch die Elemente dt und du gebildeten Werthe, und setze dann jedes einzelne Glied, in wie fern es eine bestimmte, aus den Elementen dt und du zusammengesetzte Differenzialformel enthält, für sich gleich Null, und bestimme hieraus die Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\delta}{\gamma}$; wenn es sich nicht sowohl um diese Größen selbst, als vielmehr um ihre Verhältnisse handelt. Weil also nun zwey Dinge zu untersuchen sind, wenn mehreren Gleichungen Genüge geleistet werden soll, so lassen sich solche homogene Gleichuugen auf diese Art nur dann auflösen, wenn jene mehreren Gleichungen nur auf zwey zurückgeführt werden können, über welchen Gegenstand die folgenden Untersuchungen noch mehr Licht verbreiten werden.

Aufgabe 86.

§. 495. Wenn die homogene Gleichung des ersten Grades

$$A\left(\frac{dv}{dx}\right) + B\left(\frac{dv}{dy}\right) + C\left(\frac{dv}{dz}\right) = 0$$

gegeben ist, die Natur der Größe v als Function der drey Veränderlichen x, y, z zu bestimmen.

Auflösung.

Man nehme an, es sey $v = \Gamma(t, u)$, wobey

$$t = \alpha x + \beta z \quad \text{und} \quad u = \gamma y + \delta z$$

ist, so wird, nach gehöriger Substitution, dem vorhergehenden Pro-

bleme gemäß, unsere Gleichung in die zwey Theile zerlegt werden:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)(A\alpha + C\beta) + \left(\frac{dv}{du}\right)(B\gamma + C\delta) = 0,$$

und wird jeder derselben für sich gleich Null gesetzt, so findet man:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-A}{C} \quad \text{und} \quad \frac{\delta}{\gamma} = \frac{-B}{C},$$

und daher wird

$$t = Cx - Az \quad \text{und} \quad u = Cy - Bz.$$

Es wird demnach das vollständige Integrale der vorgelegten Gleichung seyn:

$$v = \Gamma\,[(Cx - Az),\ (Cy - Bz)],$$

welche sich auch in folgender besseren Form darstellen läßt:

$$v = \Gamma\left[\left(\frac{x}{A} - \frac{z}{C}\right),\ \left(\frac{y}{B} - \frac{z}{C}\right)\right].$$

Zusatz 1.

§. 496. Es ist einleuchtend, daß durch Vertauschung der Veränderlichen dieses Integrale auch auf folgende Art ausgedrückt werden könne:

$$v = \Gamma\left[\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right),\ \left(\frac{y}{B} - \frac{z}{C}\right)\right] \quad \text{oder}$$

$$v = \Gamma\left[\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right),\ \left(\frac{x}{A} - \frac{z}{C}\right)\right],$$

denn es ist

$$\frac{x}{A} - \frac{y}{B} = \left(\frac{x}{A} - \frac{z}{C}\right) - \left(\frac{y}{B} - \frac{z}{C}\right).$$

Zusatz 2.

§. 497. Wenn aus der vorgelegten Gleichung die drey Ausdrücke

$$\frac{x}{A} - \frac{y}{B};\quad \frac{x}{A} - \frac{z}{C};\quad \frac{y}{B} - \frac{z}{C}$$

gebildet sind, so wird auch jede Function, die aus denselben wie immer zusammengesetzt ist, einen brauchbaren Werth für v darbiethen; denn weil jede dieser beyden Formeln die Differenz der beyden andern ist, so muß man sich vorstellen, daß eine solche Function bloß zwey Veränderliche enthalte.

Zusatz 3.

§. 498. Es ist gleichgültig, welchen von diesen drey Integral-

ausdrücken wir gebrauchen, wenn aber die beyden neuen Veränderlichen t und u einander gleich werden sollten, dann muß man eine andere Form nehmen. Wenn z. B. C = o wäre, so wäre der erste Ausdruck $v = \Gamma\,(z, z)$ als bloße Function von z unbrauchbar, und das vollständige Integrale würde seyn:

$$v = \Gamma\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}, z\right) \text{ oder}$$
$$v = \Gamma\,[(Bx - Ay), z].$$

Aufgabe 87.

§. 499. Sey gegeben die homogene Gleichung des zweyten Grades:

$$A\left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right) + B\left(\frac{d^2 v}{dy^2}\right) + C\left(\frac{d^2 v}{dz^2}\right) + 2D\left(\frac{d^2 v}{dx\,dy}\right) + 2E\left(\frac{d^2 v}{dx\,dz}\right) + 2F\left(\frac{d^2 v}{dy\,dz}\right) = o;$$

man suche die Fälle auf, in welchen das Integrale derselben durch die Form $\Gamma\,(t, u)$ ausgedrückt werden kann, wobey

$$t = \alpha x + \beta z \quad \text{und} \quad u = \gamma y + \delta z.$$

Auflösung.

Nach gehöriger Substitution wird den in der Aufgabe 85 vorgetragenen Formeln gemäß die vorgelegte Gleichung in folgende drey Glieder aufgelöst werden:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{d^2 v}{dt^2}\right)(A\alpha^2 + C\beta^2 + 2E\alpha\beta) \\ \left(\frac{d^2 v}{dt\,du}\right)(2C\beta\delta + 2D\alpha\gamma + 2E\alpha\delta + 2F\beta\gamma) \\ \left(\frac{d^2 v}{du^2}\right)(B\gamma^2 + C\delta^2 + 2F\gamma\delta) \end{array}\right\} = o,$$

deren jedes für sich verschwinden muß. Das erstere gibt

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-E + \sqrt{E^2 - AC}}{C},$$

das letztere aber

$$\frac{\delta}{\gamma} = \frac{-F + \sqrt{F^2 - BC}}{C},$$

und werden diese Werthe in dem mittleren Gliede, welches auf die

Form

$$\frac{C\beta\delta}{\alpha\gamma} + D + \frac{E\delta}{\gamma} + \frac{F\beta}{\alpha} = 0$$

gebracht werden mag, substituirt, so führen sie auf nachstehende Gleichung:

$$EF - CD = \sqrt{(E^2 - AC)(F^2 - BC)}.$$

Diese Gleichung enthält die Bedingung zwischen den Coefficienten A, B, C, D, E, F, unter welchen die hier gebrauchte Auflösung Statt finden kann. Wird diese Gleichung entwickelt, so erhält man

$$C^2D^2 - 2CDEF + BCE^2 + ACF^2 - ABC^2 = 0,$$

und daher wird

$$C = \frac{2DEF - BE^2 - AF^2}{D^2 - AB},$$

weil der Factor C durch Multiplication eingeführt worden ist. So oft aber die Bedingungsgleichung

$$AF^2 + BE^2 + CD^2 = ABC + 2DEF$$

Statt findet, läßt sich folgender algebraische Ausdruck, der aus der vorgelegten Gleichung gebildet werden muß:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz,$$

in zwey Factoren auflösen, und daher kann die hier gebrauchte Auflösung in keinem andern Falle angewendet werden. Um also diese Fälle, welche die Auflösung gestatten, richtig zu entwickeln, nehmen wir an, die Factoren dieses Ausdruckes seyen:

$$(ax + by + cz)(fx + gy + hz),$$

welches demnach der Fall seyn wird, wenn

$$A = af; \quad B = bg; \quad C = ch$$
$$2D = ag + bf; \quad 2E = ah + cf; \quad 2F = bh + cg$$

und man findet hieraus in der That:

$$AF^2 + BE^2 + CD^2 = ABC + 2DEF;$$

für die Auflösung aber ergibt sich hieraus

$$\text{entweder } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{-a}{c} \quad \text{oder } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{-f}{h}$$

und

$$\text{entweder } \frac{\delta}{\gamma} = \frac{-b}{c} \quad \text{oder } \frac{\delta}{\gamma} = \frac{-g}{h},$$

wobey bemerkt werden muß, daß für die Brüche $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\delta}{\gamma}$ die unter einander gesetzten Werthe zusammengenommen werden müssen, so daß

entweder $t = cx - az$ und $u = cy - bz$
oder $t = hx - fz$ und $u = hy - gz$

ist.

Für die Fälle also, welche die Auflösung zulassen, wird das vollständige Integrale seyn:

$$v = \Gamma[(cx - az), (cy - bz)] + \Delta[(hx - fz), (hy - gz)]$$

oder

$$v = \Gamma\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}, \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) + \Delta\left(\frac{x}{f} - \frac{z}{h}, \frac{y}{g} - \frac{z}{h}\right).$$

Zusatz 1.

§. 500. Auf diese Art lassen sich also nur jene homogenen Gleichungen des zweyten Grades auflösen, welche enthalten sind in der Form

$$af\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + bg\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) + ch\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right) + (ag + bf)\left(\frac{d^2v}{dx\,dy}\right)$$
$$+ (ah + cf)\left(\frac{d^2v}{dx\,dz}\right) + (bh + cg)\left(\frac{d^2v}{dy\,dz}\right) = 0,$$

dann aber wird das vollständige Integrale seyn:

$$v = \Gamma\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}, \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) + \Delta\left(\frac{x}{f} - \frac{z}{h}, \frac{y}{g} - \frac{z}{h}\right),$$

Zusatz 2.

§. 501. Um aber leichter zu erkennen, ob eine vorgelegte Gleichung von der Form

$$A\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + B\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) + C\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right) + 2D\left(\frac{d^2v}{dx\,dy}\right)$$
$$+ 2E\left(\frac{d^2v}{dx\,dz}\right) + 2F\left(\frac{d^2v}{dy\,dz}\right) = 0$$

darauf zurückgeführt werden kann oder nicht, leite man hieraus den algebraischen Ausdruck ab:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz.$$

Läßt sich dieser in zwey rationale Factoren

$$(ax + by + cz)\ (fx + gy + hz)$$

auflösen, so kann auch das vollständige Integrale der Gleichung sogleich angegeben werden.

Zusatz 3.

§. 502. Nur der einzige Fall, in welchem jene zwey Factoren einander gleich werden, macht eine Ausnahme, weil dann die beyden gefundenen Functionen in eine zusammenfallen würden. Es läßt sich aber aus dem Vorhergehenden leicht einsehen, daß, wenn $f = a$, $b = g$ und $h = c$ werden sollte, das vollständige Integrale sich auf folgende Art darstelle:

$$z = x\Gamma\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c},\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) + \Delta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c},\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right).$$

Anmerkung 1.

§. 503. In den Fällen also, in welchen eine homogene Gleichung des zweyten Grades die Auflösung gestattet, enthält diese auch zwey homogene Gleichungen des ersten Grades, nämlich:

$$a\left(\frac{dv}{dx}\right) + b\left(\frac{dv}{dy}\right) + c\left(\frac{dv}{dz}\right) = 0 \quad \text{und}$$

$$f\left(\frac{dv}{dx}\right) + g\left(\frac{dv}{dy}\right) + h\left(\frac{dv}{dz}\right) = 0,$$

deren jede derselben Genüge leistet, und werden die vollständigen Integralien derselben zusammengenommen, so bilden sie das vollständige Integrale der vorgelegten Gleichung. Hieraus leiten wir nun eine andere Methode ab, die Integralien homogener Gleichungen des zweyten Grades zu finden, indem wir eine Gleichung des ersten Grades, welche denselben Genüge leistet, fingiren, nämlich:

$$a\left(\frac{dv}{dx}\right) + b\left(\frac{dv}{dy}\right) + c\left(\frac{dv}{dz}\right) = 0;$$

hieraus bilden wir dann durch dreyfache Differenziation die drey neuen Gleichungen:

$$a\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + b\left(\frac{d^2v}{dx\,dy}\right) + c\left(\frac{d^2v}{dx\,dz}\right) = 0,$$

$$a\left(\frac{d^2v}{dx\,dy}\right) + b\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) + c\left(\frac{d^2v}{dy\,dz}\right) = 0,$$

$$a\left(\frac{d^2v}{dx\,dz}\right) + b\left(\frac{d^2v}{dy\,dz}\right) + c\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right) = 0.$$

Multipliciren wir die erste hiervon mit f, die zweyte mit g und die dritte durch h, und bringen sie in eine Summe, so finden wir jene allgemeine Gleichung selbst, deren Integrale wir oben dargestellt haben. Man wird also diese Gleichung gleichsam als ein Product aus zwey homogenen Gleichungen des ersten Grades ansehen können, durch deren Verbindung das vollständige Integrale erhalten wird.

Anmerkung 2.

§. 504. Es werden hier demnach unzählige homogene Gleichungen des zweyten Grades ausgeschlossen, welche auf diese Art nicht integrirt, oder auf Gleichungen des ersten Grades zurückgeführt werden können. Diese ausgeschlossenen Fälle erkennt man sämmtlich daran, wenn die Gleichung

$$AF^2 + BE^2 + CD^2 = ABC + 2DEF$$

nicht besteht. Von dieser Art ist die Gleichung $\left(\frac{d^2 v}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^2 y}{dz^2}\right)$, welche also ein solches Integrale, wie wir hier angenommen haben, nicht gestattet; auch kennt man keinen andern Weg, auf welchem das vollständige Integrale derselben gefunden werden könnte. Es lassen sich aber unzählige particuläre Integralien angeben, welche sogar willkürliche Functionen enthalten; allein nur Functionen einer einzigen veränderlichen Größe, und man muß demnach dieselben für unsern gegenwärtigen Zweck bloß als particuläre Integralien ansehen; denn setzt man

$$v = \Gamma\,(\alpha x + \beta y + \gamma z),$$

so muß nach gemachter Substitution $\alpha\beta = \gamma^2$ werden, oder es muß, wenn $\gamma = 1$ genommen wird, $\alpha\beta = 1$ seyn; und daher leisten sogar unzählige solche Formeln in Verbindung Genüge, so daß

$$v = \Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\beta}{\alpha}y + z\right) + \Delta\left(\frac{\gamma}{\delta}x + \frac{\delta}{\gamma}y + z\right)$$
$$+ \Sigma\left(\frac{\varepsilon}{\zeta}x + \frac{\zeta}{\varepsilon}y + z\right) + \text{etc.}$$

wird, wo man für α, β, γ, δ was immer für Zahlen nehmen kann. Werden aber auch unzählige solche verschiedene Formeln mit einander verbunden, so kann dennoch das Integrale nur als ein particuläres betrachtet werden. Hieraus geht nun hervor, daß die vollständige

Integration der Gleichung $\left(\frac{d^2 v}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^2 v}{dz^2}\right)$ von größter Wichtigkeit sey; und daß eine Methode, diesen Zweck zu erreichen, die Grenzen der Analyse sehr erweitern würde. Die homogenen Gleichungen des dritten Grades erfordern aber eine noch weit größere Einschränkung, wenn die vollständige Integration auf diese Art gelingen soll, wie in dem folgenden Probleme gezeigt werden wird.

Aufgabe 88.

§. 505. **Für die homogenen Gleichungen des dritten Grades jene Fälle zu bestimmen, in welchen das vollständige Integrale durch einen angenommenen Ausdruck dargestellt, oder auf die Form der homogenen Gleichungen des ersten Grades zurückgeführt werden kann.**

Auflösung.

Man stelle sich vor, daß in der homogenen Gleichung des dritten Grades die Gleichung des ersten Grades

$$a\left(\frac{dv}{dx}\right) + b\left(\frac{dv}{dy}\right) + c\left(\frac{dv}{dz}\right) = o$$

enthalten sey; soll nun diese der Gleichung des dritten Grades:

$$\left.\begin{array}{r} A\left(\frac{d^3 v}{dx^3}\right) + B\left(\frac{d^3 v}{dy^3}\right) + C\left(\frac{d^3 v}{dz^3}\right) + D\left(\frac{d^3 v}{dx^2 dy}\right) + E\left(\frac{d^3 v}{dx\,dy^2}\right) \\ + F\left(\frac{d^3 v}{dx^2 dz}\right) + G\left(\frac{d^3 v}{dx\,dz^2}\right) \\ + H\left(\frac{d^3 v}{dy^2 dz}\right) + I\left(\frac{d^3 v}{dy\,dz^2}\right) \\ + K\left(\frac{d^3 v}{dx\,dy\,dz}\right) \end{array}\right\} = o$$

Genüge leisten, so muß nothwendig der algebraische Ausdruck

$$\begin{array}{r} Ax^3 + By^3 + Cz^3 + Dx^2y + Fx^2z + Hy^2z + Kxyz \\ + Exy^2 + Gxz^2 + Iyz^2 \end{array}$$

den Factor $ax + by + cz$ enthalten; wenn aber der andere Factor von neuem nicht in zwey einfache auflösbar ist, so wird er auf eine homogene Gleichung des zweyten Grades zurückgeführt werden, welche die Auflösung nicht gestattet. Damit demnach die vollständige Integration gelinge, so muß jener Ausdruck aus drey einfachen Factoren beste-

hen, welche

$$(ax + by + cz)\ (fx + gy + hz)\ (kx + my + nz)$$

seyn mögen, und daher werden die Coefficienten der allgemeinen Gleichung sich auf folgende Art verhalten:

$$\begin{aligned}
A &= afk;\\
B &= bgm;\\
C &= chn;\\
D &= afm + agk + bfk;\\
E &= agm + bfm + bgk;\\
F &= afn + ahk + cfk;\\
G &= ahn + cfn + chk;\\
H &= bgn + bhm + cgm;\\
I &= bhn + cgn + chm;\\
K &= agn + ahm + bfn;\\
&\quad + bhk + cfm + cgk;
\end{aligned}$$

und dann wird das vollständige Integrale seyn:

$$v = \Gamma\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}, \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) + \Delta\left(\frac{x}{f} - \frac{z}{h}, \frac{y}{g} - \frac{z}{h}\right) + \Sigma\left(\frac{x}{k} - \frac{z}{n}, \frac{y}{m} - \frac{z}{n}\right),$$

es gibt nämlich jeder einfache Factor eine willkürliche Function zweyer veränderlichen Größen.

Zusatz 1.

§. 506. In jeder dieser Functionen lassen sich die Veränderlichen x, y, z mit einander vertauschen, ja man kann sogar jede gleichsam aus drey Veränderlichen zusammengesetzt denken; die erste nämlich aus den Variabeln

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b},\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c} \text{ und } \frac{z}{c} - \frac{x}{a},$$

und eben so die übrigen.

Zusatz 2.

§. 507. Wenn zwey Factoren einander gleich sind, nämlich

$$f = a,\quad g = b,\quad h = c,$$

in welchem Falle die beyden ersten Functionen in eine zusammenfallen

würden, so muß man an ihre Stelle schreiben:

$$x\Gamma\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c},\ \frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)+\Delta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c},\ \frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right);$$

wenn aber alle drey Factoren einander gleich sind, so daß überdieß noch

$$k = a, \quad m = b \quad \text{und} \quad n = c$$

wird, so wird das vollständige Integrale seyn:

$$v = x^2\Gamma\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c},\ \frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)+x\Delta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c},\ \frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)$$
$$+\Sigma\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c},\ \frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right).$$

Zusatz 3.

§. 508. So wie wir hier die beyden ersten Theile mit x^2 und mit x multiplicirt haben, so könnten wir sie auch mit y^2 und y, und eben so auch mit z^2 und z multipliciren, denn es ist gleichgültig, welche Veränderliche wir gebrauchen, wenn es nur nicht jene ist, welche etwa allein nach dem Functionszeichen erscheint, wenn nämlich $a = 0$ wäre, und Functionen von den Größen x und $\frac{y}{b} - \frac{z}{c}$ genommen werden müssen, dann müßten die Multiplicatoren x^2 und x ausgeschlossen werden.

Anmerkung 1.

§. 509. Auf ähnliche Art ist einleuchtend, daß die homogenen Gleichungen des vierten Grades nach dieser Methode nicht aufgelöst werden können, wenn sie sich nicht in vier solche einfache Gleichungen zerlegen, und sich gleichsam als Producte derselben betrachten lassen. Denn obgleich hier in der That keine Auflösung in Factoren Statt findet, so sieht man doch aus den angeführten Beyspielen deutlich, wie man aus irgend einer homogenen Differenzialgleichung eines beliebigen Grades einen algebraischen Ausdruck desselben Grades, welcher die drey Veränderlichen x, y und z enthält, bilden müsse. Läßt sich dieser in einfache Factoren von der Form $ax + by + cz$ zerlegen, so wird sich daraus zugleich das vollständige Integrale der Differenzialgleichung ohne Schwierigkeit ergeben, indem jeder Factor eine Function zweyer Veränderlichen gibt, welche einen Theil des Integrales

bildet, so daß auch dieser Theil, für sich genommen, der Differenzialgleichung entspricht, und als ein particuläres Integrale angesehen werden kann. Wenn aber jener algebraische Ausdruck so beschaffen wäre, daß er zwar einfache Factoren hätte, aber nicht so viele, als er Dimensionen hat, so würden die einzelnen Factoren zwar particuläre Integralien darbiethen, die aber zusammengenommen das vollständige Integrale nicht bilden würden. Wenn z. B. die Differenzialgleichung des dritten Grades

$$a\left(\frac{d^3 v}{dx^2 dy}\right) + b\left(\frac{d^3 v}{dx\, dy^2}\right) - a\left(\frac{d^3 v}{dx\, dz^2}\right) - b\left(\frac{d^3 v}{dy\, dz^2}\right) = 0$$

gegeben wäre, so würde, weil der algebraische Ausdruck

$$ax^2 y + bxy^2 - axz^2 - byz^2$$

den einfachen Factor $ax + by$ enthält, hier auch der Werth

$$v = \Gamma\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b},\ z\right)$$

Genüge leisten; allein zum vollständigen Integrale fehlen noch zwey willkürliche Functionen, welche das vollständige Integrale der Gleichung $\frac{d^2 v}{dx\, dy} - \frac{d^2 v}{dz^2} = 0$ enthalten, woraus nämlich der andere Factor $xy - z^2$ jenes Ausdruckes hervorgeht. So oft also diese algebraischen Ausdrücke, welche aus den homogenen Differenzialgleichungen höherer Grade gebildet werden, die Auflösung in Factoren, wenn diese auch nicht einfach sind, gestatten; so lernen wir hieraus wenigstens, wie man die Integralien derselben auf Gleichungen niederer Grade zurückführen könne, welcher Umstand bey solchen schwierigen Untersuchungen ohne Zweifel von größter Wichtigkeit ist.

Anmerkung 2.

§. 510. Dieß ist alles, was ich über die Auffindung der Functionen dreyer Veränderlichen aus irgend einer gegebenen Relation zwischen den Differenzialien vortragen konnte, und dieß sind weiter nichts als die ersten Elemente dieser Wissenschaft, deren weitere Entwickelung dem Scharfsinne der Geometer auf das angelegentlichste zu empfehlen ist. Denn wir sind weit entfernt, diese Speculationen für unfruchtbar zu halten, daß wir vielmehr das meiste, was noch in der Theorie der Bewegung flüssiger Körper vermißt wird, auf diese höheren Zweige

Analyse verweisen müssen, und der Nutzen derselben scheint daher keinwegs dem ersteren Theile der Integralrechnung nachzustehen. Diese letzteren Theile verdienen um so mehr ausgebildet zu werden, da die Theorie der flüssigen Körper es sogar mit Functionen von vier Veränderlichen zu thun hat, deren Natur aus den Differenzialgleichungen des zweyten Grades aufgesucht werden muß. Allein diesen Theil wollte ich wegen der Armuth an Materie nicht einmahl berühren. In dieser Theorie aber ist die Auflösung der Gleichung

$$\left(\frac{d^2 v}{d t^2}\right) = \left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right) + \left(\frac{d^2 v}{d y^2}\right) + \left(\frac{d^2 v}{d z^2}\right)$$

von größter Wichtigkeit. Hier bezeichnen die Buchstaben x, y und z die Coordinaten, t aber die verflossene Zeit, und es wird eine Function dieser vier Veränderlichen gesucht, welche, statt v gesetzt, jener Gleichung Genüge leistet. Aus dem bisher Vorgetragenen aber sieht man leicht ein, daß das vollständige Integrale dieser Gleichung zwey willkürliche Functionen enthalten müsse, deren jede eine Function dreyer Veränderlichen ist, und daß alle übrigen Auflösungen, die weniger allgemein sind, für unvollständig zu halten seyen. Man kann aber ohne Mühe unzählige particuläre Auflösungen darstellen; denn wenn z. B.

$$v = \Gamma\,(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t)$$

ist, so finden wir

$$\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

und da dieß auf unzählige Weise geschehen kann, so werden auch unendlich viele solche Functionen zusammengenommen einen brauchbaren Werth für v darbiethen. Ferner leisten auch folgende Werthe Genüge:

$$v = \frac{\Gamma\,(t \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$v = \frac{\Gamma\,(x \pm \sqrt{t^2 - y^2 - z^2})}{\sqrt{t^2 - y^2 - z^2}}$$

$$v = \frac{\Gamma\,(y \pm \sqrt{t^2 - x^2 - z^2})}{\sqrt{t^2 - x^2 - z^2}}$$

$$v = \frac{\Gamma\,(z \pm \sqrt{t^2 - x^2 - y^2})}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}}$$

deren Auffindung aber schon schwieriger ist. Da aber diese Werthe bloß Functionen einer einzigen Veränderlichen sind, so geben sie nur sehr particuläre Integralien, welche sogar auch dann noch particulär seyn würden, wenn man für v Functionen zweyer Veränderlichen erhalten würde; allein solche Functionen kann man nicht einmahl vermuthen. Da also das vollständige Integrale sogar zwey willkürliche Functionen dreyer Veränderlichen enthalten muß, so sieht man leicht ein, wie weit wir noch vom Ziele entfernt sind.

Anhang.

Von der

Variationsrechnung.

Kapitel I.

Von der Variationsrechnung im Allgemeinen.

Erklärung 1.

§. 1. Man sagt, die Relation zwischen zwey Veränderlichen variire, wenn der Werth, durch welchen die eine der Variablen mittelst der andern aus derselben bestimmt wird, um eine unendlich kleine Größe wachsend gedacht wird. Diese Zunahme werden wir die Variation jener Größe, zu der sie hinzu kömmt, nennen.

Erörterung.

§. 2. Es wird hier also zuerst eine Relation zwischen den beyden Veränderlichen x und y in Betrachtung gezogen, die durch irgend eine Gleichung zwischen denselben ausgedrückt wird, und aus dieser sind für die einzelnen Werthe, welche der Größe x beygelegt werden, die entsprechenden Werthe von y zu bestimmen; dann aber hat man sich vorzustellen, daß die einzelnen Werthe von y um unendlich kleine Theilchen wie immer vermehrt werden; so daß diese geänderten Werthe von den wahren, aus der vorgelegten Relation sich ergebenden Werthen unendlich wenig abweichen. Auf diese Art sagt man, daß diese zwischen x und y bestehende Relation variire, und zugleich werden die den wahren Werthen von y beygefügten Größen unendlich klein genannt. Besonders muß aber hier bemerkt werden, daß diese Variationen, um welche die einzelnen Werthe von y wachsend gedacht werden, weder einander gleichgesetzt, noch auf irgend eine Weise von einander abhängig genommen werden, sondern unserer Willkür dergestalt überlassen bleiben, daß alle; bis auf eine oder einige, welche gewissen Werthen von y entsprechen, geradezu als verschwindend betrachtet werden können. Man hat sich nämlich vorzustellen, daß diese Variationen an kein Gesetz gebunden seyen, und daß die zwischen

x und y gegebene Relation auf die Bestimmung jener Variationen nicht influire, sondern man muß diese letzteren als ganz willkürlich ansehen.

Zusatz 1.

§. 3. Hieraus geht hervor, daß die Variationen von den Differenzialien ganz verschieden seyen, obgleich beyde unendlich klein, und daher verschwindende Größen sind; denn die Variation afficirt denselben Werth von y, welcher einem und demselben Werth von x entspricht, während das Differenzial dy zugleich den folgenden Werth x + dx berücksichtiget.

Zusatz 2.

§. 4. Denn wenn aus der zwischen x und y festgesetzten Relation der Größe x der Werth y entspricht, der dem Ausdrucke x + dx entsprechende Werth von y aber $= y'$ gesetzt wird, so ist dann

$$dy = y' - y;$$

allein die Variation von y hängt keineswegs von dem folgenden Werth y' ab, ja man kann vielmehr jeder der beyden Größen y und y' ihre Variation für sich nach Gefallen anweisen.

Anmerkung.

§. 5. Diese Idee der Variationen, welche an und für sich allzu unbestimmt und unfruchtbar scheinen könnte, wird in ihr volles Licht gesetzt werden, wenn wir ihren Ursprung, und die Art und Weise, wie man zu derselben gekommen sey, näher werden auseinander gesetzt haben. Man gelangte zu dieser Idee vorzüglich bey der Aufsuchung krummer Linien, denen die Eigenschaft eines Maximums oder Minimums zukommt Um nun aber diesen Gegenstand durch die allgemeine Betrachtung nicht dunkel zu lassen, wollen wir die Aufgabe betrachten, bey welcher eine krumme Linie verlangt wird, auf welcher ein schwerer Körper von einem gegebenen Puncte bis zu einem anderen gegebenen Puncte am geschwindesten herabgleitet. Aus der Natur der größten und kleinsten Werthe geht hier sogleich hervor, daß die Curve so beschaffen seyn müsse, daß, wenn man an ihre Stelle eine andere, von ihr unendlich wenig abweichende krumme Linie substituirt, die Fallzeit in derselben ganz dieselbe bleibt. Man muß also die Auflösung so vornehmen, daß, wenn die gesuchte Curve als bekannt betrachtet wird, die Rechnung auch für irgend eine andere, von ihr unendlich wenig

abweichende Curve eingerichtet, und daher der Unterschied, welcher sich für den Ausdruck der Zeit ergibt, beurtheilt werden kann; denn wird dieser Unterschied gleich Null gesetzt, so wird sich dann aus dieser Gleichung die Natur der gesuchten Curve erklären lassen. Diese von den gesuchten krummen Linien unendlich wenig abweichenden Curven werden aber am bequemsten so betrachtet, daß man sich vorstellt, die den einzelnen Abscissen entsprechenden Ordinaten würden um unendlich kleine Theilchen vermehrt oder vermindert, d. i. sie variirten. Es ist zwar gewöhnlich hinreichend, eine solche Variation einer einzigen Ordinate beyzulegen; allein es steht kein Hinderniß im Wege, mehrere oder sogar alle Ordinaten solche Variationen annehmen zu lassen, da man immer zu derselben Auflösung gelangen muß. Auf diese Art wird nicht allein die Methode in ein weit helleres Licht gestellt, sondern man erhält auch hieraus vollständigere Auflösungen derley Fragen, und es lassen sich hieraus selbst Aufgaben, die sich auf andere Bedingungen beziehen, entwickeln. Es scheint mir daher allerdings nothwendig zu seyn, die Variationsrechnung in der möglich größten Ausdehnung, deren sie fähig ist, zu behandeln.

Erklärung 2.

§. 6. **Wenn zwischen zwey veränderlichen Größen eine Relation gegeben ist, so sagt man, daß jede derselben variire, wenn jede für sich um eine unendlich kleine Größe wachsend gedacht wird. Hieraus erhellt nun, wie die Sache zu verstehen sey, wenn man jede Veränderliche variiren läßt.**

Erörterung.

§. 7. Wenn irgend eine Gleichung zwischen den beyden Veränderlichen x und y gegeben ist, durch welche ihre gegenseitige Relation ausgedrückt wird, so kann diese Relation, unserer Erklärung zufolge, auf doppelte Art variiren: ein Mahl, wenn man die einzelnen Werthe von y variiren läßt, während die Werthe von x unverändert bleiben; das andere Mahl aber, wenn, während die Werthe von y unverändert bleiben, die einzelnen Werthe von x geändert gedacht werden. Wir können uns daher ohne Anstand vorstellen, daß jede der beyden Veränderlichen gleichzeitig ihre eigenen Variationen erleide, die man sogar so nehmen kann, daß sie durchaus unter einander nicht zusammenhän-

gen. Es wird demnach hier eine doppelte Variation betrachtet, während bey der ersten Erklärung nur eine einzige gestattet wurde. Wir betrachten aber hier die Sache so allgemein, daß keine der beyden Variationen an irgend ein Gesetz gebunden sey, und daß auch die Variationen von y auf keine Weise von den Variationen von x abhängen.

Zusatz 1.

§. 8. Aus dem Falle, in welchem eine doppelte Variation Statt findet, ergibt sich demnach der erstere gleichsam als ein besonderer Fall, wenn die Variationen der einen Veränderlichen ganz aufgehoben werden, und hieraus sieht man ein, daß der Fall der zweyten Erklärung den der ersten in sich begreife.

Zusatz 2.

§. 9. Hieraus erhellt noch deutlicher, wie eine zwischen zwey Veränderlichen gegebene Relation auf unendlich verschiedene Weise variiren könne, und weil wir angenommen haben, daß diese Variationen an kein Gesetz gebunden seyen, so sieht man zugleich ein, daß alle möglichen Variationen jener Relation auf diese Weise angedeutet werden.

Anmerkung 1.

§. 10. Zwar umfassen die Variationen, welche einer der beyden Veränderlichen beygelegt werden, schon alle möglichen Variationen, welche die zwischen den beyden Veränderlichen festgesetzte Relation erleiden kann, so daß es überflüssig scheinen könnte, die Rechnung für die doppelte Variation einzurichten. Allein betrachten wir die Natur der Sache, und die Anwendung, für welche sie bestimmt ist, aufmerksamer, so wird die Betrachtuug der doppelten Variationen keineswegs überflüssig erscheinen, wie dieß durch die Geometrie sehr deutlich auf folgende Weise wird gezeigt werden. Da jede zwischen zwey veränderlichen Größen gegebene Relation auf das Bestimmteste durch eine in einer Ebene beschriebene Curve dargestellt wird, so sey AYM (Fig. 1) eine krumme Linie, die durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten $AX = x$ und $XY = y$ bestimmt ist, und die also jene gegebene Relation darstellt. Nun wird also jede andere krumme Linie Aym, die von jener nur unendlich wenig abweicht, jene Relation geändert darstellen, wie diese auch immer beschaffen seyn mag, so kann sie doch immer so betrachtet werden, daß derselben Abscisse $AX = x$ der geänderten

Ordinate Xv entspricht, wobey die kleine Linie Xv die Variation bezeichnet. Diese Betrachtung ist auch für die meisten Probleme, welche rücksichtlich der größten und kleinsten Werthe vorgetragen würden, hinreichend. Gewöhnlich stellt man sich vor, daß die Curve AM bloß in einigen ihrer Elemente variire; wenn aber die Frage so beschaffen ist, daß unter allen Curven, welche von einem gegebenen Puncte A zu irgend einer gegebenen Curve CD gezogen werden können, jene krumme Linie AYM bestimmt werde, welcher die Eigenschaft eines Maximums oder Minimums zukömmt, dann muß man dieselbe Eigenschaft auf irgend eine andere nächstgelegene Curve Aym, die sich auch in einem anderen Puncte m der Linie CD endigt, übertragen, und so für den letzten Punct M der gesuchten Curve sowohl die Abscisse AP, als die Ordinate PM variiren lassen, und zwar so, wie es die Natur der Linie CD erfordert; damit nun die Rechnung für eine solche, durch das letzte Element eingeführte, Variation eingerichtet werden kann, so ist es allerdings nöthig, daß für die einzelnen zwischen liegenden Puncte Y der Curve AM ganz allgemein die Abscisse $AX = x$, als auch die Ordinate $XY = y$ was immer für eine Variation erleide. Die Variation der erstern sey die Linie Xx, die der letztern aber $= xy - XY$, woraus nun die Natur und zugleich die Anwendung einer solchen doppelten Variation auf das deutlichste hervorgeht.

Anmerkung 2.

§. 11. So wie uns die Betrachtung des letztern Puncts der aufzusuchenden Curve diese herrlichen Aufklärungen gegeben hat, eben so muß man auch dem ersteren Puncte eine Variation beylegen. Wenn z. B. unter allen Linien, welche man von einer gegebenen Curve AB (Fig. 2) zu irgend einer andern ebenfalls gegebenen CD gezogen denken kann, jene zu suchen ist, welcher die Eigenschaft eines größten oder kleinsten Werthes zukömmt, dann wird es noch weit nöthiger seyn, sowohl den einzelnen Abscissen Ax, als auch den Ordinaten XY beliebige, durch kein Gesetz beschränkte Variationen in der Rechnung anzuweisen, damit sie sodann auf die Variation sowohl des Anfangspunctes G der gesuchten Curve, als auch auf des Endpunctes M derselben übertragen werden können. Obgleich aber diese Aufklärung aus der Geometrie genommen wurde, so sieht man dennoch leicht ein, daß die daraus abgeleitete Idee der Variationen weit allgemeiner sey, und in der Analysis von ausgezeichnetem Nutzen seyn werde. Der berühmte

de la Grange, der scharfsichtigste Geometer, aus Turin, dem wir die ersten Untersuchungen über die Variationsrechnung zu danken haben, hat diese Methode auf eine höchst geniale Weise sogar auf unzusammenhängende Linien, die zu der Gattung der Polygone zu rechnen sind, angewendet, und bey dieser Arbeit leisteten ihm diese doppelten Variationen den größten Nutzen.

Erklärung 3.

§. 12. **Man sagt, eine Relation zwischen drey veränderlichen Größen, welche durch zwey Gleichungen bestimmt wird, variire, wenn entweder eine, oder zwey, oder alle drey Variablen um unendlich kleine Theilchen wachsen, und diese letztern nennt man die Variationen derselben.**

Erörterung.

§. 13. Da drey veränderliche Größen, z. B. x, y und z vorkommen, zwischen welchen zwey Gleichungen gegeben seyn sollen, so kann man mittelst einer derselben die beyden übrigen bestimmen, so daß sich sowohl y als auch z als eine Function von x ansehen läßt. Auf diese Art aber pflegt man eine krumme Linie, die nicht in derselben Ebene beschrieben ist, zu bestimmen, wenn die einzelnen Puncte derselben durch die drey Coordinaten x, y und z auf die gewöhnliche Weise bezeichnet werden. Wenn sich nun einer solchen Curve irgend eine andere nächstgelegene anschließt, so daß die Differenz unendlich klein ist, so wird diese neue Curve die Variation der gegebenen seyn, und man muß sich vorstellen, daß die Variation jener, zwischen den drey Veränderlichen x, y, z gegebenen Relation ihre Natur ausdrücke. Wenn man daher zwey nächstgelegene Puncte, deren einer in der vorgelegten Curve selbst, der andere aber in der sie begleitenden, variirten Linie angenommen wird, mit einander vergleicht, so kann es sich ereignen, daß entweder alle drey Coordinaten, oder nur zwey, oder wenigstens eine für die variirte Curve verschieden ausfallen, und die Unterschiede derselben von den Coordinaten der Hauptcurve werden ihre Variationen darstellen. Diese muß man aber hier so allgemein betrachten, daß sie sich auf alle nächstgelegenen Curven erstrecken, diese mögen von der vorgelegten Curve der ganzen Ausdehnung nach, oder nur in einigen Theilen abweichen, so daß auch die nicht continuirlichen

Linien, wenn diese nur der Hauptlinie so nahe als möglich liegen, nicht ausgeschlossen werden; denn diese variirten Curven sind dem Gesetze der Stätigkeit nicht zu unterwerfen, damit sie alle möglichen krummen Linien, die von der Hauptlinie unendlich wenig abweichen, in sich begreifen.

Zusatz 1.

§. 14. Mit jedem Puncte der vorgelegten Curve oder der Hauptlinie wird also jeder Punct der variirten Curve, der von jenem unendlich wenig absteht, verglichen, und man sieht ein, daß dadurch die Variationen der Coordinaten bestimmt werden.

Zusatz 2.

§. 15. Weil ferner durch die eine angenommene Veränderliche x die beyden andern y und z bestimmt werden, und daher auch ein Punct der vorgelegten Curve, so kann man die Variationen der einzelnen Coordinaten auch als Functionen von x betrachten, wenn man dieselben nur als unendlich kleine Größen ansieht.

Zusatz 3.

§. 16. Man kann also was immer für drey Functionen von x, die wie immer von einander verschieden seyn mögen, sich denken, welche durch unendlich kleine Factoren multiplicirt, zur Darstellung der drey Variationen der Coordinaten geeignet seyn werden. Eben dieses gilt auch von was immer für drey Veränderlichen, wenn sich diese auch nicht auf die Geometrie beziehen.

Zusatz 4.

§. 17. Wenn eine Relation bloß zwischen zwey veränderlichen Größen gegeben wird, so lassen sich die Variationen derselben auch als Functionen der einen Veränderlichen betrachten, wenn sie nur unendlich klein sind, oder was dasselbe ist, mit einer unendlich kleinen Größe multiplicirt werden.

Anmerkung 1.

§. 18. Die geometrische Betrachtung ist zur Aufklärung dieser Untersuchungen ganz besonders geeignet, und diese Speculationen können, im Allgemeinen betrachtet, zu abstract und auch schwankend zu seyn scheinen. Der Fall, in welchem drey Veränderliche vorkommen,

deren Relation, unserer Annahme gemäß, durch zwey Gleichungen bestimmt wird, wird auf das Deutlichste durch eine Curve, die nicht in derselben Ebene beschrieben ist, erörtert, wenn nur die drey Coordinaten durch jene Veränderlichen bezeichnet werden. Wenn daher rücksichtlich solcher Curven die Aufgabe gegeben wird, unter denselben jene Curve zu bestimmen, welcher die Eigenschaft eines größten oder kleinsten Werthes zukommt, so muß auch dieselbe Eigenschaft auf alle übrigen, von derselben unendlich wenig abweichende Curven auf dieselbe Art übertragen werden, was aus den in die Rechnung eingeführten Variationen beurtheilt werden muß; wozu aber die große Allgemeinheit, die wir hier bey den Variationen festgesetzt haben, nützen wird, kann man einsehen, wenn statt der beyden Curven AB und CD was immer für zwey Flächen gegeben sind, von welcher jene zu dieser krummen Linie gezogen werden muß, die die Eigenschaft eines größten oder kleinsten Werthes besitzt; denn dann müssen die Variationen der drey Coordinaten so allgemein betrachtet werden, daß, wenn ein Punct der gesuchten Curve beym Anfange auf die Fläche AB übertragen wird, die Variationen daselbst auf eben diese Fläche bezogen werden können, und daß dieß eben so am Ende in Bezug auf die Fläche CD geschehen kann. Hieraus erhellt nun, daß man im Allgemeinen drey Variationen in die Rechnung einführen müsse, damit man dieselbe sowohl im Anfange als am Ende der aufzusuchenden Curve auf die begränzenden Flächen übertragen könne, deren Natur bey jeder Gränze die gegenseitige Relation zwischen den Variationen bestimmen wird.

Anmerkung 2.

§. 19. So wie wir hier drey Veränderliche betrachtet haben, deren Relation durch zwey Gleichungen bestimmt wird, so können wir auch die Rechnung auf vier und mehrere Veränderliche ausdehnen, wenn die Relation durch so viele Gleichungen ausgedrückt wird, daß durch eine einzige Veränderliche alle übrigen bestimmt werden, obgleich zur Beleuchtung dieses Falles die Geometrie, die nur auf drey Dimensionen beschränkt ist, nicht mehr dienen kann, außer wenn wir etwa die Zeit zu Hülfe nehmen wollen, indem wir einen ununterbrochenen Fluß, der von der Fläche AB gegen die Fläche CD sich ergießt, und im Laufe der Zeit immer unverändert bleibt, betrachten, so daß dann auch das Moment der Zeit angegeben werden muß, in welchem irgend ein

Theil des Flusses von der Fläche AB bis zur Fläche CD ein Größtes oder Kleinstes wird. Fügen wir zu dieser Veränderlichen noch überdieß die Veränderlichkeit der Geschwindigkeit hinzu, so kann dieß zur Erklärung einer noch größern Anzahl von Variationen dienen. Man sieht aber hier besonders, daß, obgleich alle Veränderlichen der Annahme gemäß durch eine einzige bestimmt werden, die Art und Weise der Auffindung dennoch von jener, wo bloß zwey Veränderliche erscheinen, gänzlich abweiche, weil man ihnen einzeln ihre eigenthümlichen, von den übrigen unabhängigen Variationen beylegen muß; denn man muß sich nicht vorstellen, daß, weil zwischen den Veränderlichen selbst irgend eine bestimmte Relation erkannt wird, deßhalb auch ihre Variationen an irgend eine Relation gebunden seyen, wie dieß aus dem vorhin angeführten Falle erhellet, wo die Curve, welche sich zwischen den beyden Flächen AB und CD erstreckt, und die Eigenschaft eines Maximums oder Minimums besitzt, an sich auch so bestimmt ist, daß durch eine der Coordinaten die beyden übrigen bestimmt werden. Demungeachtet aber haben alle variirten Curven, welche nach allen Richtungen von jener abweichen können, für die einzelnen Coordinaten ihre eigenthümlichen, von einander durchaus unabhängigen Variationen mit Ausnahme des Anfangs- und des Endpunctes, wo man dieselben auf die gegebenen Flächen beziehen muß.

Erklärung 4.

§. 20. **Die zwischen drey Veränderlichen bestehende Relation, welche durch eine einzige Gleichung bestimmt wird, so daß eine der Variablen einer Function der beyden übrigen gleich wird, variirt, wenn entweder eine oder alle drey Veränderlichen um unendlich kleine Theilchen wachsen, und diese letztern nennt man die Variationen derselben.**

Erörterung.

§. 21. Weil wir hier annehmen, daß die zwischen den drey Veränderlichen bestehende Relation durch eine einzige Gleichung ausgedrückt werde, so wird, wenn man zwey nach Belieben annimmt, die dritte bestimmt, so daß diese als eine Function zweyer Veränderlichen zu betrachten ist. Durch diese Relation wird also keine krumme Linie dargestellt, wenn wir die Sache auf Figuren übertragen wollen, sondern

irgend eine ganze Fläche, deren Natur durch eine zwischen den drey Coordinaten bestehende Gleichung ausgedrückt wird, woraus hervorgeht, daß durch die Änderung dieser Relation eine andere, von der ersten unendlich wenig abweichende Fläche dargestellt werde, und diese Variation muß in einem so weiten Sinne genommen werden, daß sie entweder auf irgend einen Theil der Fläche beschränkt, oder auf die ganze Fläche ausgedehnt werden kann. Vergleicht man also mit jedem Puncte der gegebenen Fläche einen andern ihm nächstgelegenen Punct der variirten Fläche, so kann es sich ereignen, daß nicht allein eine der drey Coordinaten, sondern auch zwey, ja sogar alle drey variiren. Um daher diese Untersuchung in der größten Ausdehnung vorzunehmen, wird es zweckmäßig seyn, sogleich den einzelnen Coordinaten ihre eigenthümlichen Variationen anzuweisen, die überdieß so beschaffen seyn müssen, daß sie als Functionen zweyer Veränderlichen angesehen werden können, indem durch die Bestimmung je zweyer endlich ein Punct der Fläche bestimmt wird.

Zusatz 1.

§. 22. So wie man, wenn x, y und z die drey Veränderlichen oder die drey Coordinaten bezeichnen, der festgesetzten Relation gemäß den beyden Variablen x und y beliebige Werthe beylegen kann, wodurch z einen bestimmten Werth erhält, eben so muß man sich auch vorstellen, daß die Variation von z von den Variationen der Veränderlichen x und y abhängig sey; wenn nämlich entweder die eine, oder wenn beyde geändert werden, so muß die andere Variation von z zum Vorscheine kommen.

Zusatz 2.

§. 23. Was wir hier über die Variation der einen Veränderlichen z bemerkt haben, hat auch von den beyden übrigen zu gelten, so daß die Variationen der einzelnen Größen als Functionen zweyer Veränderlichen anzusehen sind. Weil aber zwischen x, y und z eine Gleichung gegeben ist, so ist es gleichgültig, von welchen zwey Größen Functionen genommen werden, weil eine Function von y und z mittelst der Gleichung auf die Function von x und y zurückgeführt werden kann, wenn man nämlich für z seinen durch x und y ausgedrückten Werth substituirt.

Anmerkung 1.

§. 24. Auf diese Art wird man sich der Variationen bedienen

müssen, wenn eine Fläche aufzusuchen ist, welcher die Eigenschaft eines Maximums oder Minimums zukommt; man muß dann die Rechnung so einleiten, daß dieselbe Eigenschaft auch auf die ihr nächstgelegene und variirte Fläche übertragen wird. Da ferner bey den Curven, welche einen größten oder kleinsten Werth haben, gewöhnlich für die beyden Gränzen vorgeschrieben wird, daß sie sich entweder in gegebenen Puncten, oder an gegebenen krummen Linien, oder sogar an Flächen endigen, so ist auch hier eine ähnliche Bedingung zulässig, damit die zu suchende Fläche ringsum bestimmt, oder durch irgend eine gegebene Fläche begränzt wird. Um nun diese letztere Bedingung berücksichtigen zu können, ist es allerdings nöthig, allen drey Coordinaten die allgemeinsten, von einander durchaus unabhängigen Variationen beyzulegen, damit dieselben dann an der äußersten Gränze, der Natur der Gränzfläche gemäß, eingerichtet werden können. Man muß zwar hier gestehen, daß die Methode der größten und kleinsten Werthe bisher kaum bis zu derley Untersuchungen vorgerückt sey, und daß sich hier so große Hindernisse in den Weg stellen, zu deren Überwindung noch weit größere Erweiterungen der Analysis erforderlich zu seyn scheinen; aber eben deßhalb werden wir uns um so mehr bemühen müssen, die Principien dieser Methode, welche der Variationsrechnung angehören, auf eine feste Grundlage zurückzuführen und zugleich deutlich und bestimmt vorzutragen.

Anmerkung 2.

§. 25. Ich halte es hier kaum für nöthig, zu erinnern, daß man diese Rechnung auf ähnliche Art auch auf mehr als drey Veränderliche ausdehnen könne, obgleich uns die geometrischen Probleme keinen weitern Aufschluß geben, denn die Analysis ist nicht so wie die Geometrie an eine bestimmte Anzahl von Dimensionen gebunden. Wenn aber mehrere veränderliche Größen in Betrachtung kommen, so hat man vor allem zu erwägen, ob ihre gegenseitige Beziehung bloß durch eine einzige Gleichung oder durch mehrere ausgedrückt werde; denn es können deren so viele vorhanden seyn, daß ihre Anzahl von der Anzahl der Veränderlichen nur um eine Einheit abweicht, in welchem Falle sie sämmtlich als Functionen einer einzigen Veränderlichen betrachtet werden können. Wird aber die Relation durch weniger Gleichungen gegeben, so werden die einzelnen Veränderlichen als Functionen zweyer oder mehrerer Variablen erscheinen, und in jedem Falle müssen auch

die den einzelnen Größen beygelegten Variationen als Functionen von eben so vielen Veränderlichen behandelt werden, wenn wir anders diese Rechnung in der größten Allgemeinheit durchführen wollen.

Erklärung 5.

§. 26. **Die Variationsrechnung ist die Methode, die Änderung aufzufinden, welche ein aus beliebig vielen Veränderlichen zusammengesetzter Ausdruck erleidet, wenn man entweder alle, oder nur einige Variablen sich ändern läßt.**

Erörterung.

§. 27. In dieser Definition wird die Relation nicht erwähnt, welche wir bisher zwischen den Veränderlichen als gegeben angenommen haben. Denn da hier die Rechnung sich vorzüglich mit der Aufsuchung dieser Relation selbst beschäftigt, der nämlich, welcher die Eigenschaft eines Maximums oder Minimums zukommt, so kann auch die Rechnung auf sie, so lange sie noch unbekannt ist, keine Rücksicht nehmen, sondern es muß der Calcül vielmehr so behandelt werden, als wären die Veränderlichen durchaus durch keine Relation mit einander verbunden. Man muß also die Rechnung so einleiten, daß, wenn den einzelnen in der Rechnung erscheinenden Veränderlichen was immer für Variationen beygelegt werden, die sich hieraus ergebenden Variationen der Ausdrücke aller Art, welche aus jenen Variablen wie immer zusammengesetzt sind, aufzufinden gezeigt werde. Sind diese im Allgemeinen gefunden, dann erst kömmt man zur Auflösung solcher Fragen, welche Relation zwischen den Veränderlichen festgesetzt werden müsse, damit jene gefundene Variation entweder verschwindet, wie dieß bey der Aufsuchung der größten oder kleinsten Werthe der Fall ist, oder damit dieselbe auf irgend eine andere bestimmte Art gebildet sey, je nachdem es die Natur der Fragen erfordert. Werden die Vorschriften dieser Rechnung auf diese Art vorgetragen, so können ohne Anstand auch solche Probleme behandelt werden, bey welchen sogleich irgend eine zwischen den Veränderlichen bestehende Relation als gegeben angenommen, und die Änderung irgend eines aus denselben zusammengesetzten Ausdruckes, die aus den Variationen der Veränderlichen entspringt, verlangt wird. Man sieht daher ein, daß diese Rechnung auf die meisten Probleme der verschiedensten Art angewendet werden könne.

Zusatz 1.

§. 28. Die in diesem Calcül zu behandelnden Probleme gehen also darauf hinaus, daß, wenn irgend ein Ausdruck, der aus beliebig vielen Veränderlichen auf irgend eine Weise gebildet ist, vorgelegt wird, die Änderung desselben bestimmt werde, wenn die einzelnen Veränderlichen um ihre Variationen wachsen.

Zusatz 2.

§. 29. Der Variationscalcül ist also der Differenzialrechnung allerdings ähnlich, indem bey beyden den Veränderlichen unendlich kleine Incremente beygelegt werden. In wiefern aber, wie wir bereits bemerkt haben, die Variationen von den Differenzialien abweichen und sogar mit ihnen zugleich bestehen können, in so fern muß man einen sehr großen Unterschied zwischen beyden Methoden anerkennen.

Anmerkung.

§. 30. Dieser Unterschied wird aus den oben angeführten Bemerkungen vollkommen deutlich, denn wo die Rechnung auf eine krumme Linie bezogen wird, welche man mit einer andern ihr nächstgelegenen vergleichen muß, gehen wir mittelst der Differenzialien von jedem Puncte der Curve auf andere Puncte derselben krummen Linie fort; wenn wir aber von dieser Curve auf eine andere ihr nächstgelegene übergehen, so geschieht dieser Übergang, in wie fern er unendlich klein ist, mittelst Variationen. Eben dieß ist der Fall bey den Flächen, wenn diese auf andere ihnen nächstgelegene bezogen werden, wo sich die Differenzialien auf dieselbe Fläche beziehen, durch die Variationen aber von einer auf die andere übergegangen wird. Eben so verhält es sich, wenn wir die Sache analytisch betrachten, ohne auf geometrische Figuren Rücksicht zu nehmen, wo man die Variationen der veränderlichen Größen von ihren Differenzialien immer sorgfältig unterscheiden muß, und zu diesem Ende wird es zweckmäßig seyn, die Variationen durch ein eigenes Zeichen anzudeuten.

Annahme.

§. 31. Wir werden die Variation irgend einer veränderlichen Größe in der Folge durch den dieser Größe vorgesetzten Buchstaben δ anzeigen, so daß δx, δy, δz die Variationen der Größen x, y, z bezeichnen,

und wenn V irgend ein aus jenen zusammengesetzter Ausdruck ist, so wird uns das Symbol δV die Variation desselben andeuten.

Zusatz 1.

§. 32. Es bezeichnet also δx jene unendlich kleine Änderung, um welche die Größe x wachsend gedacht wird, damit ihr geänderter Werth zum Vorschein komme, und daher wird umgekehrt $x + \delta x$ der geänderte Werth von x seyn.

Zusatz 2.

§. 33. In wie fern also der Ausdruck V aus den Veränderlichen x, y und z zusammengesetzt ist, so wird, wenn man an die Stelle derselben die geänderten Werthe $x + \delta x$, $y + \delta y$ und $z + \delta z$ schreibt, und von diesem auf diese Art für V erhaltenen Werth die Größe V selbst abzieht, der Rest die Variation δV seyn.

Zusatz 3.

§. 34. Bisher verhält sich also alles gerade so, wie bey der Differenzialrechnung, und wenn V irgend eine Function von x, y und z ist, so nehme man das Differenziale derselben auf gewöhnliche Weise, und vertausche dann bloß durchaus den Buchstaben d mit δ, so wird man die Variation δV erhalten.

Anmerkung 1.

§. 35. So oft also V irgend eine Function der veränderlichen Größen x, y und z ist, so wird ihre Variation nach denselben Regeln gefunden, wie das Differenziale derselben, und man könnte daher glauben, daß die Variationsrechnung mit dem Differenzialcalcül ganz identisch sey, indem die bloße Verschiedenheit des Zeichens eine unbedeutende Sache ist. Allein man muß wohl erwegen, daß hier nicht alle Größen, deren Variationen verlangt werden, in der Gattung der Functionen begriffen werden können, weßhalb ich auch in der Definition das Wort Ausdruck gebraucht habe, dem ich eine weit allgemeinere Bedeutung beylege. Denn in wie fern man die gegenseitige Relation der Veränderlichen nicht berücksichtigen kann, weil sie unbekannt ist, in so fern kann man auch solche Ausdrücke oder Formeln, in welchen die Differenzialien der Veränderlichen und auch Integralien erscheinen, weiter nicht als bloße Functionen der Veränderlichen ansehen, und

die Variation der Differenzialausdrücke sowohl als der Integralformeln erfordert eigenthümliche Vorschriften. Es kommt demnach hier bloß darauf an, zu zeigen, wie man die Variationen der Ausdrücke beyder Arten finden könne, und daher wird unsere Abhandlung in zwey Theile zerfallen.

Anmerkung 2.

§. 36. Die Anzahl der Veränderlichen veranlaßt aber einen großen Unterschied in der Behandlungsart, und wenn mehr als zwey Veränderliche vorhanden sind, so weiß man bisher kaum, wie die Rechnung durchzuführen sey. Denn da, wenn mehrere Veränderliche eingeführt werden, auch die Betrachtung der Differenzialien ganz anders ist, indem gewöhnlich bloß die Differenzialien zweyer Veränderlichen so mit einander verglichen werden, als blieben die übrigen Variablen unveränderlich, so wird man auch bey der Variation eine ähnliche Rücksicht nehmen müssen, und hierbey stoßt man auf so große Schwierigkeiten, daß man kaum weiß, wie man dieselben beseitigen könne. Vor allem wird es ohne Zweifel nöthig seyn, die ersten Principien dieser Rechnung auf das genaueste zu entwickeln, um die Rechnungsregeln ganz aus der Natur der Sache zu schöpfen, wobey sich gewöhnlich die größten Hindernisse entgegenstellen. Ich werde also zuerst versuchen, diese Rechnungsmethode zu erklären, indem ich dieselbe bloß auf zwey Veränderliche anwende, wie dieß bisher gewöhnlich geschehen ist, und werde die Variationen der Differenzialausdrücke sowohl, als auch der Integralformeln aufsuchen; dann aber will ich, wenn wir uns aus dieser Abhandlung etwas Licht werden verschafft haben, auch zu der Betrachtung dreyer oder mehrerer Veränderlichen übergehen.

Kapitel II.

Von der Variation der Differenzialformeln, welche zwey Veränderliche enthalten.

Lehrsatz 1.

§. 37. **Die Variation des Differenzials ist immer dem Differenziale der Variation gleich, oder es ist $\delta d V = d \delta V$, wie auch die Größe V beschaffen seyn mag, welche auch eine Variation erleidet, während sie durch die Differenzialien wächst.**

Beweis.

Man kann die veränderliche Größe V als die Ordinate irgend einer Curve ansehen, welche mittelst ihrer Differenzialien durch dieselbe Curve fortschreitet, mittelst ihrer Variationen aber auf eine andere, jener nächstgelegene krumme Linie übergeht. Wenn diese Ordinate aber auf den nächstgelegenen Punct derselben Curve fortrückt, wird ihr Werth $= V + dV$, den wir $= V'$ setzen wollen, und daher ist $dV = V' - V$; also wird die Variation von dV, nämlich

$$\delta d V = \delta V' - \delta V$$

seyn. Aber $\delta V'$ ist der nächste Werth, in welchen δV, um ihr Differenziale vermehrt, übergeht; so daß

$$\delta V' = \delta V + d \delta V \quad \text{oder} \quad \delta V' - \delta V = d \delta V$$

ist, und daher sieht man ein, daß $\delta d V = d \delta V$ seyn werde, oder daß die Variation des Differenzials dem Differenziale der Variation gleich sey, gerade wie es der Lehrsatz ausspricht.

Zusatz 1.

§. 38. Die Variation des zweyten Differenzials $d^2 V$ wird daher so bestimmt, daß $\delta d^2 V = d\delta \,.\, dV$ wird, allein da $\delta d V = d \delta V$ ist, so wird unter den folgenden Formeln die Gleichheit bestehen:

$$\delta d^2 V = d\delta \,.\, dV = d^2 \,.\, \delta V.$$

Zusatz 2.

§. 39. Eben so wird man für die Differenzialien der dritten

Ordnung erhalten:

$$\delta d^3 V = d\delta . d^2 V = d^2 . \delta d V = d^3 \delta V,$$

und für die Differenzialien der vierten Ordnung wird sich die Variation so verhalten, daß man hat

$$\delta d^4 V = d \delta d^3 V = d^2 \delta d^2 V = d^3 \delta d V = d^4 \delta V,$$

und auf ähnliche Art verhält es sich bey den Differenzialien der höhern Grade.

Zusatz 3.

§. 40. Wenn also die Variation des Differenziales irgend eines Grades verlangt wird, so kann das Variationszeichen δ überall zwischen die Zeichen der Differenziation d gesetzt werden. Steht es aber an der letzten Stelle, so drückt es aus, daß die Variation des Differenziales eines jeden Grades dem Differenziale desselben Grades von der Variation gleich sey.

Zusatz 4.

§. 41. Da also $\delta d^n V = d^n \delta V$ ist, so kommt es immer darauf an, daß die Differenzialien eines jeden Grades von der Variation der Größe V oder der Größe δV genommen werden können, und in dieser Reduction ist gerade das Eigenthümliche dieses neuen Calcüls zu suchen.

Anmerkung 1.

§. 42. Die Beweiskraft liegt vorzüglich darin, daß δV in $\delta V'$ übergeht, wenn die Größe V um ihr Differenziale wächst, was übrigens zwar schon aus der Natur der Differenzialien von selbst erhellt; allein es wird dennoch gut seyn, die Sache durch die Geometrie aufzuklären.

Für irgend eine Curve EF (Fig. 3) seyen die Coordinaten $AX = x$ und $XY = y$; gehen wir nun in dieser Curve durch das unendlich kleine Intervall YY' weiter, so werden wir in Differenzialien finden:

$$AX' = x + dx \quad \text{und} \quad X'Y' = y + dy,$$

und daher

$$dx = AX' - AX \quad \text{und} \quad dy = X'Y' - XY.$$

Nun denken wir uns eine andere, der erstern nächstgelegene

Curve ef, und vergleichen die Puncte y und y′ derselben mit den Puncten Y und Y′ der erstern, zu welcher wir mittelst Variationen übergehen. Werden nun die Coordinaten auf ähnliche Weise genommen, so wird man finden:

$$Ax = x + \delta x \quad \text{und} \quad xy = y + \delta y,$$

und daher

$$\delta x = Ax - AX \quad \text{und} \quad \delta y = xy - XY,$$

dann aber wird man erhalten:

$$Ax' = x + dx + \delta(x + dx) \quad \text{und}$$
$$x'y' = y + dy + \delta(y + dy),$$

in wie fern man vom Puncte Y′ durch Variation auf den Punct y′ übergeht. Allein zu demselben Puncte y′ sind wir auch vom Puncte y aus durch Differenziation gekommen, und daher ergibt sich:

$$Ax' = x + \delta x + d(x + \delta x) \quad \text{und}$$
$$x'y' = y + \delta y + d(y + \delta y).$$

Stellt man diese Werthe mit den obigen zusammen, so erhält man

$$x + dx + \delta x + \delta dx = x + \delta x + dx + d\delta x \quad \text{und}$$
$$y + dy + \delta y + \delta dy = y + \delta y + dy + d\delta y,$$

und hieraus folgt nun offenbar:

$$\delta dx = d\delta x \quad \text{und} \quad \delta dy = d\delta y.$$

Betrachten wir die Sache etwas aufmerksamer, so sehen wir, daß das Princip, auf welches sich der Beweis stützt, darauf hinausgehe, daß, wenn man eine veränderliche Größe zuerst durch Differenziation, dann aber durch Variation fortrücken läßt, dasselbe Resultat zum Vorschein komme; also wenn sich diese Variable zuerst durch Variation, und dann durch Differenziation weiter bewegen würde. So wie man in der Figur vom Puncte Y zuerst durch Differenziation zum Puncte Y′, von da aber durch Variation nach y kommt, so gelangt man auch in der umgekehrten Ordnung vom Puncte Y durch Variation zuerst nach y, von da aber durch Differenziation zum Puncte y′, gerade so wie vorhin.

Anmerkung 2.

§. 43. Dieses Theorem ist sehr allgemein, denn es beschränkt sich nicht auf den Fall allein, wo bloß zwey Veränderliche vorkommen,

sondern es hat auch noch seine Gültigkeit, wie viele Veränderliche auch in der Rechnung erscheinen mögen, wenn man bey der Demonstration jene Veränderliche, deren Differenziale sowohl als deren Variation betrachtet wird, ohne alle Beziehung auf die übrigen Variablen allein berücksichtiget. Um aber jeden Zweifel zu beseitigen, betrachten wir irgend eine Fläche, für welche jeder Punct z (Fig. 4) durch die drey Coordinaten

$$AX = x, \quad XY = y \quad \text{und} \quad YZ = z$$

bestimmt werden soll; gehen wir nun von diesem Puncte zu einem andern nächstgelegenen Punct Z′ in derselben Fläche über, so werden diese Coordinaten um ihre Differenzialien wachsen. Hierauf denken wir uns irgend eine andere sehr nahe gelegene Fläche, und vergleichen die Puncte z und z′ derselben mit den vorigen Z und Z′, welches durch Variation geschieht. Nach diesen Annahmen ist nun einleuchtend, daß man auf doppeltem Wege zu dem Puncte z′ gelangen könne; auf dem einen nämlich durch Variation vom Puncte Z′ aus, auf dem andern aber durch Differenziation vom Puncte z aus, und daß man auf diese Art erhalten werde:

$$Ax' = AX' + \delta . AX' = Ax + d . Ax$$
$$x'y' = X'Y' + \delta . X'Y' = xy + d . xy$$
$$y'z' = Y'Z' + \delta . Y'Z' = yz + d . yz,$$

und dieß gilt auch von allen übrigen veränderlichen Größen, welche auf diese Puncte zu beziehen sind. Hieraus geht aber deutlich hervor, daß

$$\delta dx = d\delta x, \quad \delta dy = d\delta y, \quad \delta dz = d\delta z.$$

Anmerkung 3.

§. 44. Es ist allerdings sehr merkwürdig, daß in dem Falle, wo Differenzialien einer höhern Ordnung erscheinen, das Variationszeichen δ nach Belieben zwischen die Differenziationszeichen d geschrieben werden kann, woraus man dann sehen kann, daß diese Permutabilität auch Statt finden werde, wenn das Variationszeichen δ auch eben so wie das Differenziationszeichen d einige Mahl wiederholt wird, was vielleicht bey andern Untersuchungen geschehen könnte. Allein für unsern gegenwärtigen Zweck kann das Variationszeichen δ auf keine Art wiederholt vorkommen, weil wir eine Linie oder eine Fläche nur mit einer einzigen andern, ihr nächst gelegenen, vergleichen; denn obgleich diese letztere ganz allgemein betrachtet wird, damit sie

alle möglichen ihr nächst gelegenen in sich begreift, so wird sie dennoch bloß als eine einzige angesehen, und, wenn wir von der Hauptlinie (oder Fläche) auf die nächstgelegene übergegangen sind, findet kein neuer Übergang auf eine andere mehr Statt. Es sind demnach jene Untersuchungen, bey welchen die Variationen von Variationen zu bestimmen wären, ganz ausgeschlossen. Umgekehrt aber müssen hier die Differenzialien der Variationen, von welcher Ordnung sie auch seyn mögen, zuläßig seyn, und da bey den Differenzialformeln, welche zwar eine endliche Bedeutung haben, bloß das Verhältniß der Differenzialien betrachtet wird, und man dieselben, wenn x und y die beyden Veränderlichen sind, durch die Annahmen

$$dy = p\,dx, \quad dp = q\,dx, \quad dq = r\,dx, \text{ etc.}$$

gewöhnlich auf endliche Formen zurückführt, so müssen vorzüglich die Variationen der Größen p, q, r, etc. angegeben werden.

Aufgabe 1.

§. 45. Die Variation der Differenzialformel $p = \frac{dy}{dx}$ zu bestimmen, wenn die Variationen δx und δy der beyden Veränderlichen x und y gegeben sind.

Auflösung.

Da $\delta dy = d\delta y$ und $\delta dx = d\delta x$ ist, so findet man die gesuchte Variation δp nach den bekannten Differenziationsregeln, wenn man nur das Differenziationszeichen d mit dem Variationszeichen δ vertauscht. Weil man nun erhält:

$$\delta p = \frac{dx\,\delta dy - dy\,\delta dx}{dx^2},$$

so wird sich durch die Umwandlung, die wir früher bewiesen haben, ergeben:

$$\delta p = \frac{dx\,d\delta y - dy\,d\delta x}{dx^2},$$

und da hier δx und δy die Variationen von x und y sind, und demnach $\delta x + d\delta x$ und $\delta y + d\delta y$ die Variationen von $x + dx$ und $y + dy$ bezeichnen, so ist zu bemerken, daß, wie wir bereits angeführt haben:

$$d\delta x = \delta(x + dx) - \delta x \quad \text{und} \quad d\delta y = \delta(y + dy) - \delta y$$

seyn werde. Dasselbe Resultat findet man nach den ersten Principien,

denn da der variirte Werth $p + \delta p$ ist, und dieser zum Vorschein kommt, wenn für x und y ihre variirten Werthe, nämlich $x + \delta x$ und $y + \delta y$ gesetzt werden, so wird man erhalten:

$$p + \delta p = \frac{d(y + \delta y)}{d(x + \delta x)} = \frac{dy + d\delta y}{dx + d\delta x},$$

und daher wird, weil $p = \frac{dy}{dx}$ ist:

$$\delta p = \delta \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy + d\delta y}{dx + d\delta x} - \frac{dy}{dx} = \frac{dx\,d\delta y - dy\,d\delta x}{dx^2},$$

weil im Nenner die Größe $dx\,d\delta x$ gegen dx^2 verschwindet.

Zusatz 1.

§. 46. Wenn wir bey unserem Fortschreiten mittelst Differenzialien die ohne Ende vermehrten Veränderlichen x und y durch x', x'', x''', ... und y', y'', y''', ... bezeichnen, so daß

$$x' = x + dx \quad \text{und} \quad y' = y + dy$$

wird, so finden wir

$$d\delta x = \delta x' - \delta x \quad \text{und} \quad d\delta y = \delta y' - \delta y,$$

und daher wird

$$\delta p = \delta \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dx\,(\delta y' - \delta y) - dy\,(\delta x' - \delta x)}{dx^2}.$$

Zusatz 2.

§. 47. Weil die Variationen der beyden Veränderlichen x und y keineswegs von einander abhängen, sondern ganz unserer Willkür überlassen sind, so wird, wenn wir der Größe x keine Variationen beylegen, so daß

$$\delta x = 0 \quad \text{und} \quad \delta x' = 0$$

wird, die Gleichung zum Vorschein kommen:

$$\delta p = \frac{d\delta y}{dx} = \frac{\delta y' - \delta y}{dx}.$$

Zusatz 3.

§. 48. Wenn wir bloß der einzigen Veränderlichen y eine Variation δy beylegen, so daß $\delta y' = 0$ ist, so wird $\delta p = -\frac{\delta y}{dx}$, welche Voraussetzung keineswegs der Natur der Sache widerspricht, weil man eine der Hauptcurve nächstgelegene, mit ihr so übereinstim-

mende krumme Linie annehmen kann, daß sie von jener nur in einem einzigen Puncte abweicht.

Anmerkung.

§. 49. Gewöhnlich pflegt man bey der Auflösung der isoperimetrischen und anderer zu dieser Gattung gehöriger Probleme die variirte Curve so übereinstimmend anzunehmen, daß sie gleichsam nur in einem einzigen Elemente abweicht. Wenn z. B. eine krumme Linie EF (Fig. 5), welcher ein größter oder kleinster Werth zukommt, zu suchen ist, so überträgt man gewöhnlich einen einzigen Punct Y auf den nächsten Punct y, damit die variirte Curve EMyY′F bloß in dem äußerst kleinen Intervalle MY′ von der gesuchten Linie abweicht, so daß, wenn man

$$AX = x \quad \text{und} \quad XY = y$$

setzt, für die variirte Curve

$$Ax = x + \delta x \quad \text{und} \quad xy = y + \delta y \quad \text{oder}$$
$$\delta x = Ax - AX \quad \text{und} \quad \delta y = xy - XY$$

erhalten wird, für die folgenden Puncte aber, auf welche die Differenzialien leiten, durchaus

$$\delta x' = 0, \quad \delta y' = 0, \quad \delta x'' = 0, \quad \delta y'' = 0, \quad \text{etc.}$$

und eben so für die vorhergehenden Puncte. Ja man läßt auch wegen der Bequemlichkeit im Rechnen die Variation $Xx = \delta x$ gewöhnlich verschwinden, damit sich die ganze Änderung auf das Element δy allein bezieht, in welchem Falle man ebenfalls $\delta p = -\frac{\delta y}{dx}$ erhält, und diese einzige Änderung ist auch hinreichend, um die Probleme dieser Art, die übrigens schon behandelt worden sind, aufzulösen. Wenn wir aber, unserem gegenwärtigen Zwecke gemäß, diese Aufgaben weiter ausdehnen, damit die gesuchte Curve in der Gegend ihres Anfanges und Endes gewisser Bestimmungen fähig wird, so ist es allerdings nöthig, die Variationsrechnung so allgemein als möglich durchzuführen, und den Coordinaten in allen Puncten der Curve unbestimmte Variationen beyzulegen. Dieß ist auch vorzüglich nöthig, wenn wir derley Untersuchungen mit krummen Linien, welche nicht an das Gesetz der Stätigkeit gebunden sind, vornehmen wollen.

Aufgabe 2.

§. 50. Wenn die Variationen δx und δy der bey-

den Veränderlichen x und y gegeben sind, und

$$dy = pdx \quad \text{und} \quad dp = qdx$$

gesetzt wird, die Variation der Größe q, oder den Werth von δq zu finden.

Auflösung.

Da $q = \frac{dp}{dx}$ ist, so wird man für den variirten Werth haben:

$$q + \delta q = \frac{d(p + \delta p)}{d(x + \delta x)} = \frac{dp + d\delta p}{dx + d\delta x},$$

und zieht man hiervon die Größe q ab, so bleibt

$$\delta q = \frac{dx d\delta p - dp d\delta x}{dx^2},$$

und diese Variation entsteht also auch durch Differenziation der Formel $q = \frac{dp}{dx}$, wenn man auf gewöhnliche Art differenzirt, und statt des Differenzialzeichens d das Variationszeichen δ setzt, wobey es gut seyn wird, sich zu erinnern, daß

$$\delta dx = d\delta x \quad \text{und} \quad \delta dp = d\delta p$$

sey. Wir haben aber oben gefunden, daß wegen $p = \frac{dy}{dx}$ die Gleichung Statt finde:

$$\delta p = \frac{dx d\delta y - dy d\delta x}{dx^2},$$

woraus sich ferner mittelst der gewöhnlichen Differenziation der Werth von $d\delta p$, nämlich das Differenziale von δp ergibt.

Zusatz 1.

§. 51. Da $\frac{dy}{dx} = p$ und $\frac{dp}{dx} = q$ ist, so erhält man zuerst

$$\delta p = \frac{d\delta y}{dx} - \frac{p d\delta x}{dx},$$

dann aber

$$\delta q = \frac{d\delta p}{dx} - \frac{q d\delta x}{dx}.$$

Für den künftigen Gebrauch aber ist es besser, hier den Theil $d\delta p$ wegzulassen, als den Werth desselben aus der vorhergehenden Formel zu entwickeln.

Zusatz 2.

§. 52. Da indessen der erstere Ausdruck durch Differenziation die Gleichung

$$d\delta p = \frac{d^2\delta y}{dx} - \frac{d^2x\,d\delta y}{dx^2} - \frac{p\,d^2\delta x}{dx} - q\,d\delta x + \frac{p\,d^2x\,d\delta x}{dx^2}$$

gibt, so erhält man durch Substitution dieses Werthes

$$\delta q = \frac{d^2\delta y}{dx^2} - \frac{d^2x\,d\delta y}{dx^3} - \frac{p\,d^2\delta x}{dx^2} - \frac{2q\,d\delta x}{dx} + \frac{p\,d^2x\,d\delta x}{dx^3}.$$

Zusatz 3.

§. 53. Wenn wir bloß der Veränderlichen y Variationen beylegen, so daß die Änderungen δx und die daraus abgeleiteten Theilchen verschwinden, so werden wir finden:

$$\delta p = \frac{d\delta y}{dx} \quad \text{und} \quad \delta q = \frac{d\delta p}{dx} = \frac{d^2\delta y}{dx^2} - \frac{d^2x\,d\delta y}{dx^3},$$

und wenn man das Differenziale dx constant nimmt, so wird

$$\delta q = \frac{d^2\delta y}{dx^2}.$$

Anmerkung 1.

§. 54. Um das Gesagte leichter einzusehen, wollen wir in der Curve EF (Fig. 5) mittelst der zwischen den Veränderlichen $AX = x$ und $XY = y$ bestehenden Relation mehrere Puncte Y, Y′, Y″, ꝛc., die nach den Differenzialien immer fortgerückt werden, betrachten, so daß

$$AX = x;\quad AX' = x + dx;\quad AX'' = x + 2dx + d^2x;$$
$$AX''' = x + 3dx + 3d^2x + d^3x;$$
$$XY = y;\quad X'Y' = y + dy;\quad X''Y'' = y + 2dy + d^2y;$$
$$X'''Y''' = y + 3dy + 3d^2y + d^3y$$

wird, und diese Ausdrücke, welche Differenzialien irgend einer Ordnung bezeichnen, wollen wir Kürze halber auf folgende Art darstellen:

$$AX = x;\quad AX' = x';\quad AX'' = x'';\quad AX''' = x''';\ \text{ꝛc.}$$
$$XY = y;\quad X'Y' = y';\quad X''Y'' = y'';\quad X'''Y''' = y''';\ \text{ꝛc.}$$

Allen diesen Größen muß man ihre eigenthümlichen, von einander ganz unabhängigen Variationen beygelegt denken, so daß alle Variationen

$$\delta x;\quad \delta x';\quad \delta x'';\quad \delta x''';\ \text{ꝛc.}$$
$$\delta y;\quad \delta y';\quad \delta y'';\quad \delta y''';\ \text{ꝛc.}$$

die ganz von unserer Willkür abhängen, gleichsam als bekannt angesehen werden können. Nach diesen getroffenen Anordnungen werden nun die Differenzialien jeder Ordnung von den Variationen so dargestellt werden, daß man erhält:

$$d\delta x = \delta x' - \delta x;\quad d^2\delta x = \delta x'' - 2\delta x' + \delta x;$$
$$d^3\delta x = \delta x''' - 3\delta x'' + 3\delta x' - \delta x;$$
$$d\delta y = \delta y' - \delta y;\quad d^2\delta y = \delta y'' - 2\delta y' + \delta y;$$
$$d^3\delta y = \delta y''' - 3\delta y'' + 3\delta y' - \delta y.$$

Nehmen wir nun an, daß bloß ein einziger Punct Y der Curve variirt werde, so werden wir finden:

$$d\delta x = -\delta x;\quad d^2\delta x = +\delta x;\quad d^3\delta x = -\delta x;\ \text{rc.}$$
$$d\delta y = -\delta y;\quad d^2\delta y = +\delta y;\quad d^3\delta y = -\delta y;\ \text{rc.}$$

und daher

$$\delta p = -\frac{\delta y}{dx} + \frac{p\,\delta x}{dx} \quad \text{und}$$

$$\delta q = \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^2 x\,\delta y}{dx^3} - \frac{p\,\delta x}{dx^2} + \frac{2q\,\delta x}{dx} - \frac{p\,d^2 x\,\delta x}{dx^3},$$

wobey, wenn die Theile, welche gegen die übrigen verschwinden, weggelassen werden,

$$\delta q = \delta y \cdot \frac{1}{dx^2} - \delta x \cdot \frac{p}{dx^2}$$

seyn wird. Lassen wir endlich bloß die Ordinate $XY = y$ variiren, so wird man finden:

$$\delta p = -\frac{1}{dx} \cdot \delta y \quad \text{und} \quad \delta q = \frac{1}{dx^2} \cdot \delta y.$$

Anmerkung 2.

§. 55. Hieraus geht nun hervor, daß, wenn wir die Variation bloß in einem einzigen Puncte der Curve annehmen, wir gegen die einmahl festgesetzten Principien der Differenzialien sehr grob verstoßen würden, indem die höhern Differenzialien der Variationen keineswegs gegen die niedrigern verschwinden, sondern beständig denselben Werth behalten, und die Variationen der Größen p und q sogar ins Unendliche fortwachsen, wenn die unendlich kleinen Größen δx und δy von derselben Ordnung genommen werden, von welcher die Differenzialien dx und dy sind. Ja man muß sich bey der Rechnung auch sehr sorgfältig hüten, außerordentliche Fehler zu begehen, indem sich die Vorschriften des Calcüls auf das Gesetz der Stätigkeit gründen, ver-

möge welcher die krummen Linien durch eine ununterbrochene Bewegung eines Punctes beschrieben gedacht werden, so daß in der Krümmung derselben durchaus kein Sprung zu bemerken ist. Wenn man aber einen einzigen Punct Y der Curve nach y (Fig. 5) verlegt, während man die übrigen Theile der Curve, mit Ausnahme der Elemente My und yY' unverändert läßt, so ist einleuchtend, daß die Krümmung außerordentlich unregelmäßig werde, indem die gewöhnlichen Regeln der Rechnung sich weiter nicht mehr anwenden lassen. Das sicherste Mittel zur Beseitigung dieser Unbequemlichkeit besteht darin, daß man allen einzelnen Puncten der Curve in Gedanken wenigstens ihre Variationen beylegt, damit sie durch irgend ein Gesetz der Stätigkeit zusammenhängen, und damit die Unregelmäßigkeit in der Rechnung nicht eher gestattet wird, als bis alle Differenziationen und Integrationen ausgeführt sind, und auf diese Weise die Continuität wenigstens scheinbar in der Rechnung beybehalten wird; obgleich man also die Differenzialien der Variationen, nämlich:

$$d\delta y,\quad d^2\delta y,\quad d^3\delta y,\ \text{ꝛc. und eben so}$$
$$d\delta x,\quad d^2\delta x,\quad d^3\delta x\ \text{ꝛc.}$$

bey der gemachten Voraussetzung auf einfache Variationen zurückführen kann, so ist es dennoch gut, jene Ausdrücke in der Rechnung beyzubehalten, und auf dieselben die folgenden Integrationen anzupassen, worauf auch jene Operationen hinausgehen, welche ich einst bey der Gelegenheit, wo ich denselben Gegenstand rücksichtlich der Auffindung krummer Linien, denen die Eigenschaft eines Maximums oder Minimums zukommt, behandelt habe, auszuführen lehrte.

Aufgabe 3.

§. 56. Wenn die Variationen δx und δy der beyden Veränderlichen x und y gegeben sind, die Variationen der Verhältnisse zwischen den Differenzialien von was immer für einem Grade aufzusuchen.

Auflösung.

Es handelt sich hier darum, die Variationen der Größen p, q, r, s, ꝛc. anzugeben, wenn immer

$$dy = p\,dx,\quad dp = q\,dx,\quad dq = r\,dx,\quad dr = s\,dx,\ \text{ꝛc.}$$

gesetzt wird, indem sich auf diese Größen alle Verhältnisse der Diffe-

renzialien irgend einer Ordnung zurückführen lassen, und diese sind durch endliche Werthe ausgedrückt. Von den beyden ersten p und q derselben haben wir bereits gesehen, daß

$$\delta p = \frac{d\delta y}{dx} - \frac{p\,d\delta x}{dx} \text{ und } \delta q = \frac{d\delta p}{dx} - \frac{q\,d\delta x}{dx}.$$

Weil ferner

$$r = \frac{dq}{dx} \text{ und } s = \frac{dr}{dx}, \text{ ꝛc.}$$

ist, so werden die Variationen dieser Ausdrücke auf ähnliche Art nach den Differenziationsregeln gefunden:

$$\delta r = \frac{d\delta q}{dx} - \frac{r\,d\delta x}{dx};\quad \delta s = \frac{d\delta r}{dx} - \frac{s\,d\delta x}{dx} \text{ ꝛc.},$$

wo man, wenn man will, statt $d\delta p$, $d\delta q$, $d\delta r$, ꝛc. die Differenzialien der früher gefundenen Variationen δp, δq, δr, ꝛc. substituiren kann. Dieß würde aber nicht allein auf zu weitläufige Formeln führen, sondern ist auch, wie aus dem Folgenden erhellen wird, nicht einmahl nöthig, indem alle Reductionen, die etwa erforderlich seyn werden, weit leichter ausgeführt werden können.

Zusatz 1.

§. 57. Wenn man bloß der Veränderlichen z Variationen beylegt, oder, wenn bloß die Ordinaten y um ihre Variationen wachsen, während die Abscissen x unverändert bleiben, so erhalten wir:

$$\delta p = \frac{d\delta y}{dx};\quad \delta q = \frac{d\delta p}{dx};\quad \delta r = \frac{d\delta q}{dx};\quad \delta s = \frac{d\delta r}{dx}.$$

Zusatz 2.

§. 58. Werden überdieß alle Incremente von x einander gleich gesetzt, oder wird das Element dx constant genommen, und man substituirt die Differenzialien der vorhergehenden Ausdrücke in den nachfolgenden, so wird man erhalten:

$$\delta p = \frac{d\delta y}{dx};\quad \delta q = \frac{d^2\delta y}{dx^2};\quad \delta r = \frac{d^3\delta y}{dx^3};\quad \delta s = \frac{d^4\delta y}{dx^4};\ \text{ꝛc.}$$

Zusatz 3.

§. 59. Legt man bloß den Abscissen x Variationen bey, so daß die Variation δy mit allen abgeleiteten verschwindet, und nimmt man zugleich das Element dx constant, so werden sich diese einzelnen Variationen auf folgende Art darstellen:

$$\delta p = \frac{-p d\delta x}{dx}; \quad \delta q = \frac{-p d^2\delta x}{dx^2} - \frac{2 q d\delta x}{dx}$$

$$\delta r = \frac{-p d^3\delta x}{dx^3} - \frac{3 q d^2\delta x}{dx^2} - \frac{3 r d\delta x}{dx}$$

$$\delta s = \frac{-p d^4\delta x}{dx^4} - \frac{4 q d^3\delta x}{dx^3} - \frac{6 r d^2\delta x}{dx^2} - \frac{4 s d\delta x}{dx}$$

ꝛc.

Zusatz 4.

§ 60. Obgleich also in diesem Falle das Element dx constant genommen wird, so erscheinen dennoch hier Differenzialien jeder Ordnung von der Variation δx, und der Grund hiervon liegt darin, daß wir annehmen, die Variationen der Werthe x', x'', ꝛc. von x, die immer weiter fortrücken, seyen von den Differenzialien unabhängig.

Anmerkung.

§. 61. Wenn man aber bloß der Veränderlichen x Variationen beylegen will, dann ist es allerdings besser, die Veränderlichen x und y mit einander zu vertauschen, und sich lieber der Annahmen

$$dx = p dy, \quad dp = q dy, \quad dq = r dy, \text{ ꝛc.}$$

zu bedienen, damit dadurch die Form der Differenzialien beseitigt wird, dann aber findet man, wenn das Element dy constant genommen wird, für die Variationen der Größen p, q, r, ꝛc. ähnliche einfachere Ausdrücke, wie im Zusatz 2. Um übrigens die Rechnung auf alle Fälle anwenden zu können, ist es immer vortheilhaft, jeder der beyden Veränderlichen ihre eignen Variationen beyzulegen; denn, obgleich dann weit verwickeltere Ausdrücke zum Vorschein kommen, besonders wenn sie entwickelt werden, so biethen sich dennoch, wenn man die Rechnung weiter verfolgt, so schöne Abkürzungen dar, daß die Rechnung am Ende kaum mühsamer wird, und man diese Weitläufigkeit nicht zu bereuen hat. Ich gehe nun zu den allgemeinen Problemen über, die in dieses Kapitel gehören.

Aufgabe 4.

§. 62. Die Variationen δx und δy der beyden Veränderlichen x und y seyen gegeben; man suche die Variation irgend eines endlichen Ausdruckes V, der sowohl aus jenen Veränderlichen, als auch aus ihren Differenzialien jeder Ordnung zusammengesetzt ist.

Auflösung.

Da V eine Größe bezeichnet, die einen endlichen Werth hat, so werden durch die Substitution

$$dy = pdx, \quad dp = qdx, \quad dq = rdx, \quad dr = sdx, \quad \text{ꝛc.}$$

die Differenzialien daraus wegfallen, und es wird für V eine aus den endlichen Größen x, y, p, q, r, s, ꝛc. gebildete Function zum Vorschein kommen. Wie also auch dieser Ausdruck zusammengesetzt seyn mag, so wird sein Differenziale immer folgende Form haben:

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + \text{ꝛc.}$$

Die Anzahl der Glieder dieses Ausdruckes ist um so größer, je höhere Differenzialien in der Größe V erscheinen. Wenn nun aber die Variation δV dieses Ausdruckes V aufzusuchen ist, so wird dieselbe erhalten, wenn statt der veränderlichen Größen x, y, p, q, r, ꝛc. dieselben um ihre Variationen vermehrten Größen substituirt werden, und von dem Resultate die Größe V selbst abgezogen wird, woraus hervorgeht, daß die Variation mit Hülfe der gewöhnlichen Differenziation gefunden werde, wenn man bloß das Differenzialzeichen d in das Variationszeichen δ verwandelt. Da nun das Differenziale oben bereits dargestellt worden ist, so werden wir für die gesuchte Variation erhalten:

$$\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + S\delta s + \text{ꝛc.},$$

und es ist schon oben gezeigt worden, wie die Variationen δp, δq, δr, δs, ꝛc. durch die gegebenen Variationen δx und δy bestimmt werden.

Zusatz 1.

§. 63. Wenn wir hier die früher gefundenen Werthe substituiren, so erhalten wir die gesuchte Variation unter folgender Form:

$$\delta V = M\delta x + N\delta y + \frac{1}{dx}(Pd\delta y + Qd\delta p + Rd\delta q + Sd\delta r + \text{ꝛc.})$$
$$- d\frac{\delta x}{dx}(Pp + Qq + Rr + Ss + \text{ꝛc.})$$

Zusatz 2.

§. 64. Wenn wir der Veränderlichen x keine Variation beylegen und überdieß das Element dx constant setzen, so ergibt sich für die Variation der gegebenen Größe V nachstehender Ausdruck:

$$\delta V = N\delta y + \frac{Pd\delta y}{dx} + \frac{Qd^2\delta y}{dx^2} + \frac{Rd^3\delta y}{dx^3} + \frac{Sd^4\delta y}{dx^4} + \text{ꝛc.}$$

Anmerkung.

§. 65. Bey diesen Ausdrücken erblickt man wenigstens scheinbar die Homogeneität in den Differenzialien, wenn wir δx und δy auf die Ordnung der Differenzialien beziehen. Dieß würde ganz anders seyn, wenn wir in dem Falle, in welchem nur ein einziger Punct der Curve variirt, statt der Differenzialien der Variationen sogleich die oben (§. 54) dargestellten Werthe substituiren wollten, wo dann an eine Integration, welche diese Ausdrücke ferner erforderten, nicht zu denken wäre. Übrigens ist klar, wie die Auffindung der Variationen auf die gewöhnliche Differenziation zurückgeführt werde, indem der ganze Unterschied bloß darin besteht, daß man statt der Variationen δp, δq, δr, 2c. die schon früher angezeigten Werthe substituirt, die wir aber auch durch die gewöhnliche Differenziation entwickelt haben. Es wird aber gut seyn, diese Rechnung durch einige Beyspiele zu erläutern, damit man die Natur dieser ganzen Abhandlung deutlicher erkenne.

Beyspiel 1.

§. 66. Die Variation der Formel $\frac{y\,dx}{dy}$, welche eine Subtangente bezeichnet, zu finden.

Weil $dy = p\,dx$ ist, so geht diese Formel über in $\frac{y}{p}$, und daher ist die Variation derselben $\frac{\delta y}{p} - \frac{y\,\delta p}{p^2}$, und wenn man hier statt δp den Werth substituirt, so geht dieselbe über in

$$\frac{\delta y}{p} - \frac{y\,d\delta y}{p^2\,dx} + \frac{y\,d\delta x}{p\,dx} = \frac{dx}{dy}\,\delta y - \frac{y\,dx}{dy^2}\,d\delta y + \frac{y}{dy}\,d\delta x,$$

und dieser letztere Ausdruck entsteht auch unmittelbar durch Differenziation der vorgelegten Formel.

Beyspiel 2.

§. 67. Die Variation der Formel $\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$, welche eine Tangente bezeichnet, zu finden.

Setzt man $dy = p\,dx$, so ergibt sich der endliche Ausdruck $\frac{y}{p}\sqrt{1 + p^2}$, und die gesuchte Variation ist:

$$\frac{\delta y}{p}\sqrt{1 + p^2} - \frac{y\,\delta p}{p^2\sqrt{1 + p^2}},$$

welche in folgende Form übergeht:

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}\,\delta y - \frac{y\,dx}{dy^2\sqrt{dx^2 + dy^2}}\,(dx\,d\delta y - dy\,d\delta x).$$

Beyspiel 3.

§. 68. Man suche die Variation des Ausdruckes $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y}$, welcher den Krümmungshalbmesser bezeichnet.

Wird $dy = p\,dx$ und $dp = q\,dx$ gesetzt, so geht dieser Ausdruck über in $\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$, und die Variation desselben ist:

$$\frac{3p\,\delta p}{q}\sqrt{1 + p^2} - \frac{\delta q}{q^2}(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}$$

und wir wollen uns hier bey der Substitution der früher gefundenen Werthe nicht aufhalten.

Aufgabe 5.

§. 69. Wenn die Variationen δx und δy der beyden veränderlichen Größen x und y gegeben sind, die Variation eines sowohl aus diesen Veränderlichen, als aus ihren Differenzialien jeder Ordnung gebildeten Ausdruckes, mag dieser unendlich groß oder unendlich klein seyn, zu finden.

Auflösung.

Setzen wir wie bisher $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$, $dq = r\,dx$, ꝛc. so wird sich dieser Ausdruck immer zurückführen lassen auf die Form $V\,dx^n$, wo V eine endliche Function der Größen x, y, p, q, r, ꝛc. der Exponent n aber eine positive oder eine negative Zahl bezeichnen mag, so daß im erstern Falle der Ausdruck unendlich klein, im letztern aber unendlich groß wird. Setzen wir also, die gewöhnliche Differenziation gebe

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{ꝛc.},$$

woraus sogleich die Variation von V erhalten wird. Da also die Variation des vorgelegten Ausdruckes

$$= nV\,dx^{n-1}\,d\delta x + dx^n\,\delta V.$$

ist, so wird auch die gesuchte Variation seyn:

$nV dx^{n-1} d\delta x + dx^n (M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r +$

wo man nach dem Vorhergehenden folgende Werth: substituiren

$$\delta p = \frac{d\delta y - p d\delta x}{dx}; \quad \delta q = \frac{d\delta p - q d\delta x}{dx}$$

$$\delta r = \frac{d\delta q - r d\delta x}{dx}; \quad \delta s = \frac{d\delta r - s d\delta x}{dx}.$$

ꝛc.

Da dieß für sich klar ist, so ist auch eine weitere Ausfüh überflüssig, und wir können zugleich dieses Kapitel als ganz bee betrachten.

Kapitel III.

on der Variation der einfachen Integralformeln, welche zwey Veränderliche enthalten.

Erklärung 6.

§. 70. Ich nenne hier einen Integralausdruck nfach, wenn er keine andern Integralien enthält, ndern schlechtweg das Integrale einer Differenzialrmel darstellt, welche nebst den beyden Veränderchen was immer für Differenzialien derselben thält.

Zusatz 1.

§. 71. Wenn also x und y die beyden Veränderlichen sind, so d die Integralformel $\int W$ eine einfache seyn, wenn der Ausdruck außer diesen Variablen bloß Differenzialien derselben, von welcher dnung diese auch seyn mögen, und keine andern Integralformeln hält.

Zusatz 2.

§. 72. Setzen wir also

$$dy = p\,dx, \quad dp = q\,dx, \quad dq = r\,dx, \text{ rc.},$$

it die Differenzialien wegfallen, so wird, weil die Integration eine ferenzialformel erfordert, jener Ausdruck W immer auf die Form x, wobey V eine Function der Größen $x, y, p, q,$ rc. bezeich-, zurückgeführt werden können.

Zusatz 3.

§. 73. Da also die einfache Integralformel die Form $\int V\,dx$, wobey V eine Function der Größen $x, y, p, q, r,$ rc. ist, so d das Differenziale derselben sehr bequem die Natur desselben daren, wenn wir sagen, daß

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{rc.}$$

Anmerkung.

§ 74. Ich unterscheide hier die einfachen Integralformeln von den zusammengesetzten, bey welchen man solche Differenzialformeln, welche selbst schon eine oder mehrere Integralausdrücke enthalten, zu integriren hat. Wenn z. B. der Buchstabe s das Integrale

$$\int\sqrt{dx^2 + dy^2} = \int dx\sqrt{1 + p^2}$$

bezeichnet, und die Größe V außer jenen Größen auch noch s enthält, so wird die Integralformel $\int V\,dx$ mit Recht für verwickelt gehalten werden, und die Variation derselben erfordert besondere Vorschriften, die wir später auseinander setzen müssen. In diesem Kapitel habe ich mir vorgenommen, zuerst die Methode zu lehren, die Variationen der einfachen Integralformeln aufzufinden.

Lehrsatz 2.

§. 75. **Die Variation der Integralformel $\int W$ ist immer gleich dem Integrale der Variation desselben Differenzialausdrucks, dessen Integrale gegeben ist, oder es ist**

$$\delta\int W = \int\delta W.$$

Beweis.

Da die Variation der Überschuß ist, um welchen der geänderte Werth irgend einer Größe den natürlichen Werth übertrifft, so wollen wir den geänderten Werth in Erwägung ziehen, welchen der vorgelegte Ausdruck $\int W$ erhält, wenn man statt der Veränderlichen x und y die um ihre Variationen δx und δy vermehrten Werthe derselben substituirt. Da aber dann die Größe W in $W + \delta W$ übergeht, so wird der geänderte Werth des vorgelegten Ausdruckes seyn:

$$\int(W + \delta W) = \int W + \int\delta W,$$

und da

$$\delta\int W = \int(W + \delta W) - \int W$$

ist, so werden wir hieraus erhalten:

$$\delta\int W = \int\delta W,$$

woraus man sieht, daß die Variation des Integrals dem Integrale der Variation gleich sey.

Dasselbe läßt sich auch auf folgende Art zeigen. Man setze $\int W = w$, so daß man die Variation δw zu suchen hat; weil nun

w = W ist, wenn die Differenzialien genommen werden, so suche
in nun die Variationen, und man wird erhalten:

$$\delta d w = \delta W = d \delta w,$$

il $\delta d w = d \delta w$ ist. Integrirt man aber die Gleichung $d \delta w = \delta W$
n Neuem, so ergibt sich

$$\delta w = \int \delta W = \delta \int W.$$

Zusatz 1.

§. 76. Wird also die Integralformel $\int V d x$ gegeben, so wird
e Variation seyn:

$$\delta \int V d x = \int \delta (V d x) = \int (V \delta d x + d x \delta V),$$

d weil $\delta d x = d \delta x$ ist, so wird man haben:

$$\delta \int V d x = \int V d \delta x + \int d x \delta V.$$

Zusatz 2.

§. 77. Wird $\delta x = \omega$, so daß $d \delta x = d \omega$ ist, so wird, weil

$$\int V d \omega = V \omega - \int \omega d V,$$

dem ersteren Gliede das Differenziale der Variation $d x$ weggeschafft,
d man erhält:

$$\delta \int V d x = V d x - \int d V \delta x + \int d x \delta V;$$

der erste Theil von der Integration frey ist.

Anmerkung.

§. 78. So wie wir oben gezeigt haben, daß die Differenziations-
hen d mit den Variationszeichen δ, welche irgend einem Ausdrucke
gesetzt sind, nach Belieben unter einander vertauscht werden können,
ehen wir nun auch, daß das Integrationszeichen $\int$ mit dem Varia-
nszeichen δ verwechselt werden könne, indem

$$\delta \int W = \int \delta W$$

Dieß erstreckt sich aber auch auf die wiederholte Integration, so
t, wenn ein Ausdruck von der Form $\int \int W$ gegeben wird, ihre Va-
tion auf folgende Arten dargestellt werden könne:

$$\delta \int \int W = \int \delta \int W = \int \int \delta W,$$

daß daher die Variation der Integralformeln auf Variationen
her Ausdrücke zurückgeführt werde, welche weiter keine Integratio-

nen enthalten. Zur Auffindung dieser Variationen sind bereits oben die Vorschriften gelehrt worden.

Aufgabe 6.

§. 79. Die Variation der Integralformel $\int V dx$ zu finden, wenn die Variation δx und δy der beyden Veränderlichen x und y gegeben sind, und wenn V irgend eine Function der Größen $x, y, p, q, r,$ etc. ist, wobey

$$dy = p dx, \quad dp = q dx, \quad dq = r dx, \text{ etc.}$$

gesetzt wird.

Auflösung.

Wir haben so eben (§. 77) gesehen, daß die Variation dieser Integralformel auf folgende Art ausgedrückt werden könne:

$$\delta \int V dx = V \delta x - \int d V \delta x + \int dx \delta V.$$

Da nun V eine Function der Größen x, y, p, q, r ist, so setzen wir, um die Variation δV wegzuschaffen, das Differenziale derselben sey:

$$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}$$

und auf ähnliche Art wird sich auch die Variation derselben durch folgenden Ausdruck darstellen:

$$\delta V = M \delta x + N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \ldots;$$

werden diese Werthe substituirt, so erhalten wir für die gesuchte Variation:

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int dx (M \delta x + N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \ldots) - \int \delta x (M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \ldots)$$

Da hier die von M abhängigen Theile wegfallen, so wird, wenn die einzelnen Theile nach den Größen N, P, Q, R abgesondert werden, die Variation seyn:

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int N (dx \delta y - dy \delta x) + \int P (dx \delta p - dp \delta x) + \int Q (dx \delta q - dq \delta x) + \int R (dx \delta r - dr \delta x) \text{ etc.}$$

und hier ist, wie wir bereits früher gefunden haben:

$$dx \delta p = d \delta y - p d \delta x; \quad dx \delta q = d \delta p - q d \delta x; \quad dx \delta r = d \delta q - r d \delta x \text{ etc.}$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man, weil $dy = p\,dx$ ist:

$$\int V\,dx = V\delta x + \int N\,dx\,(\delta y - p\,\delta x) + \int P\,d.(\delta y - p\,\delta x)$$
$$+ \int Q\,d.(\delta p - q\,\delta x) + \int R\,d.(\delta q - r\,\delta x).$$

ꝛc.

Um diesen Ausdruck nun weiter zu reduciren, bemerke man, daß

$$\delta p - q\,\delta x = \frac{d\delta y - p\,d\delta x - dp\,\delta x}{dx} = \frac{d.(\delta y - p\,\delta x)}{dx}$$

$$\delta q - r\,\delta x = \frac{d\delta p - q\,d\delta x - dq\,\delta x}{dx} = \frac{d.(\delta p - q\,\delta x)}{dx}$$

$$\delta r - s\,\delta x = \frac{d\delta q - r\,d\delta x - dr\,\delta x}{dx} = \frac{d.(\delta q - r\,\delta x)}{dx}$$

ꝛc.

t; auf diese Art wird jede Formel auf die vorhergehende zurückgeführt, nd wenn wir Kürze halber $\delta y - p\,\delta x = \omega$ setzen, so finden wir achstehende Ausdrücke:

$$\delta y - p\,\delta x = \omega$$

$$\delta p - q\,\delta x = \frac{d\omega}{dx}$$

$$\delta q - r\,\delta x = \frac{1}{dx}\,d.\frac{d\omega}{dx}$$

$$\delta r - s\,\delta x = \frac{1}{dx}\,d.\frac{1}{dx}\,d.\frac{d\omega}{dx}$$

ꝛc.

nd wenn wir die Variationen der abgeleiteten Größen p, q, r, ꝛc. y der Rechnung ausschließen, so erhalten wir für die gesuchte ariation:

$$\int V\,dx = V\delta x + \int N\,dx\,\omega + \int P\,d\omega + \int Q\,d.\frac{d\omega}{dx}$$
$$+ \int R\,d.\frac{1}{dx}\,d.\frac{d\omega}{dx} + \int S\,d.\frac{1}{dx}\,d.\frac{1}{dx}\,d.\frac{d\omega}{dx}$$
$$+ \int T\,d.\frac{1}{dx}\,d.\frac{1}{dx}\,d.\frac{1}{dx}\,d.\frac{d\omega}{dx}$$

ꝛc.

Das Gesetz des weitern Fortgangs dieser Formel ist klar, von lchem Grade auch die Differenzialien in dem Ausdrucke V erscheinen gen.

Zusatz 1.

§. 80. Der erste Theil $V\delta x$ dieser Variation enthält also kein

Integralzeichen, und hat sogar bloß die Variation δx, die übrigen Theile aber enthalten immer beyde auf dieselbe Art vereint, und zwar in der Größe

$$\omega = \delta y - p\delta x.$$

Zusatz 2.

§. 81. Der zweyte Theil

$$\int N dx . \omega = \int N \omega dx$$

kann nicht bequemer ausgedrückt werden; der dritte Theil aber $\int P d\omega$ scheint bequemer so ausgedrückt werden zu können, daß

$$\int P d\omega = P\omega - \int \omega dP,$$

wird, und die Größe ω nun selbst nach dem Integralzeichen steht.

Zusatz 3.

§. 82. Auf ähnliche Art reducirt man den vierten Theil $\int Q d . \frac{d\omega}{dx}$ auf

$$Q \frac{d\omega}{dx} - \int dQ . \frac{d\omega}{dx},$$

und dieses letztere Glied, welches auch $= \int \frac{dQ}{dx} . d\omega$ ist, gibt ferner:

$$\frac{dQ}{dx} \omega - \int \omega d . \frac{dQ}{dx},$$

so daß nun der dritte Theil in folgende Glieder aufgelöst wird:

$$Q . \frac{d\omega}{dx} - \frac{dQ}{dx} \omega + \int \omega d . \frac{dQ}{dx}.$$

Zusatz 4.

§. 83. Der fünfte Theil

$$\int R d . \frac{1}{dx} d . \frac{d\omega}{dx}$$

wird zuerst zurückgeführt auf

$$R . \frac{1}{dx} d . \frac{d\omega}{dx} - \int \frac{dR}{dx} d . \frac{d\omega}{dx},$$

das letztere Glied aber auf

$$\frac{dR}{dx} . \frac{d\omega}{dx} - \int \frac{1}{dx} d . \frac{dR}{dx} . d\omega,$$

und dieses endlich auf

$$\frac{1}{dx} d . \frac{dR}{dx} . \omega - \int \omega d . \frac{1}{dx} d . \frac{dR}{dx};$$

so daß sich nun der fünfte Theil unter folgender Form darstellt:

$$R . \frac{1}{dx} d . \frac{d\omega}{dx} - \frac{dR}{dx} . \frac{d\omega}{dx} + \frac{1}{dx} d . \frac{dR}{dx} . \omega - \int \omega d . \frac{1}{dx} d . \frac{dR}{dx}.$$

Zusatz 5.

§. 84. Auf ähnliche Art findet man für den sechsten Theil

$$\int S d . \frac{1}{dx} d . \frac{1}{dx} d . \frac{d\omega}{dx}$$

folgenden Ausdruck:

$$S . \frac{1}{dx} d . \frac{1}{dx} d . \frac{d\omega}{dx} - \frac{dS}{dx} . \frac{1}{dx} d . \frac{d\omega}{dx} + \frac{1}{dx} d . \frac{dS}{dx} . \frac{d\omega}{dx}$$
$$- \frac{1}{dx} d . \frac{1}{dx} d . \frac{dS}{dx} \omega + \int \omega d . \frac{1}{dx} d . \frac{1}{dx} d . \frac{dS}{dx}.$$

Aufgabe 7.

§. 85. Wenn $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$, $dr = sdx$, 2c. gesetzt wird, und wenn V irgend eine Function der Größen x, y, p, q, r, s, u. s. w. bezeichnet, so daß

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + \ldots$$

wird, die durch die Variation der beyden Veränderlichen x und y entstandene Variation der Integralformel $\int V dx$ so auszudrücken, daß nach dem Integralzeichen keine Differenzialien von Variationen erscheinen.

Auflösung.

Wir haben bereits in den Zusätzen des vorhergehenden Problemes zu diesem Zwecke alles so vorbereitet, daß nun weiter nichts nöthig ist, als die Transformationen der einzelnen Theile zu ordnen, wodurch Glieder zweyerley Art erhalten werden; die eine hiervon enthält die Integralausdrücke, welche sich sämmtlich in eine Summe bringen lassen, die andere aber umfaßt die ganz berechneten Theile, welche wir so an einander reihen werden, daß die einzelnen Glieder nach den Variationen δx und δy und den Differenzialien jedes Grades derselben fort-

schreiten. Setzt man aber Kürze halber den Ausdruck $\delta y - p \delta x = \omega$, so wird sich die gesuchte Variation auf folgende Art darstellen:

$$\delta \int V dx = \int \omega dx \left[N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx} d . \frac{dQ}{dx} - \frac{1}{dx} d . \frac{1}{dx} d . \frac{dR}{dx} + \frac{1}{dx} d . \frac{1}{dx} d . \frac{1}{dx} d . \frac{dS}{dx} - \ldots \right]$$

$$+ V \delta x + \omega \left[P - \frac{dQ}{dx} + \frac{1}{dx} d . \frac{dR}{dx} - \frac{1}{dx} d . \frac{1}{dx} d . \frac{dS}{dx} + \ldots \right]$$

$$+ \frac{d\omega}{dx} \left[Q - \frac{dR}{dx} + \frac{1}{dx} d . \frac{dS}{dx} - \ldots \right]$$

$$+ \frac{1}{dx} d . \frac{d\omega}{dx} \left[R - \frac{dS}{dx} + \ldots \right]$$

$$+ \frac{1}{dx} d . \frac{1}{dx} d . \frac{d\omega}{dx} [S - \ldots].$$

Der bloße Anblick lehrt sogleich die Beschaffenheit dieses Ausdruckes kennen, so daß eine weitere Erläuterung ganz überflüssig ist.

Zusatz 1.

§. 86. Dieser Ausdruck erhält eine weit einfachere Form, wenn man das Element dx constant nimmt, wodurch die Allgemeinheit desselben keineswegs beeinträchtiget wird, denn man wird dann erhalten:

$$\delta \int V dx = \int \omega dx \left[N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \frac{d^4 S}{dx^4} - \ldots \right]$$

$$+ V \delta x + \omega \left[P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2 R}{dx^2} - \frac{d^3 S}{dx^3} + \ldots \right]$$

$$+ \frac{d\omega}{dx} \left[Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2 S}{dx^2} - \ldots \right]$$

$$+ \frac{d^2 \omega}{dx^2} \left[R - \frac{dS}{dx} + \ldots \right]$$

$$+ \frac{d^3 \omega}{dx^3} [S - \ldots].$$

Zusatz 2.

§. 87. Bezieht sich die Frage auf eine krumme Linie, so umfaßt der erste Theil den Werth des Integrales für die ganze Curve, vom Anfange bis zu der Gränze, wo sich die Coordinaten x und y befinden, und enthält zugleich alle Variationen, welche in den einzelnen Puncten der krummen Linie Statt fanden, während die übrigen schon ausgeführten Theile bloß durch die Variationen am Ende der Curve bestimmt werden.

Zusatz 3.

§. 88. Wenn wir eine durch die Coordinaten x und y bestimmte Curve als bekannt ansehen, und eine andere krumme Linie, welche von jener unendlich wenig abweicht, betrachten, indem wir in den einzelnen Puncten jeder der beyden Coordinaten was immer für Variationen beylegen, so zeigt der gefundene Ausdruck an, um wie viel der aus der variirten Curve abgeleitete Werth der Integralformel $\int V dx$ den aus der gegebenen Curve selbst entnommenen Werth derselben Formel übertrifft.

Zusatz 4.

§. 89. Da $\omega = \delta y - p\delta x$ ist, so ist einleuchtend, daß diese Größe ω verschwindet, wenn in den einzelnen Puncten die Variationen δx uud δy so genommen werden, daß

$$\delta y : \delta x = p : 1 = dy : dx$$

wird. In diesem Falle weicht also die variirte Curve von der gegebenen offenbar nicht ab, und die ganze Variation des Ausdruckes $\int V dx$ wird auf $V\delta x$ zurückgeführt.

Anmerkung 1.

§. 90. Diese für die Integralformel $\int V dx$ gefundene Variation gibt sogleich die Regel, welche ich einst für die Auffindung einer Curve, bey welcher der Werth eben dieses Integralausdruckes ein Größtes oder Kleinstes wird, vorgetragen habe. Jene Regel erfordert nämlich, daß der Ausdruck

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \ldots$$

gleich Null gesetzt werde. Dazu aber, daß die Variation der Formel $\int V dx$ verschwindet, wie es die Natur der größten und kleinsten Werthe erfordert, ist, wie man hier sogleich einsieht, vor allem nöthig, daß der erste Theil, der unter dem Integralzeichen erscheint, verschwindet, und daher wird

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \ldots = 0.$$

Überdieß aber muß man auch die schon berechneten Theile gleich Null setzen, wodurch die Rechnung auf beyde Gränzen der Curve angewendet wird; denn durch jene Gleichung wird die Natur der Curve selbst ausgedrückt, und da diese Gleichung wegen der höhern Diffe-

renzialien eben so viele willkürliche Constanten aufnimmt, als Integrationen vorkommen, so dienen jene ausgeführten Theile zur Bestimmung dieser unveränderlichen Größen, so daß die gesuchte Curve sowohl im Anfange als am Ende gewissen Bedingungen entspricht, und gleichsam in gegebenen krummen Linien endiget. Wenn jene Gleichung eine Differenzialgleichung der vierten oder sogar einer höhern Ordnung ist, so wächst auch die Anzahl der vollendeten Theile, wodurch der Zweck erreicht werden kann, daß sich die gesuchte Curve nicht allein in beyden Gränzen an gegebenen Linien endiget, sondern daß daselbst auch eine bestimmte Richtung, oder, wenn die Gleichung noch höhere Differenzialien enthält, sogar ein bestimmtes Gesetz für die Krümmung vorgeschrieben werden kann. Bey der Anwendung aber findet immer die herrliche Erscheinung Statt, daß die Natur der Probleme selbst solche Bedingungen enthält, denen mittelst der ausgeführten Theile sehr bequem Genüge geleistet werden kann.

Anmerkung 2.

§. 91. Was aber alles in dieser Formel, welche wir für die Variation der Integralformel $\int V dx$ gefunden haben, verborgen liegt, läßt sich bey der Anwendung derselben auf die größten und kleinsten Werthe weit lichtvoller darstellen, und ich bemerke hier nur, daß in jener Variation nothwendig ein Integraltheil erscheine. Denn da wir die Sache im weitesten Sinne genommen, und in den einzelnen Puncten der Curve jeder der beyden Veränderlichen x und y was immer für Variationen, die durch gar kein Gesetz zusammenhängen, beygelegt haben, so kann durchaus der Fall nicht eintreten, daß die der Curve in ihrer ganzen Ausdehnung zukommende Variation nicht zugleich von allen zwischenliegenden Variationen abhänge; denn werden diese anders angenommen, so muß nothwendig die Variation der ganzen Curve eine Änderung hervorbringen. Hierin unterscheidet sich hauptsächlich die Variation der Integralformeln von der Variation solcher Ausdrücke, wie wir sie im vorhergehenden Kapitel betrachtet haben, und diese ist einzig und allein abhängig von der Variation, welche den letzten Elementen beygelegt wird. Hieraus geht nun deutlich hervor, daß, wenn die Größe V zufällig so beschaffen seyn sollte, daß die Differenzialformel $V dx$ die Integration gestattet, wenn zwischen den Veränderlichen x und y keine Relation festgesetzt, und wenn der Integraltheil $\int V dx$ eine berechnete Function der Größen x, y, p, q, r, rc.

ist, dann auch die Variation desselben bloß von der Variation der äußersten Elemente abhängen könne, und daß auf diese Art der Integraltheil der Variation geradezu verschwinden müsse, woraus sich nachstehendes herrliche Theorem ergibt.

Lehrsatz 3.

§. 92. Setzt man $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$, $dr = sdx$, ꝛc., und bezeichnet V eine solche Function der Größen x, y, p, q, r, s, ꝛc., daß wenn das Differenziale derselben

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + \ldots$$

gesetzt wird, die Gleichung Statt findet:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \ldots = 0,$$

wobey das Element dx constant genommen ist, dann wird die Differenzialformel Vdx für sich integrabel seyn, so bald zwischen den beyden Veränderlichen x und y keine Relation festgesetzt ist, und umgekehrt.

Beweis.

Wenn man hat

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \ldots = 0,$$

so enthält die Variation des Integralausdruckes $\int Vdx$ keine Integralformel, und ist daher für jede Lage der Coordination x und y bloß von den Variationen abhängig, welche denselben an der äußersten Gränze beygelegt werden, was durchaus nicht möglich wäre, wenn die Formel Vdx nicht integrabel wäre, weil die Variation dann überdieß von allen zwischenliegenden Variationen zugleich abhängen müßte, und hieraus folgt, daß die Formel Vdx die Integration jedesmahl gestatte, so oft jene Gleichung besteht, so daß also der Ausdruck $\int Vdx$ eine gewisse und zwar eine bestimmte Function der Größen x, y, p, q, r, s, ... seyn wird. So oft aber umgekehrt die Differenzialformel Vdx die Integration zuläßt, und ihr Integrale $\int Vdx$ also in der That eine Function der Größen x, y, p, q, r, s, ... bezeichnet, eben so oft ist auch die Variation dieses Ausdruckes bloß von den äußersten Variationen der Größen x und y abhängig, und die

schaft eines Maximums oder Minimums zukommen soll, nothwendig solche Integralien seyn müssen, die an sich die Integration nicht gestatten.

Anmerkung 2.

§. 97. Um diesen Lehrsatz noch lichtvoller darzustellen, wollen wir einen solchen Integralausdruck $\int V dx$ betrachten, der für sich integrabel ist, und wollen annehmen, es sey z. B.

$$\int V dx = \frac{x dy}{y dx} = \frac{xp}{y},$$

so daß man erhält:

$$V = \frac{p}{y} - \frac{xp^2}{y^2} + \frac{xq}{y},$$

und daher die Differenzialformel

$$\left(\frac{p}{y} - \frac{xp^2}{y^2} + \frac{xq}{y}\right) dx$$

für sich integrabel wird, und wir wollen nun sehen, ob unser Theorem diese Integrabilität zeigt. Differenziren wir also die Größe V, und vergleichen das Differenziale mit dem Ausdrucke

$$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq,$$

so werden wir erhalten:

$$M = \frac{-p^2}{y^2} + \frac{q}{y}; \quad N = \frac{-p}{y^2} + \frac{2xp^2}{y^3} - \frac{xq}{y^2}$$

$$P = \frac{1}{y} - \frac{2xp}{y^2} \text{ und } Q = \frac{x}{y}.$$

Da nun, unserem Lehrsatze zu Folge,

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0$$

seyn muß, so erhalten wir zuerst durch Differenziation

$$\frac{dP}{dx} = \frac{-3p}{y^2} + \frac{4xp^2}{y^3} - \frac{2xq}{y^2} \text{ und}$$

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{1}{y} - \frac{xp}{y^2};$$

dann aber

$$\frac{d^2Q}{dx^2} = \frac{-2p}{y^2} + \frac{2xp^2}{y^3} - \frac{xq}{y^2},$$

folglich ist

$$\frac{dP}{dx} - \frac{d^2Q}{dx^2} = \frac{-p}{y^2} + \frac{2xp^2}{y^3} - \frac{xq}{y^2},$$

welchem Werth auch die Größe N gleich ist.

Anmerkung 3.

§. 98. Wenn der Differenzialausdruck $V dx$ die Integration zuläßt, und daher, wenn

$$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \ldots$$

gesetzt wird, nach unserem Lehrsatze die Gleichung Statt findet:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \frac{d^4 S}{dx^4} - \ldots = 0,$$

so lassen sich hieraus noch andere, sehr schöne Folgerungen ziehen; denn da man, wenn durch dx multiplicirt und dann integrirt wird, die Gleichung erhält:

$$\int N dx - P + \frac{dQ}{dx} - \frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{d^3 S}{dx^3} - \ldots = A,$$

so ist einleuchtend, daß auch der Ausdruck $N dx$ für sich integrabel sey. Da man ferner hieraus erhält:

$$\int dx\,(\int N dx - P) + Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2 S}{dx^2} - \ldots = Ax + B,$$

so ist auch ferner der Ausdruck

$$dx\,(\int N dx - P)$$

integrabel. Weiters wird auch auf ähnliche Art folgender Ausdruck integrabel seyn:

$$dx\,[\int dx\,(\int N dx - P) + Q],$$

und daher auch die Formel

$$dx\,[\int dx\,[\int N dx - P] + Q - R],$$

und so weiter. Hieraus leiten wir nun folgendes eben so merkwürdige und für die Ausübung sehr nützliche Theorem ab.

Lehrsatz 4.

§. 99. Wenn $dy = p dx$, $dp = q dx$, $dq = r dx$, $dr = s dx$, etc. gesetzt wird, und es bezeichnet V eine solche Function der Größen x, y, p, q, r, s, etc., daß der Differenzialausdruck $V dx$ für sich integrabel ist, dann werden, wenn man

$$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds + \ldots$$

setzt, auch nachstehende Differenzialformeln für sich integrabel seyn:

I. Der Ausdruck $N\,dx$ wird für sich integrabel seyn, und wenn

$$P - \int N\,dx = \mathfrak{P}$$

gesetzt wird, so wird

II. Der Ausdruck $\mathfrak{P}\,dx$ die Integration gestatten, setzt man ferner

$$Q - \int \mathfrak{P}\,dx = \mathfrak{Q},$$

so wird auch

III. Die Formel $\mathfrak{Q}\,dx$ für sich integrabel seyn, setzt man weiter

$$R - \int \mathfrak{Q}\,dx = \mathfrak{R},$$

so ist auch

IV. Die Formel $\mathfrak{R}\,dx$ für sich integrabel; wird weiters

$$S - \int \mathfrak{R}\,dx = \mathfrak{S}$$

gesetzt, so wird auch

V. Der Ausdruck $\mathfrak{S}\,dx$ für sich integrabel seyn, und so fort.

Beweis.

Die Gültigkeit dieses Theoremes geht schon aus den vorhergehenden Paragraphen hervor, woraus zugleich erhellt, daß, wenn alle diese Formeln die Integration gestatten, auch der ursprüngliche Ausdruck $V\,dx$ für sich integrabel seyn würde.

Zusatz 1.

§. 100. Da V eine Function der Größen

$$x,\ y,\ p = \frac{dy}{dx},\quad q = \frac{dp}{dx},\quad r = \frac{dq}{dx},\ \ldots$$

ist, so können auch die durch Differenziation daraus abgeleiteten Größen $M, N, P, Q, R, \ldots$ auch auf folgende Art dargestellt werden:

$$M = \left(\frac{dV}{dx}\right);\quad N = \left(\frac{dV}{dy}\right);\quad P = \left(\frac{dV}{dp}\right);\quad Q = \left(\frac{dV}{dq}\right),\ \text{rc.}$$

und daher wird auch, wie man aus dem ersten Ausdrucke sieht, die Formel $\left(\frac{dV}{dy}\right)dx$ integrabel seyn, wenn die Formel $V\,dx$ die Integration gestattet.

Zusatz 2.

§. 101. Ferner wird auch aus demselben Grunde der Ausdruck $\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)dx$ und daher weiters die Ausdrücke

$$\left(\frac{d^3 V}{d y^3}\right) dx; \quad \left(\frac{d^4 V}{d y^4}\right) dx; \quad \text{etc.}$$

sämmtlich für sich integrabel seyn.

Zusatz 3.

§. 102. Weil nun so viele Buchstaben P, Q, R vorhanden sind, vom wie vielten Grade die Differenzialien in dem Ausdrucke $V dx$ erscheinen, und alle folgenden verschwinden, so müssen die daraus abgeleiteten, mit deutschen Buchstaben bezeichneten, Größen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ endlich verschwinden, oder in Functionen einer einzigen Größe x übergehen, weil sonst die nachfolgenden Integrationen nicht Statt finden könnten.

Beyspiel.

§. 103. Sey V eine solche Function, daß

$$\int V dx = \frac{y (dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{x dx d^2 y}$$

wird. Macht man hier die Substitutionen

$$dy = p dx, \quad dp = q dx, \quad dq = r dx, \quad \text{etc.}$$

so wird sich für dieses Beyspiel die Function V auf folgende Art darstellen lassen:

$$V = \frac{p (1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{x q} - \frac{y (1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2 q} + \frac{3 y p \sqrt{1 + p^2}}{x} - \frac{y r (1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{x q^2},$$

und daher erhalten wir durch Differenziation nachstehende Werthe:

$$N = \frac{-(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2 q} + \frac{3 p \sqrt{1 + p^2}}{x} - \frac{r (1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{x q^2},$$

$$P = \frac{(1 + 4 p^2) \sqrt{1 + p^2}}{x q} - \frac{3 y p \sqrt{1 + p^2}}{x^2 q} + \frac{3 y (1 + 2 p^2)}{x \sqrt{1 + p^2}} - \frac{3 y p r \sqrt{1 + p^2}}{x q^2},$$

$$Q = \frac{-p (1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{x q^2} + \frac{y (1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2 q^2} + \frac{2 y r (1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{x q^3},$$

$$R = \frac{-y (1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{x q^2}.$$

Zuerst muß also jetzt der Ausdruck $N dx$, oder

$$-\frac{dx(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2 q}+\frac{3pdx\sqrt{1+p^2}}{x}-\frac{dq(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{xq^2}$$

integrabel seyn, und man sieht sogleich ein, daß das Integrale

$$\int N dx = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{xq}$$

seyn werde. Nun erhalten wir hieraus für den zweyten Ausdruck

$$\mathfrak{P} = P - \int N dx = \frac{3p^2\sqrt{1+p^2}}{xq} - \frac{3yp\sqrt{1+p^2}}{x^2 q} + \frac{3y(1+2p^2)}{x\sqrt{1+p^2}} - \frac{3ypr\sqrt{1+p^2}}{xq^2},$$

so daß man die nachstehende Formel zu integriren hat:

$$\mathfrak{P} dx = \frac{3pdy\sqrt{1+p^2}}{xq} - \frac{3ypdx\sqrt{1+p^2}}{x^2 q} + \frac{3ydx(1+2p^2)}{x\sqrt{1+p^2}} - \frac{3ypdq\sqrt{1+p^2}}{xq^2}.$$

Das Integrale dieser Formel, oder wenigstens ein Theil desselben, ergibt sich offenbar aus dem letzten Gliede $\frac{3yp\sqrt{1+p^2}}{xq}$, und da das Differenziale hievon den ganzen Ausdruck umfaßt, so wird man erhalten:

$$\int \mathfrak{P} dx = \frac{3yp\sqrt{1+p^2}}{xq}.$$

Nun finden wir ferner für die dritte Formel

$$\mathfrak{Q} = Q - \int \mathfrak{P} dx = \frac{-p(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{xq^2} + \frac{y(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2 q^2} + \frac{2yr(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{xq^3} - \frac{3yp\sqrt{1+p^2}}{xq},$$

und daher wird, wenn man mit dx multiplicirt, wegen $dx = \frac{dp}{q}$ im letzten Gliede:

$$\mathfrak{Q} dx = \frac{-dy(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{xq^2} + \frac{ydx(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2 q^2} + \frac{2ydq(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{xq^3} - \frac{3ypdp\sqrt{1+p^2}}{xq^2},$$

wo das vorletzte Glied als Integrale den Ausdruck erklärt:

$$\int \mathfrak{Q}\, dx = \frac{-y(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{x q^2}.$$

Ferner wird die vierte Formel so beschaffen seyn, daß

$$\mathfrak{R} = R - \int \mathfrak{Q}\, dx = 0$$

wird, woraus nun hervorgeht, daß nicht bloß der Ausdruck $\mathfrak{R}\, dx$ sondern auch alle nachfolgenden Formeln integrabel seyn werden.

Anmerkung.

§. 104. Diese Lehrsätze sind um so schöner, weil der Beweis derselben sich auf ein Princip stützt, dessen Grund hier ganz fremdartig erscheint, besonders weil bey diesen Wahrheiten keine Spur von Variationen mehr zu finden ist. Es unterliegt daher keinem Zweifel, daß die Demonstrazion auch auf einem andern, mehr natürlichem Wege durchgeführt werden könne.

Kapitel IV.

Von der Variation der verwickelten Integralformeln, welche zwey veränderliche Größen enthalten.

Aufgabe 8.

§. 105. **Wird $v = \int \mathfrak{V} dx$ gesetzt, wobey $\mathfrak{V}$ irgend eine Function der beyden Veränderlichen x und y und ihrer Differenzialien**

$$dy = p dx, \quad dp = q dx, \quad dq = r dx, \text{ etc.}$$

bezeichnet, und drückt V irgend eine Function von v aus, die Variation des verwickelten Integralausdruckes $\int V dx$ aufzufinden.

Auflösung.

Weil die Größe v selbst der Integralausdruck $\int \mathfrak{V} dx$ ist, so ist die Formel $\int V dx$ wirklich verwickelt. Da nun angenommen wird, daß die Function V bloß die Function v enthalte, so setzen wir $dV = L dv$, dann aber sey für die Function $\mathfrak{V}$ das Differenziale

$$d\mathfrak{V} = \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \ldots$$

Da nun unter diesen Voraussetzungen die gesuchte Variation

$$\delta \int V dx = \int \delta (V dx) = \int (\delta V dx + V d \delta x)$$

ist, so erhält man mittelst der oben gebrauchten Reduction:

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int (dx \delta V - dV \delta x).$$

Da aber, vermöge der Voraussetzung, $dV = L dv$ ist, so wird man auch für die Variation $\delta V = L \delta v$ erhalten, allein wegen $v = \int \mathfrak{V} dx$ wird man erstlich $dv = \mathfrak{V} dx$ und daher $dV = L \mathfrak{V} dx$ haben, dann aber

$$\delta v = \delta \int \mathfrak{V} dx = \mathfrak{V} \delta x + \int (dx \delta \mathfrak{V} - d\mathfrak{V} \delta x),$$

daher ist auch

$$\delta V = L \mathfrak{V} \delta x + L \int (dx \delta V - d\mathfrak{V} \delta x),$$

also

$$\delta \int V dx = V dx +$$
$$+ \int [L \mathfrak{V} dx \delta x + L dx \int (dx \delta \mathfrak{V} - d\mathfrak{V} \delta x) - L \mathfrak{V} dx \delta x],$$

oder

$$\delta\int V\,dx = V\,\delta x + \int L\,dx \int (dx\,\delta\mathfrak{V}' - d\mathfrak{V}\,\delta x).$$

Nach dem vorhergehenden Kapitel aber ist, wie man leicht einsieht:

$$\int (dx\,\delta\mathfrak{V} - d\mathfrak{V}\,\delta x) = \delta\int \mathfrak{V}\,dx - \mathfrak{V}\,dx =$$

$$= \int \omega\,dx \left(\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \frac{d^4\mathfrak{S}}{dx^4} - \ldots\ldots\right)$$
$$+ \omega \left(\mathfrak{P} - \frac{d\mathfrak{Q}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{R}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{S}}{dx^3} + \ldots\ldots\right)$$
$$+ \frac{d\omega}{dx}\left(\mathfrak{Q} - \frac{d\mathfrak{R}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{S}}{dx^2} - \ldots\ldots\right)$$
$$+ \frac{d^2\omega}{dx^2}\left(\mathfrak{R} - \frac{d\mathfrak{S}}{dx} + \ldots\ldots\right)$$

ꝛc.

wenn das Element dx constant genommen, und $\omega = \delta y - p\,\delta x$ Kürze halber gesetzt wird. Allein da hier die Substitution auf Unbequemlichkeiten führt, so wird es besser seyn, die Rechnung auf dem ersten Wege wieder durchzuführen. Da also aus dem Differenziale und der Variation der Größe $\mathfrak{V}$ erhalten wird:

$$dx\,\delta\mathfrak{V} - d\mathfrak{V}\,\delta x =$$
$$= dx\,(\mathfrak{M}\,\delta x + \mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\,\delta p + \mathfrak{Q}\,\delta q + \mathfrak{R}\,\delta r + \ldots\ldots)$$
$$- \delta x\,(\mathfrak{M}\,dx + \mathfrak{N}\,dy + \mathfrak{P}\,dp + \mathfrak{Q}\,dq + \mathfrak{R}\,dr + \ldots\ldots),$$

so wird, weil

$$dy = p\,dx,\quad dp = q\,dx,\quad dq = r\,dx,\quad dr = s\,dx,\quad \text{ꝛc.}$$

ist:

$$dx\,\delta\mathfrak{V} - d\mathfrak{V}\,\delta x = \mathfrak{N}\,dx\,(\delta y - p\,\delta x) + \mathfrak{P}\,dx\,(\delta p - q\,\delta x)$$
$$+ \mathfrak{Q}\,dx\,(\delta q - r\,\delta x) + \text{ꝛc.}$$

Allein weil dx constant ist, so wird nach §. 79:

$$\delta y - p\,\delta x = \omega;\quad \delta p - q\,\delta x = \frac{d\omega}{dx};\quad \delta q - r\,\delta x = \frac{d^2\omega}{dx^2};$$
$$\delta r - s\,\delta x = \frac{d^3\omega}{dx^3};\quad \text{ꝛc.}$$

und so wird man erhalten:

$$dx\,\delta\mathfrak{V} - d\mathfrak{V}\,\delta x = \mathfrak{N}\,\omega\,dx + \mathfrak{P}\,d\omega + \mathfrak{Q}\,\frac{d^2\omega}{dx} + \mathfrak{R}\,\frac{d^3\omega}{dx^2} + \mathfrak{S}\,\frac{d^4\omega}{dx^3} + \text{ꝛc.},$$

und das Integrale hiervon gibt den obigen Ausdruck. Man setze nun das Integrale $\int L\,dx = I$, und man wird erhalten:

$$\delta\int V\,dx = V\,\delta x + I\int (dx\,\delta\mathfrak{V} - d\mathfrak{V}\,\delta x) - \int I\,(dx\,\delta\mathfrak{V} - d\mathfrak{V}\,\delta x).$$

Jetzt aber sieht man leicht, daß

$$\int I(dx\,\delta\mathfrak{V} - d\mathfrak{V}\,\delta x) = \int \omega\,dx\left(I\mathfrak{N} - \frac{d.I\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2.I\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3.I\mathfrak{R}}{dx^3} + ..\right)$$
$$+ \omega\left(I\mathfrak{P} - \frac{d.I\mathfrak{Q}}{dx} + \frac{d^2.I\mathfrak{R}}{dx^2} - ...\right)$$
$$+ \frac{d\omega}{dx}\left(I\mathfrak{Q} - \frac{d.I\mathfrak{R}}{dx} + ...\right)$$

seyn werde, und daher folgert man nach gehöriger Substitution für die gesuchte Variation:

$$\delta\int V\,dx = V\,\delta x + I\int\omega\,dx\left(\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \ldots\right)$$
$$- \int\omega\,dx\left(I\mathfrak{N} - \frac{d.I\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2.I\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3.I\mathfrak{R}}{dx^3} + \ldots\right)$$
$$+ I\omega\left(\mathfrak{P} - \frac{d\mathfrak{Q}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{R}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{S}}{dx^3} + \ldots\right)$$
$$- \omega\left(I\mathfrak{R} - \frac{d.I\mathfrak{Q}}{dx} + \frac{d^2.I\mathfrak{R}}{dx^2} - \frac{d^3.I\mathfrak{S}}{dx^3} + \ldots\right)$$
$$+ \frac{I\,d\omega}{dx}\left(\mathfrak{Q} - \frac{d\mathfrak{R}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{S}}{dx^2} - \ldots\right)$$
$$- \frac{d\omega}{dx}\left(I\mathfrak{Q} - \frac{d.I\mathfrak{R}}{dx} + \frac{d^2.I\mathfrak{S}}{dx^2} - \ldots\right)$$
$$+ \frac{I\,d^2\omega}{dx^2}\left(\mathfrak{R} - \frac{d\mathfrak{S}}{dx} + \ldots\right)$$
$$- \frac{d^2\omega}{dx^2}\left(I\mathfrak{R} - \frac{d.I\mathfrak{S}}{dx} + \ldots\right)$$
$$+ \frac{I\,d^3\omega}{dx^3}(\mathfrak{S} - \ldots)$$
$$- \frac{d^3\omega}{dx^3}(I\mathfrak{S} - \ldots).$$

Werden hier die beyden ersten Theile differenzirt und von Neuem integrirt, so werden wir nach gehöriger Reduction der übrigen Theile, indem wir statt dI den Werth $L\,dx$ wieder herstellen, erhalten:

$$\delta\int V\,dx = V\,\delta x +$$
$$+ \int L\,dx\int\omega\,dx\left(\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \ldots\right)$$
$$+ \int\omega\,dx\left(L\mathfrak{P} - \frac{L\,d\mathfrak{Q} - d.L\mathfrak{Q}}{dx} + \frac{L\,d^2\mathfrak{R} + d.L\,d\mathfrak{R} + d^2L\mathfrak{R}}{dx^2} - \ldots\right)$$
$$+ \omega\left(L\mathfrak{Q} - \frac{L\,d\mathfrak{R} - d.L\mathfrak{R}}{dx} + \frac{L\,d^2\mathfrak{S} + d.L\,d\mathfrak{S} + d^2.L\mathfrak{S}}{dx^2} - \ldots\right)$$

$$+ \frac{d\omega}{dx}\left(L\mathfrak{R} - \frac{Ld\mathfrak{S} - d.L\mathfrak{S}}{dx} + \ldots\right).$$

$$+ \frac{d^2\omega}{dx^2}(L\mathfrak{S} - \ldots),$$

und dieser Ausdruck erscheint in einer höchst einfachen Gestalt, und für die Anwendung ganz geeignet.

Zusatz 1.

§. 106. Wird eine solche Relation zwischen x und y gesucht, daß das Integrale $\int V dx$ ein Maximum oder Minimum wird: so muß man die Integraltheile der Variation verschwinden lassen, welches im Allgemeinen nicht möglich ist; denn man muß auf die Grenze sehen, bis zu welcher das Integrale $\int V dx$ ausgedehnt wird, und wenn wir annehmen, daß für diese $I = \int L dx = A$ werde, so erhalten wir aus dem ersten Ausdruck folgende Gleichung:

$$o = (A - I)\mathfrak{N} - \frac{d.(A-I)\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2(A-I)\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3(A-I)\mathfrak{R}}{dx^3} + \ldots$$

Zusatz 2.

§. 107. Wie man auch diese Gleichung für jeden gegebenen Fall behandeln mag, so wird man doch immer am Ende dahin kommen, daß man den Integralausdruck $I = \int L dx$ durch Differenziation wegschaffen muß, und es ist einleuchtend, daß durch diese Operation zugleich die Größe A wegfällt, und so wird die resultirende Gleichung weiter nicht mehr von der Gränze der Integration abhängig seyn.

Zusatz 3.

§. 108. Wenn wir im Allgemeinen für die Auffindung der Variation der Integralformel $\int V dx$ den Werth $\int L dx = I$, welcher dem ganzen Integrale entspricht, $= A$ setzen, so wird sich die gesuchte Function unter folgender Form darstellen:

$$\delta \int V dx = V \delta x +$$

$$+ \int \omega dx \left[(A-I)\mathfrak{N} - \frac{d.(A-I)\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2.(A-I)\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3.(A-I)\mathfrak{R}}{dx^3} + \ldots\right]$$

$$+ \omega\left(L\mathfrak{Q} - \frac{Ld\mathfrak{R} - d.L\mathfrak{R}}{dx} + \frac{Ld^2\mathfrak{S} + d.Ld\mathfrak{S} + d^2.L\mathfrak{S}}{dx^2} - \ldots\right)$$

$$+ \frac{d\omega}{dx}\left(L\mathfrak{R} - \frac{Ld\mathfrak{S} - d.L\mathfrak{S}}{dx} + \ldots\right)$$

$$+ \frac{d^2\omega}{dx^2}(L\mathfrak{S} - \ldots),$$

wo A — I den Werth des Ausdruckes $\int L\,dx$ bezeichnet, welcher von der äußersten Gränze der Integration an jeder unbestimmten Zwischenstelle von rückwärts genommen wird.

Anmerkung.

§. 109. Bey der Auflösung dieses Problemes hat sich eine Abkürzung dargebothen, durch welche auch die in dem obigen Kapitel gebrauchte Rechnung sich sehr bedeutend zusammenziehen läßt. Denn da wir daselbst (79) auf die Gleichung

$$\delta \int V\,dx = V\,\delta x + \int (dx\,\delta V - dV\,\delta x)$$

gekommen sind, so wird man, weil

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots$$

und

$$\delta V = M\,\delta x + N\,\delta y + P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \ldots$$

ist, erhalten:

$$dV = dx\,(M + Np + Pq + Qr + Rs + \ldots),$$

und hieraus ergibt sich:

$$dx\,\delta V - dV\,\delta x =$$
$$= dx\,[N\,(\delta y - p\,\delta x) + P\,(\delta p - q\,\delta x) + Q\,(\delta q - r\,\delta x) + \ldots].$$

Setzt man nun Kürze halber $\delta y - p\,\delta x = \omega$, so wird man durch Differenziation erhalten:

$$\delta\,(p\,dx) - q\,dx\,\delta x - p\,\delta\,dx = d\omega;$$

aber es ist:

$$\delta\,(p\,dx) = p\,d\,\delta x + \delta p\,dx,$$

also

$$\delta p - q\,\delta x = \frac{d\omega}{dx}.$$

Differenzirt man diese Formel, so wird man, weil

$$dp = q\,dx \quad \text{und} \quad dq = r\,dx$$

ist, auf ähnliche Art erhalten:

$$q\,d\,\delta x + \delta q\,dx - q\,d\,\delta x - dq\,\delta x = dx\,(\delta q - r\,\delta x) = d\,.\,\frac{d\omega}{dx},$$

woraus hervorgeht, daß, wenn

$$\delta y - p\,\delta x = \omega$$

gesetzt wird, erhalten werde:

$$\delta p - q\delta x = \frac{d\omega}{dx}$$

$$\delta q - r\delta x = \frac{1}{dx}\, d \,.\, \frac{d\omega}{dx} = \frac{d^2\omega}{dx^2}.$$

wenn dx constant genommen wird; und endlich

$$\delta r - s\delta x = \frac{1}{dx}\, d \,.\, \frac{1}{dx}\, d \,.\, \frac{d\omega}{dx} = \frac{d^3\omega}{dx^3}$$

ꝛc.

Man wird daher finden:

$$dx\delta V - dV\delta x = dx\left(N\omega + \frac{Pd\omega}{dx} + \frac{Qd^2\omega}{dx^2} + \frac{Rd^3\omega}{dx^3} + \frac{Sd^4\omega}{dx^4} + \ldots\right),$$

wenn nämlich das Differenziale dx constant genommen wird.

Aufgabe 9.

§. 110. Wenn $v = \int \mathfrak{V} dx$ ist, wobey

$$d\mathfrak{V} = \mathfrak{M}dx + Mdy + \mathfrak{P}dp + \mathfrak{Q}dq + \mathfrak{R}dr + \ldots,$$

dann aber V irgend eine Function bezeichnet, die nicht bloß die Größen

$$x,\ y,\ p = \frac{dy}{dx};\quad q = \frac{dp}{dx};\quad r = \frac{dq}{dx};\ \text{ꝛc.}$$

sondern auch den Integralausdruck $v = \int \mathfrak{V} dx$ selbst enthält; die Variation der verwickelten Integralformel $\int V dx$ aufzusuchen.

Auflösung.

Weil V eine Function der Größen v, x, y, p, q, r, ꝛc. ist, so nehme man das Differenziale derselben, welches

$$dV = Ldv + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \ldots$$

seyn mag, und man wird die Variation von V auf folgende Art ausgedrückt erhalten:

$$\delta V = L\delta v + M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots,$$

dann aber bemerke man, daß, weil

$$dv = \mathfrak{V}dx,\quad dy = pdx,\quad dp = qdx$$

ist, die Gleichungen Statt finden:

$$dV = dx(L\mathfrak{V} + M + Np + Pq + Qr + Rs + \ldots) \text{ und}$$

$$\delta \mathfrak{V} = \mathfrak{M}\delta x + \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \ldots.$$

Außerdem haben wir:

$$\delta v = \int(\mathfrak{V} d\delta x + dx\delta\mathfrak{V}) = \mathfrak{V}\delta x + \int(dx\delta\mathfrak{V} - d\mathfrak{V}\delta x),$$

und daher wird, wenn $\delta y - p\delta x = \omega$ gesetzt wird, mittelst der oben gefundenen Ausdrücke seyn:

$$\delta v = \mathfrak{V}\delta x + \int dx\left(\mathfrak{N}\omega + \frac{\mathfrak{P}d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}d^2\omega}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R}d^3\omega}{dx^3} + \ldots\right)$$

wo wir der Bequemlichkeit wegen dx constant genommen haben.

Da nun nach diesen Vorbereitungen die gesuchte Variation

$$\delta\int V dx = V\delta x + \int(dx\delta V - dV\delta x)$$

ist, so setze man, um die oben gefundene Reduction anwenden zu können:

$$dV = L dv + dW,$$

so daß man erhält:

$$\delta V = L\delta v + \delta W$$

und

$$dW = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \ldots.$$

Wir werden daher folgenden Ausdruck finden:

$$\delta\int V dx = V\delta x + \int(L dx\delta v - L dv\delta x) + \int(dx\delta W - dW\delta x),$$

wobey die Relation Statt findet:

$$dx\delta W - dW\delta x = dx\left(N\omega + \frac{Pd\omega}{dx} + \frac{Qd^2\omega}{dx^2} + \frac{Rd^3\omega}{dx^3} + \ldots\right);$$

ferner ist

$$dx\delta v - dv\delta x = dx\int dx\left(\mathfrak{N}\omega + \frac{\mathfrak{P}d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}d^2\omega}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R}d^3\omega}{dx^3} + \ldots\right),$$

weil $dv\delta x = V dx\delta x$ ist. Durch Substitution dieser Werthe ergibt sich die gesuchte Variation:

$$\delta\int V dx = V\delta x + \int L dx\int dx\left(\mathfrak{N}\omega + \frac{\mathfrak{P}d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}d^2\omega}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R}d^3\omega}{dx^3} + \ldots\right)$$
$$+ \int dx\left(N\omega + \frac{Pd\omega}{dx} + \frac{Qd^2\omega}{dx^2} + \frac{Rd^3\omega}{dx^3} + \ldots\right).$$

Um nun diesen Ausdruck weiter zu reduciren, setzen wir, das Integrale $\int L dx = I$ werde so genommen, daß es für den Anfang, dem das Integrale $\int V dx$ entspricht, verschwinde, für das Ende aber, wo das Integrale $\int V dx$ endiget, $I = A$ werde, und so wird man erhalten:

$$\delta\int V\,dx = V\delta x + A\int dx\left(\mathfrak{N}\omega + \frac{\mathfrak{P}\,d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}\,d^2\omega}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R}\,d^3\omega}{dx^3} + \ldots\right)$$
$$- \int I\,dx\left(\mathfrak{N}\omega + \frac{\mathfrak{P}\,d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}\,d^2\omega}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R}\,d^3\omega}{dx^3} + \ldots\right)$$
$$+ \int dx\left(N\omega + \frac{P\,d\omega}{dx} + \frac{Q\,d^2\omega}{dx^2} + \frac{R\,d^3\omega}{dx^3} + \ldots\right)$$

Zur Abkürzung dieses Ausdruckes setzen wir:

$$N + (A - I)\,\mathfrak{N} = N'$$
$$P + (A - I)\,\mathfrak{P} = P'$$
$$Q + (A - I)\,\mathfrak{Q} = Q'$$
$$R + (A - I)\,\mathfrak{R} = R'$$
ꝛc.

damit daraus folgender Ausdruck zum Vorschein komme, ähnlich jenem, welchen wir oben behandelt haben, nämlich:

$$\delta\int V\,dx = V\delta x + \int dx\left(N'\omega + \frac{P'\,d\omega}{dx} + \frac{Q'\,d^2\omega}{dx^2} + \frac{R'\,d^3\omega}{dx^3} + \ldots\right).$$

Wenn wir also hier nach den Integralzeichen die Differenzialien von ω wegschaffen, so werden wir nach §. 86 auf folgenden Ausdruck kommen:

$$\delta\int V\,dx = \int\omega\,dx\left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} + \frac{d^4S'}{dx^4} - \ldots\right)$$
$$+ V\,dx + \omega\left(P' - \frac{dQ'}{dx} + \frac{d^2R'}{dx^2} - \frac{d^3S'}{dx^3} + \ldots\right)$$
$$+ \text{Const.} + \frac{d\omega}{dx}\left(Q' - \frac{dR'}{dx} + \frac{d^2S'}{dx^2} - \ldots\right)$$
$$+ \frac{d^2\omega}{dx^2}\left(R' - \frac{dS'}{dx} + \ldots\right)$$
$$+ \frac{d^3\omega}{dx^3}\left(S' - \ldots\right).$$

Der durch die Integration eingeführten constanten Größe aber muß man einen solchen Werth beylegen, daß für den Anfang der Integration die vollendeten Theile der Formel $\int V\,dx$ verschwinden, wenn nämlich der erste Theil des Integrals so genommen wird, daß er für denselben Anfangswerth verschwindet; dann aber muß man den ganzen Ausdruck bis zu dem Ende der Integration ausdehnen, für welchen, wie wir bereits angenommen haben, $\int L\,dx = I = A$ wird.

Zusatz 1.

§. 111. In dem Integraltheile muß man die Veränderlichkeit

$$-\frac{dx(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2 q}+\frac{3p\,dx\sqrt{1+p^2}}{x}-\frac{dq(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{xq^2}$$

integrabel seyn, und man sieht sogleich ein, daß das Integrale

$$\int N\,dx=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{xq}$$

seyn werde. Nun erhalten wir hieraus für den zweyten Ausdruck

$$\mathfrak{P}=P-\int N\,dx=\frac{3p^2\sqrt{1+p^2}}{xq}-\frac{3yp\sqrt{1+p^2}}{x^2 q}+\frac{3y(1+2p^2)}{x\sqrt{1+p^2}}-\frac{3ypr\sqrt{1+p^2}}{xq^2},$$

so daß man die nachstehende Formel zu integriren hat:

$$\mathfrak{P}\,dx=\frac{3p\,dy\sqrt{1+p^2}}{xq}-\frac{3yp\,dx\sqrt{1+p^2}}{x^2 q}+\frac{3y\,dx(1+2p^2)}{x\sqrt{1+p^2}}-\frac{3yp\,dq\sqrt{1+p^2}}{xq^2}.$$

Das Integrale dieser Formel, oder wenigstens ein Theil desselben, ergibt sich offenbar aus dem letzten Gliede $\frac{3yp\sqrt{1+p^2}}{xq}$, und da das Differenziale hievon den ganzen Ausdruck umfaßt, so wird man erhalten:

$$\int \mathfrak{P}\,dx=\frac{3yp\sqrt{1+p^2}}{xq}.$$

Nun finden wir ferner für die dritte Formel

$$\mathfrak{Q}=Q-\int\mathfrak{P}\,dx=\frac{-p(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{xq^2}+\frac{y(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2q^2}+\frac{2yr(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{xq^3}-\frac{3yp\sqrt{1+p^2}}{xq},$$

und daher wird, wenn man mit dx multiplicirt, wegen $dx=\frac{dp}{q}$ im letzten Gliede:

$$\mathfrak{Q}\,dx=\frac{-dy(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{xq^2}+\frac{y\,dx(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2q^2}+\frac{2y\,dq(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{xq^3}-\frac{3yp\,dp\sqrt{1+p^2}}{xq^2},$$

wo das vorletzte Glied als Integrale den Ausdruck erklärt:

$$\int \mathfrak{Q}\, dx = \frac{-y\,(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{x q^2}.$$

Ferner wird die vierte Formel so beschaffen seyn, daß

$$\mathfrak{R} = R - \int \mathfrak{Q}\, dx = 0$$

wird, woraus nun hervorgeht, daß nicht bloß der Ausdruck $\mathfrak{R}\, dx$ sondern auch alle nachfolgenden Formeln integrabel seyn werden.

Anmerkung.

§. 104. Diese Lehrsätze sind um so schöner, weil der Beweis derselben sich auf ein Princip stützt, dessen Grund hier ganz fremdartig erscheint, besonders weil bey diesen Wahrheiten keine Spur von Variationen mehr zu finden ist. Es unterliegt daher keinem Zweifel, daß die Demonstrazion auch auf einem andern, mehr natürlichem Wege durchgeführt werden könne.

Kapitel IV.

Von der Variation der verwickelten Integralformeln, welche zwey veränderliche Größen enthalten.

Aufgabe 8.

§. 105. **W**ird $v = \int W dx$ gesetzt, wobey W irgend eine Function der beyden Veränderlichen x und y und ihrer Differenzialien

$$dy = p dx, \quad dp = q dx, \quad dq = r dx, \text{ etc.}$$

bezeichnet, und drückt V irgend eine Function von v aus, die Variation des verwickelten Integralausdruckes $\int V dx$ aufzufinden.

Auflösung.

Weil die Größe v selbst der Integralausdruck $\int W dx$ ist, so ist die Formel $\int V dx$ wirklich verwickelt. Da nun angenommen wird, daß die Function V bloß die Function v enthalte, so setzen wir $dV = L dv$, dann aber sey für die Function W das Differenziale

$$dW = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \ldots$$

Da nun unter diesen Voraussetzungen die gesuchte Variation

$$\delta \int V dx = \int \delta (V dx) = \int (\delta V dx + V d\delta x)$$

ist, so erhält man vermöge der oben gebrauchten Reduction:

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int (dx \delta V - dV \delta x).$$

Da aber, vermöge der Voraussetzung, $dV = L dv$ ist, so wird man auch für die Variation $\delta V = L \delta v$ erhalten, allein wegen $v = \int W dx$ wird man ferner $dv = W dx$ und daher $dV = L W dx$ haben, dann aber

$$\delta v = \delta \int W dx = W \delta x + \int (dx \delta W - dW \delta x),$$

daher ist auch

$$\delta V = L W \delta x + L \int (dx \delta W - dW \delta x),$$

also

$$\delta \int V dx = V \delta x +$$
$$+ \int [L W dx \delta x + L dx \int (dx \delta W - dW \delta x) - L W dx \delta x],$$

der

$$\delta\int V\,dx = V\delta x + \int L\,dx \int (dx\,\delta\mathfrak{V} - d\mathfrak{V}\,\delta x).$$

Nach dem vorhergehenden Kapitel aber ist, wie man leicht nsieht:

$$\int (dx\,\delta\mathfrak{V} - d\mathfrak{V}\,\delta x) = \delta\int \mathfrak{V}\,dx - \mathfrak{V}\,dx =$$

$$= \int \omega\,dx \left(\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \frac{d^4\mathfrak{S}}{dx^4} - \ldots\ldots\right)$$
$$+ \omega \left(\mathfrak{P} - \frac{d\mathfrak{Q}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{R}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{S}}{dx^3} + \ldots\ldots\right)$$
$$+ \frac{d\omega}{dx}\left(\mathfrak{Q} - \frac{d\mathfrak{R}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{S}}{dx^2} - \ldots\ldots\right)$$
$$+ \frac{d^2\omega}{dx^2}\left(\mathfrak{R} - \frac{d\mathfrak{S}}{dx} + \ldots\ldots\right)$$

ꝛc.

enn das Element dx constant genommen, und $\omega = \delta y - p\delta x$ ürze halber gesetzt wird. Allein da hier die Substitution auf Unbe-emlichkeiten führt, so wird es besser seyn, die Rechnung auf dem sten Wege wieder durchzuführen. Da also aus dem Differenziale d der Variation der Größe $\mathfrak{V}$ erhalten wird:

$$dx\,\delta\mathfrak{V} - d\mathfrak{V}\,\delta x =$$
$$= dx\,(\mathfrak{M}\delta x + \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \ldots\ldots)$$
$$- \delta x\,(\mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy + \mathfrak{P}dp + \mathfrak{Q}dq + \mathfrak{R}dr + \ldots\ldots),$$

wird, weil

$$dy = p\,dx,\quad dp = q\,dx,\quad dq = r\,dx,\quad dr = s\,dx,\quad \text{ꝛc.}$$

:

$$dx\,\delta\mathfrak{V} - d\mathfrak{V}\,\delta x = \mathfrak{N}\,dx\,(\delta y - p\delta x) + \mathfrak{P}\,dx\,(\delta p - q\delta x)$$
$$+ \mathfrak{Q}\,dx\,(\delta q - r\delta x) + \text{ꝛc.}$$

Allein weil dx constant ist, so wird nach §. 79:

$$\delta y - p\delta x = \omega;\quad \delta p - q\delta x = \frac{d\omega}{dx};\quad \delta q - r\delta x = \frac{d^2\omega}{dx^2};$$
$$\delta r - s\delta x = \frac{d^3\omega}{dx^3};\quad \text{ꝛc.}$$

d so wird man erhalten:

$$dx\,\delta\mathfrak{V} - d\mathfrak{V}\,\delta x = \mathfrak{N}\omega\,dx + \mathfrak{P}\,d\omega + \mathfrak{Q}\frac{d^2\omega}{dx} + \mathfrak{R}\frac{d^3\omega}{dx^2} + \mathfrak{S}\frac{d^4\omega}{dx^3} + \text{ꝛc.},$$

d das Integrale hiervon gibt den obigen Ausdruck. Man setze nun s Integrale $\int L\,dx = I$, und man wird erhalten:

$$\delta\int V\,dx = V\delta x + I\int (dx\,\delta\mathfrak{V} - d\mathfrak{V}\,\delta x) - \int I\,(dx\,\delta\mathfrak{V} - d\mathfrak{V}\,\delta x).$$

Jetzt aber sieht man leicht, daß

$$\int I(dx\,\delta\mathfrak{V} - d\mathfrak{V}\,\delta x) = \int \omega\, dx\left(I\mathfrak{N} - \frac{d.I\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2.I\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3.I\mathfrak{R}}{dx^3} + \ldots\right)$$
$$+ \omega\left(I\mathfrak{P} - \frac{d.I\mathfrak{Q}}{dx} + \frac{d^2.I\mathfrak{R}}{dx^2} - \ldots\right)$$
$$+ \frac{d\omega}{dx}\left(I\mathfrak{Q} - \frac{d.I\mathfrak{R}}{dx} + \ldots\right)$$

seyn werde, und daher folgert man nach gehöriger Substitution für die gesuchte Variation:

$$\delta\int V dx = V\delta x + I\int\omega\, dx\left(\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \ldots\right)$$
$$- \int\omega\, dx\left(I\mathfrak{N} - \frac{d.I\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2.I\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3.I\mathfrak{R}}{dx^3} + \ldots\right)$$
$$+ I\omega\left(\mathfrak{P} - \frac{d\mathfrak{Q}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{R}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{S}}{dx^3} + \ldots\right)$$
$$- \omega\left(I\mathfrak{R} - \frac{d.I\mathfrak{Q}}{dx} + \frac{d^2.I\mathfrak{R}}{dx^2} - \frac{d^3.I\mathfrak{S}}{dx^3} + \ldots\right)$$
$$+ \frac{I\,d\omega}{dx}\left(\mathfrak{Q} - \frac{d\mathfrak{R}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{S}}{dx^2} - \ldots\right)$$
$$- \frac{d\omega}{dx}\left(I\mathfrak{Q} - \frac{d.I\mathfrak{R}}{dx} + \frac{d^2.I\mathfrak{S}}{dx^2} - \ldots\right)$$
$$+ \frac{I\,d^2\omega}{dx^2}\left(\mathfrak{R} - \frac{d\mathfrak{S}}{dx} + \ldots\right)$$
$$- \frac{d^2\omega}{dx^2}\left(I\mathfrak{R} - \frac{d.I\mathfrak{S}}{dx} + \ldots\right)$$
$$+ \frac{I\,d^3\omega}{dx^3}(\mathfrak{S} - \ldots)$$
$$- \frac{d^3\omega}{dx^3}(I\mathfrak{S} - \ldots).$$

Werden hier die beyden ersten Theile differenzirt und von Neuem integrirt, so werden wir nach gehöriger Reduction der übrigen Theile, indem wir statt dI den Werth $L\,dx$ wieder herstellen, erhalten:

$$\delta\int V dx = V\delta x +$$
$$+ \int L\,dx\int\omega\, dx\left(\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \ldots\right)$$
$$+ \int\omega\, dx\left(L\mathfrak{P} - \frac{Ld\mathfrak{Q} - d.L\mathfrak{Q}}{dx} + \frac{Ld^2\mathfrak{R} + d.L\,d\mathfrak{R} + d^2L\mathfrak{R}}{dx^2} - \ldots\right)$$
$$+ \omega\left(L\mathfrak{Q} - \frac{L\,d\mathfrak{R} - d.L\mathfrak{R}}{dx} + \frac{L\,d^2\mathfrak{S} + d.L\,d\mathfrak{S} + d^2.L\mathfrak{S}}{dx^2} - \ldots\right)$$

$$+\frac{d\omega}{dx}\left(L\mathfrak{R}-\frac{Ld\mathfrak{S}-d.L\mathfrak{S}}{dx}+\ldots\right).$$

$$+\frac{d^2\omega}{dx^2}(L\mathfrak{S}-\ldots),$$

und dieser Ausdruck erscheint in einer höchst einfachen Gestalt, und für die Anwendung ganz geeignet.

Zusatz 1.

§. 106. Wird eine solche Relation zwischen x und y gesucht, daß das Integrale $\int V dx$ ein Maximum oder Minimum wird: so muß man die Integraltheile der Variation verschwinden lassen, welches im Allgemeinen nicht möglich ist; denn man muß auf die Grenze sehen, bis zu welcher das Integrale $\int V dx$ ausgedehnt wird, und wenn wir annehmen, daß für diese $I = \int L dx = A$ werde, so erhalten wir aus dem ersten Ausdruck folgende Gleichung:

$$o = (A-I)\mathfrak{N} - \frac{d.(A-I)\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2(A-I)\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3(A-I)\mathfrak{R}}{dx^3} + \ldots$$

Zusatz 2.

§. 107. Wie man auch diese Gleichung für jeden gegebenen Fall behandeln mag, so wird man doch immer am Ende dahin kommen, daß man den Integralausdruck $I = \int L dx$ durch Differenziation wegschaffen muß, und es ist einleuchtend, daß durch diese Operation zugleich die Größe A wegfällt, und so wird die resultirende Gleichung weiter nicht mehr von der Gränze der Integration abhängig seyn.

Zusatz 3.

§. 108. Wenn wir im Allgemeinen für die Auffindung der Variation der Integralformel $\int V dx$ den Werth $\int L dx = I$, welcher dem ganzen Integrale entspricht, $= A$ setzen, so wird sich die gesuchte Function unter folgender Form darstellen:

$$\delta\int V dx = V\delta x +$$

$$+\int\omega dx\left[(A-I)\mathfrak{N}-\frac{d.(A-I)\mathfrak{P}}{dx}+\frac{d^2.(A-I)\mathfrak{Q}}{dx^2}-\frac{d^3.(A-I)\mathfrak{R}}{dx^3}+\ldots\right]$$

$$+\omega\left(L\mathfrak{Q}-\frac{Ld\mathfrak{R}-d.L\mathfrak{R}}{dx}+\frac{Ld^2\mathfrak{S}+d.Ld\mathfrak{S}+d^2.L\mathfrak{S}}{dx^2}-\ldots\right)$$

$$+\frac{d\omega}{dx}\left(L\mathfrak{R}-\frac{Ld\mathfrak{S}-d.L\mathfrak{S}}{dx}+\ldots\right)$$

$$+\frac{d^2\omega}{dx^2}(L\mathfrak{S}-\ldots),$$

wo $A - I$ den Werth des Ausdruckes $\int L\,dx$ bezeichnet, welcher von der äußersten Gränze der Integration an jeder unbestimmten Zwischenstelle von rückwärts genommen wird.

Anmerkung.

§. 109. Bey der Auflösung dieses Problemes hat sich eine Abkürzung dargebothen, durch welche auch die in dem obigen Kapitel gebrauchte Rechnung sich sehr bedeutend zusammenziehen läßt. Denn da wir daselbst (79) auf die Gleichung

$$\delta \int V\,dx = V\,\delta x + \int (dx\,\delta V - dV\,\delta x)$$

gekommen sind, so wird man, weil

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots$$

und

$$\delta V = M\,\delta x + N\,\delta y + P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \ldots$$

ist, erhalten:

$$dV = dx\,(M + Np + Pq + Qr + Rs + \ldots),$$

und hieraus ergibt sich:

$$dx\,\delta V - dV\,\delta x =$$

$$= dx\,[N\,(\delta y - p\,\delta x) + P\,(\delta p - q\,\delta x) + Q\,(\delta q - r\,\delta x) + \ldots].$$

Setzt man nun Kürze halber $\delta y - p\,\delta x = \omega$, so wird man durch Differenziation erhalten:

$$\delta\,(p\,dx) - q\,dx\,\delta x - p\,\delta dx = d\omega;$$

aber es ist:

$$\delta\,(p\,dx) = p\,d\delta x + \delta p\,dx,$$

also

$$\delta p - q\,\delta x = \frac{d\omega}{dx}.$$

Differenzirt man diese Formel, so wird man, weil

$$dp = q\,dx \quad \text{und} \quad dq = r\,dx$$

ist, auf ähnliche Art erhalten:

$$q\,d\delta x + \delta q\,dx - q\,d\delta x - dq\,\delta x = dx\,(\delta q - r\,\delta x) = d\,.\frac{d\omega}{dx},$$

woraus hervorgeht, daß, wenn

$$\delta y - p\,\delta x = \omega$$

gesetzt wird, erhalten werde:

$$\delta p - q\delta x = \frac{d\omega}{dx}$$

$$\delta q - r\delta x = \frac{1}{dx}\, d\,.\,\frac{d\omega}{dx} = \frac{d^2\omega}{dx^2}.$$

wenn dx constant genommen wird; und endlich

$$\delta r - s\delta x = \frac{1}{dx}\, d\,.\,\frac{1}{dx}\, d\,.\,\frac{d\omega}{dx} = \frac{d^3\omega}{dx^3}$$

etc.

Man wird daher finden:

$$dx\delta V - dV\delta x = dx\left(N\omega + \frac{P d\omega}{dx} + \frac{Q d^2\omega}{dx^2} + \frac{R d^3\omega}{dx^3} + \frac{S d^4\omega}{dx^4} + \ldots\right),$$

wenn nämlich das Differenziale dx constant genommen wird.

Aufgabe 9.

§. 110. Wenn $v = \int \mathfrak{V} dx$ ist, wobey

$$d\mathfrak{V} = \mathfrak{M}dx + Mdy + \mathfrak{P}dp + \mathfrak{Q}dq + \mathfrak{R}dr + \ldots,$$

dann aber V irgend eine Function bezeichnet, die nicht bloß die Größen

$$x,\ y,\ p = \frac{dy}{dx};\quad q = \frac{dp}{dx};\quad r = \frac{dq}{dx};\ \text{etc.}$$

sondern auch den Integralausdruck $v = \int \mathfrak{V} dx$ selbst enthält; die Variation der verwickelten Integralformel $\int V dx$ aufzusuchen.

Auflösung.

Weil V eine Function der Größen v, x, y, p, q, r, etc. ist, so nehme man das Differenziale derselben, welches

$$dV = Ldv + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \ldots$$

seyn mag, und man wird die Variation von V auf folgende Art ausgedrückt erhalten:

$$\delta V = L\delta v + M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots,$$

dann aber bemerke man, daß, weil

$$dv = \mathfrak{V}dx,\quad dy = pdx,\quad dp = qdx$$

ist, die Gleichungen Statt finden:

$$dV = dx(L\mathfrak{V} + M + Np + Pq + Qr + Rs + \ldots)\ \text{und}$$

$$\delta V = \mathfrak{M}\delta x + \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \ldots.$$

Außerdem haben wir:

$$\delta v = \int (\mathfrak{V} d\delta x + dx \delta \mathfrak{V}) = \mathfrak{V} \delta x + \int (dx \delta \mathfrak{V} - d\mathfrak{V} \delta x),$$

und daher wird, wenn $\delta y - p \delta x = \omega$ gesetzt wird, mittelst der oben gefundenen Ausdrücke seyn:

$$\delta v = \mathfrak{V} \delta x + \int dx \left(\mathfrak{N} \omega + \frac{\mathfrak{P} d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q} d^2 \omega}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R} d^3 \omega}{dx^3} + \dots \right)$$

wo wir der Bequemlichkeit wegen dx constant genommen haben.

Da nun nach diesen Vorbereitungen die gesuchte Variation

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int (dx \delta V - dV \delta x)$$

ist, so setze man, um die oben gefundene Reduction anwenden zu können:

$$dV = L dv + dW,$$

so daß man erhält:

$$\delta V = L \delta v + \delta W$$

und

$$dW = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \dots .$$

Wir werden daher folgenden Ausdruck finden:

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int (L dx \delta v - L dv \delta x) + \int (dx \delta W - dW \delta x),$$

wobey die Relation Statt findet:

$$dx \delta W - dW \delta x = dx \left(N \omega + \frac{P d\omega}{dx} + \frac{Q d^2 \omega}{dx^2} + \frac{R d^3 \omega}{dx^3} + \dots \right);$$

ferner ist

$$dx \delta v - dv \delta x = dx \int dx \left(\mathfrak{N} \omega + \frac{\mathfrak{P} d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q} d^2 \omega}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R} d^3 \omega}{dx^3} + \dots \right),$$

weil $dv \delta x = V dx \delta x$ ist. Durch Substitution dieser Werthe ergibt sich die gesuchte Variation:

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int L dx \int dx \left(\mathfrak{N} \omega + \frac{\mathfrak{P} d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q} d^2 \omega}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R} d^3 \omega}{dx^3} + \dots \right)$$
$$+ \int dx \left(N \omega + \frac{P d\omega}{dx} + \frac{Q d^2 \omega}{dx^2} + \frac{R d^3 \omega}{dx^3} + \dots \right).$$

Um nun diesen Ausdruck weiter zu reduciren, setzen wir, das Integrale $\int L dx = I$ werde so genommen, daß es für den Anfang, dem das Integrale $\int V dx$ entspricht, verschwinde, für das Ende aber, wo das Integrale $\int V dx$ endiget, $I = A$ werde, und so wird man erhalten:

$$\delta\int V dx = V\delta x + A\int dx\left(\mathfrak{N}\omega + \frac{\mathfrak{P}d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}d^2\omega}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R}d^3\omega}{dx^3} + \ldots\right)$$
$$- \int I dx\left(\mathfrak{N}\omega + \frac{\mathfrak{P}d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}d^2\omega}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R}d^3\omega}{dx^3} + \ldots\right)$$
$$+ \int dx\left(N\omega + \frac{Pd\omega}{dx} + \frac{Qd^2\omega}{dx^2} + \frac{Rd^3\omega}{dx^3} + \ldots\right)$$

Zur Abkürzung dieses Ausdruckes setzen wir:

$$N + (A - I)\,\mathfrak{N} = N'$$
$$P + (A - I)\,\mathfrak{P} = P'$$
$$Q + (A - I)\,\mathfrak{Q} = Q'$$
$$R + (A - I)\,\mathfrak{R} = R'$$
$$\text{ꝛc.}$$

damit daraus folgender Ausdruck zum Vorschein komme, ähnlich jenem, welchen wir oben behandelt haben, nämlich:

$$\delta\int V dx = V\delta x + \int dx\left(N'\omega + \frac{P'd\omega}{dx} + \frac{Q'd^2\omega}{dx^2} + \frac{R'd^3\omega}{dx^3} + \ldots\right).$$

Wenn wir also hier nach den Integralzeichen die Differenzialien von ω wegschaffen, so werden wir nach §. 86 auf folgenden Ausdruck kommen:

$$\delta\int V dx = \int \omega dx\left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} + \frac{d^4S'}{dx^4} - \ldots\right)$$
$$+ V dx + \omega\left(P' - \frac{dQ'}{dx} + \frac{d^2R'}{dx^2} - \frac{d^3S'}{dx^3} + \ldots\right)$$
$$+ \text{Const.} + \frac{d\omega}{dx}\left(Q' - \frac{dR'}{dx} + \frac{d^2S'}{dx^2} - \ldots\right)$$
$$+ \frac{d^2\omega}{dx^2}\left(R' - \frac{dS'}{dx} + \ldots\right)$$
$$+ \frac{d^3\omega}{dx^3}\left(S' - \ldots\right).$$

Der durch die Integration eingeführten constanten Größe aber muß man einen solchen Werth beylegen, daß für den Anfang der Integration die vollendeten Theile der Formel $\int V dx$ verschwinden, wenn nämlich der erste Theil des Integrales so genommen wird, daß er für denselben Anfangswerth verschwindet; dann aber muß man den ganzen Ausdruck bis zu dem Ende der Integration ausdehnen, für welchen, wie wir bereits angenommen haben, $\int L dx = I = A$ wird.

Zusatz 1.

§. 111. In dem Integraltheile muß man die Veränderlichkeit

durch die ganze Ausdehnung der Integration sich vorstellen, bey den absoluten Theilen aber ist es hinreichend, den Anfang und das Ende der Integration zu berücksichtigen; für beyde Gränzen aber geben die vorgeschriebenen Bedingungen der Variation die Werthe δx, ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$, ꝛc. Hat man aber dann aus den Bedingungen die Constante für den Anfang richtig bestimmt, so bleibt nichts zu thun übrig, als die einzelnen Glieder für das Ende der Integration einzurichten.

Zusatz 2.

§. 112. Für den Anfang der Integration, wo $I = 0$ ist, wird man also erstlich erhalten:

$$N' = N + A\mathfrak{N};\quad P' = P + A\mathfrak{P};\quad Q' = Q + A\mathfrak{Q};\quad R' = R + A\mathfrak{R};\ \text{ꝛc.}$$

für die Differenzialien aber wird, weil $dI = L\,dx$ ist:

$$\frac{dN'}{dx} = \frac{dN}{dx} + \frac{A\,d\mathfrak{N}}{dx} - L\mathfrak{N},$$

eben so für die übrigen, und auf ähnliche Art für die zweyten Differenzialien

$$\frac{d^2N'}{dx^2} = \frac{d^2N}{dx^2} + \frac{A\,d^2\mathfrak{N}}{dx^2} - \frac{2L\,d\mathfrak{N}}{dx} - \frac{\mathfrak{N}\,dL}{dx}.$$

Zusatz 3.

§. 113. Für das Ende der Integration aber, wo $I = A$ ist, wird

$$N' = N;\quad P' = P;\quad Q' = Q;\quad R' = R;\ \text{ꝛc.}$$

Die Differenzialwerthe stellen sich so dar:

$$\frac{dN'}{dx} = \frac{dN}{dx} - L\mathfrak{N};\quad \frac{dP'}{dx} = \frac{dP}{dx} - L\mathfrak{P};\quad \frac{dQ'}{dx} = \frac{dQ}{dx} - L\mathfrak{Q};\ \text{ꝛc.}$$

die des zweyten Grades aber auf folgende Art:

$$\frac{d^2N'}{dx^2} = \frac{d^2N}{dx^2} - \frac{2L\,d\mathfrak{N}}{dx} - \frac{\mathfrak{N}\,dL}{dx},$$

$$\frac{d^2P'}{dx^2} = \frac{d^2P}{dx^2} - \frac{2L\,d\mathfrak{P}}{dx} - \frac{\mathfrak{P}\,dL}{dx},$$

und so ferner.

Anmerkung 1.

§. 114. Obschon die Natur der Variationen und auch die der dahin

gehörigen Fragen schon genugsam aus einander gesetzt worden ist, so scheint doch die Wichtigkeit sowohl, als die Neuheit dieser Materie eine ausgedehntere Auseinandersetzung zu fordern, daß es nicht einmahl überflüssig seyn wird, denselben Gegenstand öfters zu berühren. Da wir uns früher der Geometrie und der Anwendung dieses Calcüls auf die größten und kleinsten Werthe bedient haben, um diese Lehre in ein helleres Licht zu setzen, so wollen wir hier die Sache allgemeiner für die Analysis allein betrachten. Wir betrachten also zuerst irgend eine Relation zwischen den beyden Veränderlichen x und y, es mag diese bekannt oder erst zu bestimmen seyn, und dann irgend einen daraus abgeleiteten Integralausdruck $\int V\,dx$, welcher innerhalb gewisser Gränzen enthalten, oder wenn die Integration von einem gegebenen Anfange bis zu einem gegebenen Ende ausgedehnt wird, ebenfalls immer irgend einen bestimmten Werth annehmen muß. Wie aber jene Relation zwischen x und y auch beschaffen seyn mag, so ändere man sie um so unendlich wenig als man nur will, damit den einzelnen Werthen von x, die um beliebige Variationen δx vermehrt werden, um dieselben Werthe von y ebenfalls um beliebige Variationen δy vermehrt entsprechen; wobey zu bemerken ist, daß so wohl im Anfange als am Ende das Verhältniß dieser Variationen durch die Bedingungen der Aufgabe gegeben werde; diese Variationen aber in der Mitte so allgemein genommen werden, daß sie durch gar kein Gesetz unter einander zusammenhängen. Ferner hat man sich zu denken, daß aus dieser geänderten Relation der Werth derselben Integralformel $\int V\,dx$ von demselben Anfange bis zu demselben Ende ausgedehnt, oder zwischen denselben Gränzen enthalten, bestimmt werde, und es handelt sich nun bloß darum, den Überschuß dieses letzten geänderten Werthes über jenen ersteren Werth der Formel $\int V\,dx$ aufzusuchen. Da dieser Überschuß durch $\delta \int V\,dx$, welcher Ausdruck die Variation der Formel $\int V\,dx$ selbst ist, angedeutet wird, so haben wir bisher die Auflösung dieses Problemes so umfassend gegeben, daß sie alle Fälle begreift, in welchen die Größe V irgend eine Function nicht allein von den Größen x, y, p, q, r, s, ꝛc. ist, sondern auch überdieß irgend einen Integralausdruck $v = \int \mathfrak{V}\,dx$, wie immer enthält.

Anmerkung 2.

§. 115. Was wir in dem vorhergehenden Kapitel rücksichtlich

der constanten Größe, welche der gefundenen Variation beygefügt werden muß, welche nämlich der Integraltheil der Variation von selbst enthält, stillschweigend angenommen haben, das glauben wir bey der Auflösung dieses Problemes näher aus einander setzen zu müssen, da man nämlich bey derley Aufgaben, welche auf Integralausdrücke zurückgeführt werden, immer auf die Gränzen der Integration sehen muß, wenn nämlich das Integrale nichts anders ist, als die Summe der Elemente von einer gegebenen Gränze oder dem Anfange, bis zu einer anderen Gränze oder dem Ende fortgesetzt, so ist diese Betrachtung bey jeder Integration durchaus wesentlich, ohne welche man an einen Werth des Integrals nicht einmahl denken kann. Nach Festsetzung der Gränzen der Integration, nämlich nach der Bestimmung des Anfangs und des Endes, muß, so bald der Integraltheil der Variation so genommen wurde, daß er für den Anfang verschwindet, eine solche constante Größe beygefügt werden, daß auch die unabhängigen Theile für denselben Anfang sich tilgen, und so der ganze Ausdruck der Variation verschwindet. Ist dieses geschehen, so kann man endlich zu dem Ende der Integration fortschreiten, damit auf diese Weise die wahre Variation des vorgelegten Integralausdruckes, vom Anfange bis zum Ende ausgedehnt, erhalten werde.

Diese Lehre der Variationen kann auf Probleme zweyerley Art angewendet werden; bey der einen Art wird die zwischen den Veränderlichen x und y bestehende Relation als gegeben angenommen, und die Variation der ebenfalls gegebenen Integralformel $\int V\,dx$ aufgesucht, nachdem man durch die ganze Ausdehnung der Integration den Veränderlichen x und y was immer für Variationen beygelegt hat; bey der andern Gattung von Aufgaben aber wird jene Relation zwischen den Veränderlichen x und y gesucht, damit die Variation des Integralausdruckes $\int V\,dx$ eine gewisse Eigenschaft erhält; daß z. B. in dem Falle, wenn jener Ausdruck einen größten oder kleinsten Werth erhalten soll, diese Variation verschwinden muß. Hier biethen sich abermahls zwey Fälle dar, je nachdem ein Maximum oder ein Minimum Statt finden soll; wenn entweder den Größen x und y was immer für Variationen beygelegt werden, oder wenn diese Variationen bloß an irgend ein bestimmtes Gesetz gebunden sind. Hieraus geht nun hervor, daß diese Theorie weit allgemeiner sey, als sie bisher in Anwendung gebracht worden ist.

Aufgabe 10.

§. 116. Wenn die Function V außer den beyden Veränderlichen x und y mit ihren Differenzialwerthen

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{dp}{dx}, \quad r = \frac{dq}{dx}, \text{ u. s. w.}$$

auch noch zwey oder mehrere Integralformeln

$$v = \int \mathfrak{V} dx; \quad v' = \int \mathfrak{V}' dx; \text{ ꝛc.}$$

enthält, so daß

$$d\mathfrak{V} = \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \ldots$$
$$d\mathfrak{V}' = \mathfrak{M}' dx + \mathfrak{N}' dy + \mathfrak{P}' dp + \mathfrak{Q}' dq + \mathfrak{R}' dr + \ldots$$

wird, und, nachdem man das Differenziale genommen hat:

$$dV = L dv + L' dv' + M dx + N dy + P dp + Q dq + \ldots;$$

die Variation des Integralausdruckes $\int V dx$ zu finden.

Auflösung.

Wenn die Auflösung dieses Problemes auf dieselbe Art vorgenommen wird, wie die der vorhergehenden Aufgabe, so wird man bald einsehen, daß die Rechnung durch die beyden Integralausdrücke

$$v = \int \mathfrak{V} dx \quad \text{und} \quad v' = \int \mathfrak{V}' dx$$

nicht gestört werde, selbst dann nicht, wenn deren noch mehrere vorkommen würden. Die ganze Auflösung wird daher endlich darauf zurückgebracht werden, daß nach Festsetzung der Gränzen der Integration zuerst die Integralien

$$\int L dx = I \quad \text{und} \quad \int L' dx = I'$$

so genommen werden müssen, daß sie für den Anfang der Integration verschwinden; daß aber dann für das Ende der Integration $I = A$ und $I' = A'$ werde. Sind diese Größen gefunden, so setze man ferner:

$$N + (A - I)\,\mathfrak{N} + (A' - I')\,\mathfrak{N}' = N'$$
$$P + (A - I)\,\mathfrak{P} + (A' - I')\,\mathfrak{P}' = P'$$
$$Q + (A - I)\,\mathfrak{Q} + (A' - I')\,\mathfrak{Q}' = Q'$$
$$R + (A - I)\,\mathfrak{R} + (A' - I')\,\mathfrak{R}' = R'$$

u. s. w.,

und die gesuchte Variation wird, wenn jeder der beyden Veränderlichen

was immer für Variationen beygelegt werden, nach der vorhergehenden Auflösung seyn:

$$\delta \int V dx = \int \omega dx \left[N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} + \frac{d^4S'}{dx^4} - \ldots\right]$$
$$+ V\delta x + \omega \left[P' - \frac{dQ'}{dx} + \frac{d^2R'}{dx^2} - \frac{d^3S'}{dx^3} + \ldots\right]$$
$$+ \text{Const.} + \frac{d\omega}{dx}\left[Q' - \frac{dR'}{dx} + \frac{d^2S'}{dx^2} - \ldots\right]$$
$$+ \frac{d^2\omega}{dx^2}\left[R' - \frac{dS'}{dx} + \ldots\right]$$
$$+ \frac{d^3\omega}{dx^3}\left[S' - \ldots\right],$$

wobey wegen der Bequemlichkeit das Element dx constant genommen wurde.

Zusatz.

§. 117. Wenn also auch mehrere Integralausdrücke von der Form $\int \mathfrak{V} dx$ wie immer in der Function V erscheinen, so wird dadurch der Ausdruck der gesuchten Variation nicht geändert, sondern man muß aus derselben bloß die Größen N', P', Q', R', ꝛc. richtig bestimmen.

Anmerkung.

§. 118. Obgleich die Integralformeln

$$I = \int L dx, \quad I' = \int L' dx$$

zwey Veränderliche enthalten, und daher keiner bestimmten Werthe fähig zu seyn scheinen, so muß man denn doch erwägen, daß bey allen Problemen dieser Art immer eine gewisse Relation zwischen den beyden Veränderlichen x und y vorausgesetzt werde, diese mag entweder unmittelbar gegeben, oder erst durch Rechnung zu bestimmen seyn. Nimmt man also nun diese Relation selbst zu Hülfe, damit die Größe y als eine Function von x angesehen werden könne, so werden jene Integralausdrücke auch bestimmte Werthe erhalten.

Aufgabe 11.

§. 119. Wenn die Function $\mathfrak{V}$ außer den Veränderlichen x und y und ihren Differenzialwerthen p, q, r, s, ꝛc. auch noch den Integralausdruck $u = \int v dx$ enthält, so daß das Differenziale derselben die Form erhält:

$d\mathfrak{V} = L\,dv + \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy + \mathfrak{P}dp + \mathfrak{Q}dq + \mathfrak{R}dr +$ ꝛc.
wobey

$$dv = m\,dx + n\,dy + p\,dp + q\,dq + r\,dr + \dots$$

ist, wenn ferner V irgend eine Function der Größen x, y, p, q, r, ꝛc. und der Integralformel $v = \int \mathfrak{V} dx$ ist, so daß

$$dV = L\,dv + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \dots$$

wird; die Variation der Integralformel $\int V dx$ zu finden.

Auflösung.

Nach der Aufgabe 9 finden wir sogleich die Variation des Integralausdruckes $\int \mathfrak{V} dx = v$; denn werden die Gränzen der Integration festgesetzt, und das Integrale $\int L\,dx = \mathfrak{J}$ so genommen, daß es für den Anfang der Integration verschwindet, für das Ende derselben aber $\mathfrak{J} = \mathfrak{A}$ wird; so setze man Kürze halber

$$\mathfrak{N} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{J})\,n = \mathfrak{N}'$$
$$\mathfrak{P} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{J})\,p = \mathfrak{P}'$$
$$\mathfrak{Q} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{J})\,q = \mathfrak{Q}'$$
ꝛc.

so wird man nach der Auflösung jenes Problemes erhalten:

$$\delta v = \mathfrak{V}\delta x + \int dx \left[\mathfrak{N}'\omega + \frac{\mathfrak{P}'d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}'d^2\omega}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R}'d^3\omega}{dx^3} + \dots\right],$$

wenn $\omega = \delta y - p\,\delta x$ gesetzt, und dx constant genommen wird.

Da nun aber $\delta \int V dx$ gesucht wird, so wird man, weil

$$\delta \int V dx = V\delta x + \int [dx\,\delta V - dV\,\delta x]$$

ist, wenn Kürze halber

$$dV = L\,dv + dW \quad \text{und} \quad \delta V = L\,\delta V + \delta W$$

gesetzt wird, damit man

$$dW = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \dots$$

erhält, finden, wie wir a. a. O. gesehen haben:

$$\delta \int V dx = V\delta x + \int [L\,dx\,\delta v - L\,dv\,\delta x]$$
$$+ \int dx \left[N\omega + \frac{P\,d\omega}{dx} + \frac{Q\,d^2\omega}{dx^2} + \frac{R\,d^3\omega}{dx^3} + \dots\right]$$

Werden hier für dv und δv die so eben gefundenen Werthe sub-

stituirt, so wird man erhalten:

$$dx\delta v - dv\delta x = dx\int dx\left[\mathfrak{N}'\omega + \frac{\mathfrak{P}'d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}'d^2\omega}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R}'d^3\omega}{dx^3} + \ldots\right]$$

Nun setze man $\int L\,dx = I$, so wird man, wenn das Integrale so genommen wird, daß es im Anfange der Integration verschwindet, am Ende derselben aber $I = A$ wird, haben:

$$\int L\,[dx\delta v - dv\delta x) =$$
$$= \int(A - I)\,dx\left[\mathfrak{N}'\omega + \frac{\mathfrak{P}'d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}'d^2\omega}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R}'d^3\omega}{dx^3} + \ldots\right].$$

Man substituire nun für $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{R}'$, ꝛc. wieder die oben angenommenen Werthe, und setze, um die Rechnung abzukürzen:

$$N + (A - I)\,\mathfrak{N} + (A - I)\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{I})\,\mathfrak{n} = N'$$
$$P + (A - I)\,\mathfrak{P} + (A - I)\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{I})\,\mathfrak{p} = P'$$
$$Q + (A - I)\,\mathfrak{Q} + (A - I)\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{I})\,\mathfrak{q} = Q'$$
$$R + (A - I)\,\mathfrak{R} + (A - I)\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{I})\,\mathfrak{r} = R'$$

u. s. w.

so sieht man ein, daß die gesuchte Variation folgende seyn werde:

$$\delta\int V\,dx = V\delta x + \int dx\left[N'\omega + \frac{P'd\omega}{dx} + \frac{Q'd^2\omega}{dx^2} + \frac{R'd^3\omega}{dx^3} + \ldots\right].$$

Diese Formel wird durch fernere Entwickelung auf denselben Ausdruck gebracht, welchen ich gegen das Ende der Aufgabe 9 (§. 110) dargestellt habe, weßhalb es also überflüssig wäre, denselben hier nochmahls beyzusetzen.

Zusatz 1.

§. 120. Es ist also hier der Integralausdruck $\int V\,dx$, dessen Variation wir angegeben haben, so beschaffen, daß nicht allein die Function V die Integralformel $\int \mathfrak{V}\,dx$ enthält, sondern daß auch diese Function $\mathfrak{V}$ einen andern Integralausdruck $\int \mathfrak{v}\,dx$ einschließt, wo aber die Function $\mathfrak{v}$ weiter keine Integralformel mit sich führt.

Zusatz 2.

§. 121. Wenn aber auch diese Function $\mathfrak{v}$ noch einen Integralausdruck enthält, so ist hinreichend klar, wie man dann die Auflösung einrichten müsse, wenn nämlich die Werthe N', P', Q', R', ꝛc. auch noch Theile aufnehmen werden, die von dem letzten Integralausdrucke abhängig sind.

Anmerkung.

§. 122. So verwickelt demnach die Integralformel $\int V\,dx$ auch seyn mag, so sind dennoch die bisher erklärten Vorschriften zureichend, die Variation desselben aufzufinden, wenn auch die Zusammensetzung unendlich wäre. Da also alle Ausdrücke, welche zwey Veränderliche enthalten, deren Variationen aufzufinden sind, entweder von Integralformeln frey sind, oder deren eine oder mehrere enthalten, und mögen diese einfach oder wie immer zusammengesetzt seyn, so glaube ich diesen Theil der Variationsrechnung, welcher sich mit zwey Variablen beschäftiget, hinreichend deutlich und vollständig aus einander gesetzt zu haben, so daß kaum etwas zu wünschen übrig bleiben dürfte. Ich gehe deßhalb zu den Formeln, welche drey Veränderliche enthalten, über, und zwar zuerst zu solchen, bey welchen angenommen wird, daß ihre Relation durch zwey Gleichungen bestimmt werde, so daß zwey Veränderliche gleichsam als Functionen der dritten Variablen angesehen werden können, diese doppelte Relation mag entweder bekannt, oder aus der Natur der Variation selbst aufzufinden seyn.

Kapitel V.

Von der Variation der Integralformeln, welche drey Veränderliche mit sich führen, und eine doppelte Relation enthalten.

Aufgabe 12.

§. 123. **Wenn irgend eine Formel, die die drey Veränderlichen x, y und z mit ihren Differenzialien von was immer für einem Grade enthält, gegeben ist, die Variation derselben, welche aus den Variationen aller drey Veränderlichen entspringt, zu bestimmen.**

Auflösung.

Sey W dieser vorgelegte Ausdruck und man suche zuerst den geänderten Werth $W + \delta W$, welcher entsteht, wenn statt der Veränderlichen x, y, z ihre geänderten Werthe

$$x + \delta x, \quad y + \delta y, \quad z + \delta z$$

gesetzt werden, und auf ähnliche Art für ihre Differenzialien

$$dx + d\delta x, \quad dy + d\delta y, \quad dz + d\delta z,$$

u. s. w. Zieht man nun von diesen geänderten Werthen den Ausdruck W selbst ab, so wird die Variation δW desselben als Rest bleiben. Man sieht daher ein, daß diese Variation durch die gewöhnliche Differenziation erhalten werde, wenn man nur statt des Differenziationszeichens d, das Variationszeichen δ schreibt. Es wird gut seyn, zu bemerken, daß, wenn man die Variation der Differenzialien nehmen muß, es gleichgültig sey, an welche Stelle zwischen die Differenziationszeichen das Variationszeichen δ gesetzt wird, wie wir bereits oben erwiesen haben. Man wird daher das Variationszeichen immer an die letzte Stelle setzen können, welches, wenn wir zu der Integralformel übergehen wollen, am bequemsten zu seyn scheint, wie zur Genüge aus dem erhellt, was wir bisher von den Integralformeln mit zwey veränderlichen Größen gelehrt haben.

Zusatz 1.

§. 124. Weil z eben so gut wie y als eine Function von x angesehen werden kann, so wird man, wenn

$$\frac{dy}{dx} = p \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx} = \mathfrak{p}$$

setzt wird, erhalten:

$$\delta p = \frac{d\delta y - p\,d\delta x}{dx} \quad \text{und} \quad \delta \mathfrak{p} = \frac{d\delta z - \mathfrak{p}\,d\delta x}{dx},$$

d auf ähnliche Art weichen auch die hieraus abgeleiteten Formeln n den obigen nicht ab.

Zusatz 2.

§. 125. Setzen wir

$$\delta y - p\delta x = \omega \quad \text{und} \quad \delta z - \mathfrak{p}\delta x = \mathfrak{w},$$

werden wir erhalten:

$$d\delta y - p\,d\delta x - q\,dx\,\delta x = d\omega \quad \text{und}$$
$$d\delta z - \mathfrak{p}\,d\delta x - \mathfrak{q}\,dx\,\delta x = d\mathfrak{w},$$

nn wir nämlich

$$\frac{dp}{dx} = q \quad \text{und} \quad \frac{d\mathfrak{p}}{dx} = \mathfrak{q}$$

en, woraus erhellt, daß

$$\delta p - q\delta x = \frac{d\omega}{dx} \quad \text{und} \quad \delta\mathfrak{p} - \mathfrak{q}\delta x = \frac{d\mathfrak{w}}{dx}$$

n werde.

Zusatz 3.

§. 126. Setzen wir ferner

$$\frac{dq}{dx} = r; \quad \frac{d\mathfrak{q}}{dx} = \mathfrak{r}; \quad \frac{dr}{dx} = s; \quad \frac{d\mathfrak{r}}{dx} = \mathfrak{s}, \text{ u. s. w.}$$

werden wir, wenn dx constant genommen wird, erhalten:

$$\delta q - r\delta x = \frac{d^2\omega}{dx^2}; \quad \delta\mathfrak{q} - \mathfrak{r}\delta x = \frac{d^2\mathfrak{w}}{dx^2}$$
$$\delta r - s\delta x = \frac{d^3\omega}{dx^3}; \quad \delta\mathfrak{r} - \mathfrak{s}\delta x = \frac{d^3\mathfrak{w}}{dx^3}$$

so weiter fort.

Anmerkung 1.

§. 127. Es mag also der zu variirende Ausdruck einen endlichen : unendlichen oder verschwindenden Werth haben, so wird man im- mit Hülfe dieser Vorschriften die Variation desselben eben so wie i finden können, denn diese Regeln weichen von den obigen

nur darin ab, daß hier Differenzialwerthe zweyerley Art, von denen die einen durch die lateinischen Buchstaben p, q, r, s, u. s. w., die andern aber durch die deutschen Buchstaben 𝔭, 𝔮, 𝔯, 𝔰, ... angezeigt sind. Der Grund hiervon liegt darin, daß hier jede der beyden Veränderlichen y und z als eine Function von x betrachtet werden kann. Würde aber zwischen den drey Coordinaten nur eine einzige Gleichung gegeben oder gesucht, so würden die hier eingeführten Buchstaben p und 𝔭 keine bestimmten Werthe erhalten, indem ohne Beeinträchtigung jener Gleichung, die Brüche $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ allerdings alle möglichen Werthe annehmen könnten. Läßt man aber diese Buchstaben weg, und behält die Differenzialien selbst in der Rechnung bey, so wird auch für diesen Fall die in der Auflösung erklärte Regel die Variation geben.

Anmerkung 2.

§. 128. Ich habe schon oben bemerkt, daß man diesen Fall für drey veränderliche Größen, deren Relation durch eine zweyfache Gleichung bestimmt wird, von jenem Falle, wo die Relation durch eine einzige Gleichung bestimmt angenommen wird, sorgfältig unterscheiden müsse. Über diesen Unterschied verbreitet die Geometrie das hellste Licht, wo die drey Veränderlichen drey Coordinaten bezeichnen. So viele veränderliche Größen muß man in der Rechnung nicht allein dann gebrauchen, wenn man sich mit den Flächen beschäftiget, sondern auch in dem Falle, in welchem man krumme Linien, die nicht in derselben Ebene liegen, untersucht. In diesem letztern Falle erfordert die Bestimmung einer Curve zwey Gleichungen zwischen den drey Coordinaten, so daß je zwey derselben als Functionen der dritten angesehen werden können. Die Natur einer Fläche aber wird schon durch eine einzige Gleichung zwischen den drey Coordinaten bestimmt, so daß eine jede derselben als eine Function der beyden übrigen betrachtet werden kann, woraus der bedeutende Unterschied in der Behandlungsweise hervorgeht. Das gegenwärtige Kapitel wird sich also mit der Aufsuchung solcher krummer Linien beschäftigen, welche nicht in derselben Ebene liegen, und denen die Eigenschaft eines Maximums oder Minimums zukömmt.

Aufgabe 13.

§. 129. Die Variation des Integralausdruckes $\int V dx$ zu finden, wenn V irgend eine Function der

drey Veränderlichen x, y, z bezeichnet, und überdieß ihre Differenzialien irgend einer Ordnung enthält, und wenn jene Veränderlichen was immer für Variationen erleiden.

Auflösung.

Mögen auch was immer für Differenzialien in der Function V erscheinen, so werden dieselben durch die Substitutionen

$$dy = p\,dx, \quad dp = q\,dx, \quad dq = r\,dx, \quad dr = s\,dx, \text{ etc.}$$
$$dz = \mathfrak{p}\,dx, \quad d\mathfrak{p} = \mathfrak{q}\,dx, \quad d\mathfrak{q} = \mathfrak{r}\,dx, \quad d\mathfrak{r} = \mathfrak{s}\,dx, \text{ etc.}$$

wegfallen, und die Größe V wird als Function der endlichen Größen x, y, z, p, q, r, s, etc., $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s}$, etc. erscheinen. Das Differenziale jenes Ausdrucks wird daher folgende Form annehmen:

$$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds + \ldots$$
$$+ \mathfrak{N} dz + \mathfrak{P} d\mathfrak{p} + \mathfrak{Q} d\mathfrak{q} + \mathfrak{R} d\mathfrak{r} + \mathfrak{S} d\mathfrak{s} + \ldots$$

Werden daher die Differenziationszeichen d mit δ vertauscht, so wird man zugleich die Variation δN erhalten. Den oben erwiesenen Principien gemäß wird man auch für diesen Fall dreyer Veränderlichen erhalten:

$$\delta\int V dx = \int(V d\delta x + dx\delta V) = V\delta x + \int(dx\delta V - dV\delta x)$$

und nach gehöriger Substitution findet man die Gleichung

$$\frac{dx\delta V - dV\delta x}{dx} = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots$$
$$+ \mathfrak{N}\delta z + \mathfrak{P}\delta\mathfrak{p} + \mathfrak{Q}\delta\mathfrak{q} + \mathfrak{R}\delta\mathfrak{r} + \ldots$$
$$- M\delta x - Np\delta x - Pq\delta x - Qr\delta x - Rs\delta x - \ldots$$
$$- \mathfrak{N}\mathfrak{p}\delta x - \mathfrak{P}\mathfrak{q}\delta x - \mathfrak{Q}\mathfrak{r}\delta x - \mathfrak{R}\mathfrak{s}\delta x - \ldots$$

Wenn wir nun Kürze halber setzen:

$$\delta y - p\delta x = \omega \quad \text{und} \quad \delta z - \mathfrak{p}\delta x = \mathfrak{w},$$

wobey das Element dx constant genommen wird, so erhalten wir nach §§. 125 und 126:

$$\delta p - q\delta x = \frac{d\omega}{dx}; \quad \delta\mathfrak{p} - \mathfrak{q}\delta x = \frac{d\mathfrak{w}}{dx}$$
$$\delta q - r\delta x = \frac{d^2\omega}{dx^2}; \quad \delta\mathfrak{q} - \mathfrak{r}\delta x = \frac{d^2\mathfrak{w}}{dx^2}$$
$$\delta r - s\delta x = \frac{d^3\omega}{dx^3}; \quad \delta\mathfrak{r} - \mathfrak{s}\delta x = \frac{d^3\mathfrak{w}}{dx^3}$$

u. s. w.

Es wird sich daher die gesuchte Variation bequem auf folgende Art ausdrücken lassen:

$$\delta \int V dx = V\delta x + \int dx \begin{cases} N\omega + \frac{P d\omega}{dx} + \frac{Q d^2\omega}{dx^2} + \frac{R d^3\omega}{dx^3} + \ldots \\ \mathfrak{N}\mathfrak{w} + \frac{\mathfrak{P} d\mathfrak{w}}{dx} + \frac{\mathfrak{Q} d^2\mathfrak{w}}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R} d^3\mathfrak{w}}{dx^3} + \ldots \end{cases}$$

welcher Ausdruck eben so, wie oben, auf folgende Form gebracht wird:

$$\begin{aligned} \delta \int V dx = &+ \int \omega dx \left[N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \ldots\right] \\ &+ \int \mathfrak{w} dx \left[\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \frac{d^4\mathfrak{S}}{dx^4} - \ldots\right] \\ &+ V\delta x + \omega \left[P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \ldots\right] \\ &+ \text{Const.} + \mathfrak{w} \left[\mathfrak{P} - \frac{d\mathfrak{Q}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{R}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{S}}{dx^3} + \ldots\right] \\ &+ \frac{d\omega}{dx}\left[Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} - \ldots\right] \\ &+ \frac{d\mathfrak{w}}{dx}\left[\mathfrak{Q} - \frac{d\mathfrak{R}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{S}}{dx^2} - \ldots\right] \\ &+ \frac{d^2\omega}{dx^2}\left[R - \frac{dS}{dx} + \ldots\right] \\ &+ \frac{d^2\mathfrak{w}}{dx^2}\left[\mathfrak{R} - \frac{d\mathfrak{S}}{dx} + \ldots\right] \\ &+ \frac{d^3\omega}{dx^3}\left[S - \ldots\right] \\ &+ \frac{d^3\mathfrak{w}}{dx^3}\left[\mathfrak{S} - \ldots\right] \\ &+ \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die Natur dieses Ausdruckes erhellt aus dem Vorhergehenden zur Genüge, und rücksichtlich der Beyfügung einer constanten Größe gelten dieselben Bemerkungen.

Zusatz 1.

§. 130. Bey dieser Auflösung werden die beyden Veränderlichen y und z als Functionen von x angesehen, die entweder schon bekannt sind, oder die erst aus der Natur der Variation bestimmt werden müssen; und es würde der Integralausdruck $\int V dx$ auch keinen bestimmten Werth erhalten, wenn man sich nicht vorstellen würde, daß sowohl y als z durch x bestimmt werden.

Zusatz 2.

§. 131. Ist die Formel $V\,dx$ für sich integrabel, so kann, wenn zwischen den drey Veränderlichen x, y, z keine Relation festgesetzt wird, die Variation des Integralausdruckes $\int V\,dx$ auch keine Integralformeln enthalten, und daher müssen nothwendig folgende Gleichungen bestehen:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \ldots = 0 \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \frac{d^4\mathfrak{S}}{dx^4} - \ldots = 0.$$

Zusatz 3.

§. 132. Umgekehrt, wenn diese beyden Gleichungen Statt finden, so wird dieß ein sicheres Kennzeichen seyn, daß die Differenzialformel $V\,dx$ für sich die Integration zuläßt, wenn zwischen den Veränderlichen keine Relation festgesetzt ist.

Beyspiel.

§. 133. Um dieses Kennzeichen noch näher zu beleuchten, wollen wir eine solche, für sich integrable Formel annehmen, und es sey

$$\int V\,dx = \frac{z\,dy}{x\,dz} = \frac{pz}{xp},$$

so erhält man:

$$V = \frac{-pz}{x^2p} + \frac{p}{x} + \frac{zq}{xp} - \frac{zpq}{xp^2}.$$

Durch Differenziation dieses Ausdruckes finden wir $N = 0$, und

$$P = \frac{-z}{x^2p} + \frac{1}{x} - \frac{zq}{xp^2}; \quad Q = \frac{z}{xp}, \quad \text{ferner}$$

$$\mathfrak{N} = \frac{-p}{x^2p} + \frac{q}{xp} - \frac{pq}{xp^2},$$

$$\mathfrak{P} = \frac{pz}{x^2p^2} - \frac{zq}{xp^2} + \frac{2zpq}{xp^3} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{-zp}{xp^2}.$$

Für die erste Gleichung muß nun wegen $N = 0$ werden:

$$-\frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0 \quad \text{oder} \quad P - \frac{dQ}{dx} = \text{Const.},$$

wovon man sich sogleich durch die Differenziation von Q überzeugt.

Für die andere Gleichung wird:

$$\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{Q}}{dx^2} = 0,$$

und weil man hieraus

$$\int \mathfrak{N} dx = \mathfrak{P} - \frac{d\mathfrak{Q}}{dx}$$

findet, so muß zuerst folgender Ausdruck integrabel seyn:

$$\mathfrak{N} dx = \frac{-p dx}{x^2 p} + \frac{q dx}{x p} - \frac{p dx}{x p^4},$$

und daher wird, weil $q dx = dp$ ist, offenbar

$$\int \mathfrak{N} dx = \frac{p}{x p}.$$

Es wird demnach nur noch das Bestehen der Gleichung

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{dx} = \mathfrak{P} - \int \mathfrak{N} dx = \frac{p z}{x^2 p^2} - \frac{z q}{x p^2} + \frac{2 z p q}{x p^3} - \frac{p}{x p}$$

erfordert, und durch Differenziation des Ausdruckes $\mathfrak{Q} = \frac{-z p}{x p^2}$ zeigt sich, daß jene beyden Größen wirklich vollkommen gleich sind.

Anmerkung 1.

§. 134. Wenn es sich demnach darum handelt, der Integralformel $\int V dx$ einen größten oder kleinsten Werth beyzulegen, dann muß man vor Allem in der Variation derselben beyde Integraltheile und zwar jeden für sich gleich Null setzen, besonders weil, so viele Variationen auch genommen werden mögen, die Variation $\delta \int V dx$ immer verschwinden muß, und dadurch ergeben sich die beyden Gleichungen

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \frac{d^4 S}{dx^4} - \ldots = 0, \text{ und}$$

$$\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \frac{d^4\mathfrak{S}}{dx^4} - \ldots = 0,$$

wodurch zwischen den drey Veränderlichen x, y, z die Relation so ausgedrückt wird, daß dann sowohl y als z wirklich als eine Function von x angesehen werden kann. Sind aber diese Gleichungen Differenzialgleichungen, und zwar von einem höhern Grade, dann werden bey jeder derselben durch Integration eben so viele willkürliche constante Größen in die Rechnung verwebt, vom wie vielsten Grade jede der beyden Differenzialgleichungen ist. Diese Constanten müssen aber dann so bestimmt werden, daß den Bedingungen, welche sowohl für den

Anfang als das Ende der Integration des Ausdruckes $\int V dx$ vorgeschrieben sind, Genüge geschieht, welche Rechnung darauf hinausgeht, daß auch die absoluten Theile der Variation auf Null reducirt werden. Es muß nämlich zuerst die Constans so bestimmt werden, daß den für den Anfang vorgeschriebenen Bedingungen Genüge geleistet wird, wobey der Natur der Frage gemäß die kleinen Theilchen

$$\omega,\ w,\ \frac{d\omega}{dx},\ \frac{dw}{dx},\ \frac{d^2\omega}{dx^2},\ \frac{d^2w}{dx^2},\ \text{ꝛc.}$$

gewöhnlich bestimmte Werthe erhalten. Da aber dasselbe gegen das Ende der Integration geschieht, so werden aus den einzelnen Werthen die durch Integration eingeführten Constanten bestimmt werden.

Anmerkung 2.

§. 135. Es wird gut seyn, hier zu bemerken, daß die Glieder, durch welche die Variation $\delta \int V dx$ ausgedrückt wird, von selbst in zwey Classen zerfallen; in einer derselben erscheinen bloß jene Buchstaben, welche sich auf die Veränderlichkeit von y, oder auf ihre Form in Bezug auf x beziehen, und zwar so, als wenn die Größe z constant genommen wäre; in der andern Classe aber kommen die ähnlichen, bloß von der Veränderlichkeit von z abhängigen Buchstaben vor, wobey y gleichsam als eine constante Größe erscheint. Hieraus kann man nun folgern, daß, wenn noch eine vierte Veränderliche v hinzukömmt, welche ebenfalls als eine Function von x angesehen werden kann, dann zu jenen zwey Classen noch eine dritte beygefügt werden müsse, welche die ähnlichen, bloß von der Veränderlichkeit von v abhängigen Glieder enthält. Man kann daher die hier gegebene Auflösung so ansehen, als erstrecke sie sich auf beliebig viele veränderliche Größen, wenn man sich nur zwischen denselben so viele Gleichungen als gegeben denkt, daß sie sämmtlich als Functionen einer einzigen Veränderlichen betrachtet werden können. Obgleich sich also dieses Kapitel bloß mit drey Veränderlichen beschäftiget, so muß man sich dasselbe dennoch auf beliebig viele Variable ausgedehnt denken, wenn nur solche Bedingungen vorgelegt werden, daß endlich durch eine einzige Veränderliche alle übrigen bestimmt werden: eine solche Bedingung aber enthalten nothwendig die Integralausdrücke von der Form $\int V dx$; denn so viele Veränderliche auch in der Größe V erscheinen mögen, so kann der Ausdruck $\int V dx$ allerdings nur dann einen bestimmten Werth erhalten, wenn alle Veränderlichen als Functionen einer einzigen Veränderlichen x angesehen

werden können. Ganz anders aber verhält es sich mit jenen Integralformeln, welche sich auf zwey oder mehrere Veränderliche beziehen, die durchaus nicht von einander abhängen.

Aufgabe 14.

§. 136. **Wenn die Function V außer den drey Veränderlichen x, y, z und ihren Differenzialien irgend eines Grades, auch noch den Integralausdruck**

$$v = \int \mathfrak{V} dx$$

enthält, wo $\mathfrak{V}$ irgend eine Function derselben Veränderlichen x, y, z und ihrer Differenzialien bezeichnen mag, die Variation des Integralausdruckes $\int V dx$ aufzufinden.

Auflösung.

Damit die Differenzialien zum Scheine wenigstens aus der Rechnung verschwinden, setzen wir wie früher

$$dy = p dx, \quad dp = q dx, \quad dq = r dx, \quad dr = s dx, \quad \text{u.s.w.}$$
$$dz = \mathfrak{p} dx, \quad d\mathfrak{p} = \mathfrak{q} dx, \quad d\mathfrak{q} = \mathfrak{r} dx, \quad d\mathfrak{r} = \mathfrak{s} dx, \quad \text{u.s.w.}$$

und durch Differenziation der Function V soll man erhalten:

$$dV = L dv + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \ldots$$
$$+ \mathfrak{N} dz + \mathfrak{P} d\mathfrak{p} + \mathfrak{Q} d\mathfrak{q} + \mathfrak{R} d\mathfrak{r} + \ldots$$

dann aber sey, weil $dv = \mathfrak{V} dx$ ist:

$$d\mathfrak{V} = M' dx + N' dy + P' dp + Q' dq + R' dr + \ldots$$
$$+ \mathfrak{N}' dz + \mathfrak{P}' d\mathfrak{p} + \mathfrak{Q}' d\mathfrak{q} + \mathfrak{R}' d\mathfrak{r} + \ldots,$$

wobey ich, wegen Mangel an Buchstaben, die nämlichen, durch einen Accent unterschiedenen Lettern gebrauche. Hieraus ergeben sich aber zugleich die Variationen derselben Größe V und $\mathfrak{V}$. Da man nun die Variation $\delta \int V dx$ sucht, so werden wir zuerst wie früher erhalten:

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int (dx \delta V - dV \delta x),$$

und da hier der Werth von V von dem vorhergehenden bloß dadurch verschieden ist, daß hier zu dem Differenziale dV desselben noch der Theil $L dv = L \mathfrak{V} dx$ hinzukömmt, und zu der Variation δV noch der Theil $L \delta v = L \delta \int \mathfrak{V} dx$; so wird auch die gesuchte Variation $\delta \int V dx$ durch die früher gefundene Form ausgedrückt werden, wenn man derselben nur noch folgendes Glied zusetzt:

$$\int L \left[dx \delta \int \mathfrak{V} dx - \mathfrak{V} dx \delta x\right] = \int L dx \left(\delta \int \mathfrak{V} dx - \mathfrak{V} \delta x\right).$$

Weil aber der Integralausdruck $\int \mathfrak{V} dx$ derselbe ist, welcher in dem vorhergehenden Probleme behandelt wurde, so werden wir, wenn wir, wie am angeführten Orte geschehen ist,

$$\delta y - p \delta x = \omega \quad \text{und} \quad \delta z - \mathfrak{p} \delta x = \mathfrak{w}$$

setzen, und das Element dx constant nehmen, erhalten:

$$\delta \int \mathfrak{V} dx - \mathfrak{V} \delta x = \int dx \begin{Bmatrix} N'\omega + \frac{P' d\omega}{dx} + \frac{Q' d^2\omega}{dx^2} + \frac{R' d^3\omega}{dx^3} + \ldots \\ \mathfrak{N}'\mathfrak{w} + \frac{\mathfrak{P}' d\mathfrak{w}}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}' d^2\mathfrak{w}}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R}' d^3\mathfrak{w}}{dx^3} + \ldots \end{Bmatrix}$$

Setzen wir nun das Integrale $\int L dx = I$, indem wir dasselbe so nehmen, daß es für den Anfang der Integration verschwindet, dann aber für die andere Gränze der Integration $I = A$ wird, so werden wir auf diese Art für die ganze Ausdehnung der Integration finden:

$$\int L dx (\delta \int \mathfrak{V} dx - \mathfrak{V} \delta x) = \int (A - I) dx \begin{Bmatrix} N'\omega + \frac{P' d\omega}{dx} + \frac{Q' d^2\omega}{dx^2} + \ldots \\ \mathfrak{N}'\mathfrak{w} + \frac{\mathfrak{P}' d\mathfrak{w}}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}' d^2\mathfrak{w}}{dx^2} + \ldots \end{Bmatrix}$$

Nun führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{array}{ll} N + (A - I) N' = N^o; & \mathfrak{N} + (A - I) \mathfrak{N}' = \mathfrak{N}^o \\ P + (A - I) P' = P^o; & \mathfrak{P} + (A - I) \mathfrak{P}' = \mathfrak{P}^o \\ Q + (A - I) Q' = Q^o; & \mathfrak{Q} + (A - I) \mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}^o \\ R + (A - I) R' = R^o; & \mathfrak{R} + (A - I) \mathfrak{R}' = \mathfrak{R}^o \\ \text{2c.} & \text{2c.} \end{array}$$

und es ist einleuchtend, daß die gesuchte Variation auf folgende Art ausgedrückt werden könne:

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int dx \begin{Bmatrix} N^o\omega + \frac{P^o d\omega}{dx} + \frac{Q^o d^2\omega}{dx^2} + \frac{R^o d^3\omega}{dx^3} + \ldots \\ \mathfrak{N}^o\mathfrak{w} + \frac{\mathfrak{P}^o d\mathfrak{w}}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}^o d^2\mathfrak{w}}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R}^o d^3\mathfrak{w}}{dx^3} + \ldots \end{Bmatrix}$$

welche auch, wie früher, auf folgende Form gebracht werden kann:

$$\begin{aligned} \delta \int V dx = &+ \int \omega dx \left(N^o - \frac{dP^o}{dx} + \frac{d^2 Q^o}{dx^2} - \frac{d^3 R^o}{dx^3} + \frac{d^4 S^o}{dx^4} - \ldots\right) \\ &+ \int \mathfrak{w} dx \left(\mathfrak{N}^o - \frac{d\mathfrak{P}^o}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{Q}^o}{dx^2} - \frac{d^3 \mathfrak{R}^o}{dx^3} + \frac{d^4 \mathfrak{S}^o}{dx^4} - \ldots\right) \\ &+ V \delta x + \omega \left(P^o - \frac{d Q^o}{dx} + \frac{d^2 R^o}{dx^2} - \frac{d^3 S^o}{dx^3} + \ldots\right) \\ &+ \text{Const.} + \mathfrak{w} \left(\mathfrak{P}^o - \frac{d\mathfrak{Q}^o}{dx} + \frac{d^2 \mathfrak{R}}{dx^2} - \frac{d^3 \mathfrak{S}}{dx^3} + \ldots\right) \end{aligned}$$

$$+\frac{d\omega}{dx}\left(Q^{\circ}-\frac{dR^{\circ}}{dx}+\frac{d^2S^{\circ}}{dx^2}-\ldots\right)$$
$$+\frac{dw}{dx}\left(\mathfrak{Q}^{\circ}-\frac{d\mathfrak{R}^{\circ}}{dx}+\frac{d^2\mathfrak{S}^{\circ}}{dx^2}-\ldots\right)$$
$$+\frac{d^2\omega}{dx^2}\left(R^{\circ}-\frac{dS^{\circ}}{dx}+\ldots\right)$$
$$+\frac{d^2w}{dx^2}\left(\mathfrak{R}^{\circ}-\frac{d\mathfrak{S}^{\circ}}{dx}+\ldots\right)$$
$$+\frac{d^3\omega}{dx^3}\left(S^{\circ}-\ldots\right)$$
$$+\frac{d^3w}{dx^3}\left(\mathfrak{S}^{\circ}-\ldots\right),$$

wo sich Niemand an dem Nullzeichen, welches wir den Buchstaben oben beygefügt haben, stoßen wird; denn dieses Zeichen bedeutet keinen Exponenten, sondern es wird bloß gebraucht, um diese Buchstaben von denselben Lettern ohne Zeichen zu unterscheiden.

Zusatz 1.

§. 137. Wenn also der Integralausdruck $\int V dx$ einen größten oder kleinsten Werth haben soll, so muß man sogleich die beyden ersten Glieder der Variation gleich Null setzen, wodurch zwey Differenzialgleichungen zum Vorscheine kommen, mittelst welchen die unbestimmte Relation jeder der Veränderlichen y und z zu x ausgemittelt wird.

Zusatz 2.

§. 138. Obgleich hier die Bedingungen, welche etwa für den Anfang und das Ende der Integration vorgelegt werden, noch nicht berücksichtiget sind, so liegt dennoch diese Rücksicht schon in der Rechnung, weil die Buchstaben I und A auf die Gränzen der Integration sich beziehen. Indessen verschwinden jene Bedingungen bey der Behandlung der Differenzialgleichungen wieder aus der Rechnung; denn während der Integralausdruck $\int L dx = I$ weggeschafft wird, fällt auch die constante Größe A weg.

Zusatz 3.

§. 139. Hat man diese zwey Differenzialgleichungen aufgelöst, und zwar ganz allgemein, damit eben so viele willkürliche Constanten in die Rechnung gebracht werden, wie viele Integrationen ausgeführt werden müßten, dann erst muß man die Bedingungen für beyde Grän-

zen der Integration der Formel $\int V\,dx$ berücksichtigen, wenn nämlich jene Constanten aus den übrigen vollendeten Gliedern der Variation bestimmt werden müssen.

Anmerkung.

§. 140. Die Auflösung dieses Problemes ist so beschaffen, daß man nun deutlich genug sieht, wie man die noch zusammengesetzteren Formeln behandeln müsse; wenn z. B. die Function V mehrere Integralformeln enthält, oder wenn auch die Function 𝔙 neue Integralausdrücke umfaßt. Ja man sieht nun auch ein, wie die Variationen aufzusuchen sind, wenn solche Integralformeln mehr als drey Veränderliche enthalten, und es würde nicht allein unangenehm, sondern auch überflüssig seyn, wenn ich diesen Gegenstand noch weiter verfolgen wollte. Ich gehe also zu dem zweyten Theile dieser Theorie, welcher weit mehr Schwierigkeiten darbiethet, über, wo, wenn die Relationen zwischen den Veränderlichen festgesetzt sind, noch zwey oder mehrere von einander ganz unabhängige Variablen in der Rechnung erscheinen.

Kapitel VI.

Von der Variation der Differenzialformeln, welche drey Veränderliche enthalten, deren Relation durch eine einzige Gleichung ausgedrückt wird.

Aufgabe 15.

§. 141. **Die Variationen der Differenzialformeln des ersten Grades**

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ und } p' = \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

zu bestimmen, wenn eine Gleichung zwischen den drey Veränderlichen x, y und z gegeben ist, denen was immer für Variationen δx, δy, δz beygelegt werden.

Auflösung.

Da wir annehmen, daß eine einzige Gleichung zwischen den drey Veränderlichen gegeben sey, so kann jede derselben als eine Function der beyden andern angesehen werden. Es wird also z eine Function von x und y seyn, und es muß hier erinnert werden, daß der Ausdruck $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ das Verhältniß der Differenzialien von z und x bezeichne, wenn in jener gegebenen Gleichung diese Größen allein als veränderlich behandelt werden, die dritte y aber als constant angesehen wird; eben dieß gilt auch von der andern Formel $p' = \left(\frac{dz}{dy}\right)$. Auf ähnliche Weise können auch die Variationen δx, δy, δz selbst als unendlich kleine Functionen der beyden Veränderlichen x und y betrachtet werden, weil, wenn sie auch von der dritten z abhangen würden, diese selbst eine Function von x und y ist, und man erkennt hieraus zugleich die Bedeutung der Ausdrücke

$$\left(\frac{d\delta z}{dx}\right); \left(\frac{d\delta z}{dy}\right) \text{ und eben so}$$

$$\left(\frac{d\delta x}{dx}\right); \left(\frac{d\delta x}{dy}\right) \text{ und } \left(\frac{d\delta y}{dx}\right); \left(\frac{d\delta y}{dy}\right).$$

Da also

$$p + \delta p = \left(\frac{d(z + \delta z)}{d(x + \delta x)}\right)$$

der geänderte Werth des Ausdruckes $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ ist, wenn nämlich die Veränderliche y constant genommen wird, so findet man, wenn diese Bedingung festgehalten wird:

$$p + \delta p = \left(\frac{dz + d\delta z}{dx + d\delta x}\right) = \left(\frac{dz}{dx} + \frac{d\delta z}{dx} - \frac{dz\, d\delta x}{dx^2}\right),$$

weil die Variationen δx und δz gegen x und z verschwinden. Wegen $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ wird also die gesuchte Variation seyn:

$$\delta p = \left(\frac{d\delta z}{dx}\right) - \left(\frac{dz}{dx} \cdot \frac{d\delta x}{dx}\right) = \left(\frac{d\delta z}{dx}\right) - p\left(\frac{d\delta x}{dx}\right).$$

Die Bedeutung dieser Ausdrücke ist für sich klar, indem sowohl δz als auch δx Functionen von x und y sind, und y hier constant genommen wird. Auf ähnliche Art wird man aber erhalten:

$$\delta p' = \left(\frac{d\delta z}{dy}\right) - p'\left(\frac{d\delta y}{dy}\right),$$

wo nun die Veränderliche x als constant angesehen wird.

Zusatz 1.

§. 142. Es ist also hier alles auf die beyden Veränderlichen x und y zurückgeführt worden, und als Functionen derselben erscheinen nicht bloß die dritte Veränderliche z, sondern auch alle drey Variationen δx, δy, δz, daß aber diese drey Veränderlichen beliebig mit einander vertauscht werden können, ist einleuchtend.

Zusatz 2.

§. 143. Es ist hinreichend, diese beyden Formeln für die Differenzialien des ersten Grades zu gebrauchen, weil die übrigen auf diese sich zurückführen lassen; wenn nämlich

$$\left(\frac{dx}{dz}\right) = \frac{1}{p}; \quad \left(\frac{dy}{dz}\right) = \frac{1}{p'} \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-p}{p'}; \quad \text{und} \quad \left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{-p'}{p}$$

ist, wo p und p' Functionen der beyden Größen x und y bezeichnen.

Zusatz 3.

§. 144. Hat man also die Variationen der beyden Ausdrücke

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right) \quad \text{und} \quad p' = \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

gefunden, so wird man auch hieraus die Variationen der übrigen, eben erwähnten Formeln ohne Schwierigkeit auffinden können, denn man wird erhalten:

$$\delta\left(\frac{dx}{dz}\right) = -\frac{\delta p}{p^2} = -\frac{1}{p^2}\left(\frac{d\delta z}{dx}\right) + \frac{1}{p}\left(\frac{d\delta x}{dx}\right)$$

$$\delta\left(\frac{dy}{dz}\right) = -\frac{\delta p'}{p'^2} = -\frac{1}{p'^2}\left(\frac{d\delta z}{dy}\right) + \frac{1}{p'}\left(\frac{d\delta y}{dy}\right)$$

$$\delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{\delta p}{p'} + \frac{p\,\delta p'}{p'^2} = -\frac{1}{p'}\left(\frac{d\delta z}{dx}\right) + \frac{p}{p'}\left(\frac{d\delta x}{dx}\right)$$
$$+ \frac{p}{p'^2}\left(\frac{d\delta z}{dy}\right) - \frac{p}{p'}\left(\frac{d\delta y}{dy}\right).$$

Anmerkung 1.

§. 145. Ich bemerke hier vor Allem, daß die Differenzialformeln nur dann einen bestimmten Werth haben können, wenn zwey Differenzialien so mit einander verglichen werden, daß die dritte Variable, wenn deren drey vorhanden sind, oder alle übrigen, wenn mehrere vorkommen, als constante Größen erscheinen. So hat in dem Falle, in welchem zwischen den drey Veränderlichen x, y und z eine einzige Gleichung gegeben, oder wenigstens als gegeben gedacht wird, die Formel $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ durchaus keine Bedeutung, wenn nicht die dritte Veränderliche y constant genommen wird, und diese Bedingung pflegt man dadurch anzudeuten, daß man jenen Ausdruck in Klammern einschließt, obgleich man dieß ohne Anstand außer Acht lassen könnte, weil sonst der Ausdruck nicht einmahl eine Bedeutung haben würde. Um dieses noch deutlicher zu zeigen, sey irgend eine Gleichung zwischen den drey Veränderlichen x, y und z gegeben; aus dieser denke man sich den Werth von z bestimmt, so daß z einer gewissen Function von x und y gleich wird, und durch Differenziation derselben soll man erhalten $dz = p\,dx + p'dy$, wo p und p′ wieder gewisse Functionen von x und y seyn werden, und zwar solche, daß die Gleichung

$$\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dp'}{dx}\right)$$

Statt findet. Nimmt man nun y constant, so wird

$$dz = p\,dx \quad \text{oder} \quad p = \left(\frac{dz}{dx}\right),$$

wird aber x als unveränderlich angesehen, so wird $p' = \left(\frac{dz}{dy}\right)$. Es

ist aber auch einleuchtend, daß, wenn y constant genommen wird, $\frac{dy}{dx} = \frac{-p}{p'}$ seyn werde, und es wird zweckmäßig seyn, derley Ausdrücke auszuschließen, wenn sowohl y als auch die Variationen δx, δy und δz als Functionen von x und y dargestellt werden.

Anmerkung 2.

§. 146. Dieser Gegenstand wird durch die Geometrie noch weit mehr aufgeklärt. Denn es mögen unsere drey Variablen x, y, z die drey Coordinaten AX, XY, YZ (Fig. 4) bezeichnen, so wird die zwischen denselben vorgelegte Gleichung irgend eine bestimmte Fläche angeben, in welcher sich die Ordinate $YZ = z$ endigen wird, und die in der That als eine bestimmte Function der beyden übrigen Variablen $AX = x$ und $XY = y$ angesehen werden kann, so daß, wenn die beyden Coordinaten x und y nach Belieben angenommen werden, die dritte $YZ = z$ aus der vorgelegten Gleichung bestimmt wird. Denken wir uns nun irgend eine andere Fläche, welche von dieser unendlich wenig abweicht, und vergleichen dieselbe mit der letztern, so daß jeder Punct z derselben mit einem Puncte Z der gegebenen Fläche verglichen wird, so jedoch, daß das Intervall Zz immer als unendlich klein erscheint, so werden die Variationen so dargestellt werden, daß man erhält:

$$\delta x = Ax - AX = Xx,$$
$$\delta y = xy - XY \text{ und}$$
$$\delta z = yz - YZ,$$

und da diese Variationen ganz unserer Willkür überlassen sind, und auf keine Weise von einander abhängen, so können sie auch als Functionen der beyden Veränderlichen x und y angesehen werden, und zwar so, daß keine von den übrigen abhängt, sondern jede derselben nach Belieben angenommen werden kann. Man sieht hieraus auch ein, daß, weil die nächste Fläche von der vorgelegten verschieden seyn muß, keineswegs die Gleichung

$$\delta z = p\delta x + p'\delta y$$

Statt finden werde, wenn für die vorgelegte Fläche

$$dz = p dx + p' dy$$

ist, denn sonst würde der Punct z in eben dieser Fläche seyn, weßhalb die drey Functionen von x und y für die Variationen δx, δy und δz

allerdings so beschaffen seyn müssen, daß die Gleichung

$$\delta z = p\delta x + p'\delta y$$

nicht Statt findet, sondern vielmehr von diesem Werthe wie immer abweiche, wobey vorzüglich zu bemerken ist, daß diese Functionen so ausgedehnt seyen, daß sie die discontinuirlichen nicht ausschließen, und sogar die Variationen bloß in einem einzigen Puncte oder wenigstens in einem sehr kleinen Raume beliebig angenommen werden können. Um aber hier jeden Zweifel zu beseitigen, muß man wohl bemerken, daß daraus, daß wir z als eine solche Function von x und y annehmen, daß

$$dz = p dx + p' dy$$

wird, keineswegs die Gleichung

$$\delta z = p\delta x + p'\delta y$$

gefolgert werden könne, wie wir oben angenommen haben, besonders weil wir hier der Größe z eine eigene, von den Variationen von x und y ganz unabhängige Variation beygelegt haben.

Aufgabe 16.

§. 147. **Wenn eine Gleichung zwischen den drey Veränderlichen x, y, z gegeben wird, welchen was immer für Variationen δx, δy, δz beygelegt werden, die Variationen folgender Differenzialformeln des zweyten Grades aufzusuchen:**

$$q = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right); \quad q' = \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) \quad \text{und} \quad q'' = \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right).$$

Auflösung.

Hier wird z wieder als eine Function von x und y betrachtet, von welchen auch die drey Variationen δx, δy, δz Functionen sind, die aber auf keine Weise von einander abhängen. Weil wir im vorhergehenden Probleme

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right) \quad \text{und} \quad p' = \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

gesetzt haben, so werden wir mit Hülfe dieser Formen erhalten:

$$q = \left(\frac{dp}{dx}\right); \quad q' = \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dp'}{dx}\right) \quad \text{und} \quad q'' = \left(\frac{dp'}{dy}\right),$$

und hier muß man die Variationen δp und $\delta p'$ berücksichtigen, für

welche wir gefunden haben:

$$\delta p = \left(\frac{d\delta z}{dx}\right) - p\left(\frac{d\delta x}{dx}\right) \text{ und } \delta p' = \left(\frac{d\delta z}{dy}\right) - p'\left(\frac{d\delta y}{dy}\right):$$

unterwerfen wir also diese der Rechnung auf ähnliche Art, so finden wir erstlich

$$\delta q = \left(\frac{d\delta p}{dx}\right) - q\left(\frac{d\delta x}{dx}\right),$$

wo $\left(\frac{d\delta p}{dx}\right)$ gefunden wird, wenn man δp differenzirt, indem man y constant nimmt, und das Differenziale durch dx dividirt, wodurch sich ergibt:

$$\left(\frac{d\delta p}{dx}\right) = \left(\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right) - q\left(\frac{d\delta x}{dx}\right) - p\left(\frac{d^2\delta x}{dx^2}\right) \text{ wegen}$$

$$q = \left(\frac{dp}{dx}\right),$$

woraus wir folgern:

$$\delta q = \left(\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right) - 2q\left(\frac{d\delta x}{dx}\right) - p\left(\frac{d^2\delta x}{dx^2}\right).$$

Auf dieselbe Art wird man wegen $q' = \left(\frac{dp}{dy}\right)$ erhalten:

$$\delta q' = \left(\frac{d\delta p}{dy}\right) - q'\left(\frac{d\delta y}{dy}\right) \text{ oder}$$

$$\left(\frac{d\delta p}{dy}\right) = \left(\frac{d^2\delta z}{dx\,dy}\right) - q'\left(\frac{d\delta x}{dx}\right) - p\left(\frac{d^2\delta x}{dx\,dy}\right),$$

und daher

$$\delta q' = \left(\frac{d^2\delta z}{dx\,dy}\right) - q'\left(\frac{d\delta x}{dx}\right) - q'\left(\frac{d\delta y}{dy}\right) - p\left(\frac{d^2\delta x}{dx\,dy}\right).$$

Behandelt man aber den andern Werth $q' = \left(\frac{dp'}{dx}\right)$ auf ähnliche Art, so gibt dieser

$$\delta q' = \left(\frac{d^2\delta z}{dx\,dy}\right) - q'\left(\frac{d\delta x}{dx}\right) - q'\left(\frac{d\delta y}{dy}\right) - p'\left(\frac{d^2\delta y}{dx\,dy}\right).$$

Die Abweichung dieses Werthes von dem obigen führt eine Unbequemlichkeit mit sich, die wir bald genauer untersuchen werden. Aus der dritten Formel $q'' = \left(\frac{dp'}{dy}\right)$ aber erhält man:

$$\delta q'' = \left(\frac{d^2\delta z}{dy^2}\right) - 2q''\left(\frac{d\delta y}{dy}\right) - p'\left(\frac{d^2\delta y}{dy^2}\right).$$

Anmerkung 1.

§. 148. Wenn ich den Ursprung der Abweichung der Variation $\delta q'$, welche aus dem doppelten Werthe

$$q' = \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dp'}{dx}\right)$$

entspringt, untersuche, so bemerke ich, daß bey diesen Formeln, welche die Variation ausdrücken, entweder die Größe x oder die Größe y als constant angesehen werde, wie der Nenner eines jeden Gliedes anzeigt; wenn wir aber annehmen, daß die Größe x constant bleibe, während die andere y indessen wie immer veränderlich bleibt, so erfordert die Natur der Sache, daß auch die Variationen von x keine Änderungen erleiden, welches sich aber ganz anders verhält, wenn die Variation δx auch von der Größe y abhängig ist, und dasselbe gilt auch von der andern Größe y, wenn sie constant genommen wird. Hieraus leuchtet nun ein, daß, wenn wir die Variationen δx und δy von den beyden Veränderlichen x und y zugleich abhängen lassen, dieß der Voraussetzung, nach welcher eine von beyden immer als constant angenommen wird, widerstreite. Man kann daher diese Unbequemlichkeit auf keine andere Weise vermeiden, als daß wir annehmen, die Variation von x sey von der andern Veränderlichen y ganz unabhängig, und die Größe x habe auf die Variation von δy keinen Einfluß. Wenn aber δx bloß durch x, und δy bloß durch y bestimmt wird, so daß sowohl

$$\left(\frac{d\delta x}{dy}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\delta y}{dx}\right) = 0$$

ist, so wird man auch erhalten:

$$\left(\frac{d^2\delta x}{dx\,dy}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{d^2\delta y}{dx\,dy}\right) = 0,$$

und so werden jene beyden abweichenden Werthe, welche wir für die Variation q' gefunden haben, in Übereinstimmung gebracht.

Anmerkung 2.

§. 149. Wir werden aber allen Zweifeln bey dieser Untersuchung am sichersten begegnen, wenn wir bloß der Größe z Variationen beylegen, indem wir die beyden übrigen x und y ganz unverändert lassen, so daß sowohl $\delta x = 0$ als auch $\delta y = 0$ wird. Auf diese Weise wird nicht allein die Rechnung erleichtert, sondern auch die Anwendung der Variationsrechnung nicht eingeschränkt. Denn vergleichen wir irgend

eine Fläche mit einer andern ihr nächstgelegenen, so steht uns nichts im Wege, die einzelnen Puncte der vorgelegten Fläche auf jene Puncte der ihr nächstgelegenen Fläche zu beziehen, welchen dieselben zwey Coordinaten x und y entsprechen, und bloß der dritten Veränderlichen z eine Variation beyzulegen. Diese Annahme ist, wenn wir zu den Integralformeln übergehen, um so nothwendiger, da immer die ganze Rechnung auf solche Integralausdrücke leitet, welche eine doppelte Integration erfordern, bey deren einer bloß x, bey der andern aber bloß y als veränderlich behandelt wird; ließe man also die Variationen dieser Variablen nicht verschwinden, so würden dadurch die größten Unbequemlichkeiten in die Rechnung gebracht, und da dieser Calcül an sich gewöhnlich sehr schwierig ist, so scheint es keineswegs gerathen zu seyn, daß wir von dieser Seite die Schwierigkeiten vervielfältigen; ich werde daher diese Abhandlung so durchführen, daß ich in der Folge den beyden Veränderlichen x und y gar keine Variationen beylege, und daß ich bloß die dritte Variable z um eine beliebige Variation δz wachsen lasse, wobey ich aber δz als irgend eine Function der Größen x und y, die entweder stätig oder discontinuirlich seyn mag, betrachten werde.

Aufgabe 17.

§. 150. Wenn z irgend eine Function von x und y bezeichnet, und derselben ebenso eine Variation δz, die von x und y wie immer abhängt, beygelegt wird, die Variationen aller Differenzialformeln von was immer für einer Ordnung aufzufinden.

Auflösung.

Für die Differenzialien des ersten Grades ergeben sich die beyden Formeln

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right) \quad \text{und} \quad p' = \left(\frac{dz}{dy}\right),$$

deren Variationen, da x und y keine Änderung erleiden sollen, nach den oben aufgefundenen Formeln, sich auf folgende Art darstellen werden:

$$\delta p = \left(\frac{d\delta z}{dx}\right) \quad \text{und} \quad \delta p' = \left(\frac{d\delta z}{dy}\right).$$

Für die Differenzialien der zweyten Ordnung erhält man folgende drey Formeln:

30 *

$$q = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right); \quad q' = \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) \text{ und } q'' = \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right),$$

so daß

$$q = \left(\frac{dp}{dx}\right); \quad q' = \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dp'}{dx}\right) \text{ und } q'' = \left(\frac{dp'}{dy}\right)$$

wird. Wegen $\delta x = 0$ und $\delta y = 0$ sind die Variationen dieser Ausdrücke nach dem vorhergehenden Probleme folgende:

$$\delta q = \left(\frac{d^2 \delta z}{dx^2}\right); \quad \delta q' = \left(\frac{d^2 \delta z}{dx\,dy}\right); \quad \delta q'' = \left(\frac{d^2 \delta z}{dy^2}\right).$$

Wenn wir zu den Differenzialien der dritten Ordnung fortgehen, so erscheinen auf ähnliche Art folgende vier Formeln:

$$r = \left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right); \quad r' = \left(\frac{d^3 z}{dx^2\,dy}\right); \quad r'' = \left(\frac{d^3 z}{dx\,dy^2}\right); \quad r''' = \left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right)$$

deren Variationen, wie man leicht sieht, durch folgende Ausdrücke gegeben seyn werden:

$$\delta r = \left(\frac{d^3 \delta z}{dx^3}\right); \quad \delta r' = \left(\frac{d^3 \delta z}{dx^2\,dy}\right); \quad \delta r'' = \left(\frac{d^3 \delta z}{dx\,dy^2}\right); \quad \delta r''' = \left(\frac{d^3 \delta z}{dy^3}\right)$$

woraus nun für sich erhellt, wie man die Variationen der Differenzialausdrücke höherer Ordnungen ausdrücken könne.

Zusatz 1.

§. 151. Es ist nun einleuchtend, daß im Allgemeinen für den Differenzialausdruck einer beliebigen Ordnung $\left(\frac{d^{\mu+\nu} z}{dx^\mu\,dy^\nu}\right)$ die Variation derselben $= \left(\frac{d^{\mu+\nu} \delta z}{dx^\mu\,dy^\nu}\right)$ seyn werde, in welchem Ausdrucke alle obigen Formeln enthalten sind.

Zusatz 2.

§. 152. Man sieht aber auch ferner, daß, wenn statt der Differenzialien der ersten Ordnung die Buchstaben p, p', statt jener der zweyten Ordnung die Buchstaben q, q', q'', für jene der dritten Ordnung die Buchstaben r, r', r'', r''', für jene der vierten Ordnung die Buchstaben s, s', s'', s''', s^{IV}, ꝛc. eingeführt werden, die Form der Differenzialien wegfalle, wie wir auch schon oben durch solche Buchstaben das Vorkommen der Differenzialien beseitigt haben.

Anmerkung.

§. 153. Weil die beyden Veränderlichen x und y von einander ganz unabhängig sind, so daß sogar die eine denselben Werth beybehalten kann, während die andere durch alle möglichen Werthe sich ändert, so ist klar, daß ein solcher Differenzialausdruck $\frac{dy}{dx}$, welcher nämlich keine bestimmte Bedeutung haben würde, niemahls in der Rechnung vorkommen könne. Da aber dagegen die Größe z eine Function von x und y ist, so haben die Formeln $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ und alle übrigen, welche ich oben betrachtet habe, bestimmte Bedeutungen, und es können gar keine andern Ausdrücke in der Rechnung erscheinen. Weil sich ferner alle hierher gehörigen Fragen darauf zurückführen lassen, daß z als eine Function der beyden Veränderlichen x und y betrachtet werden kann, so werden alle Ausdrücke von der Form $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, wo die Größe z constant genommen wäre, ganz ausgeschlossen, und man muß, außer den obenerwähnten Ausdrücken, keine andern Formeln in der Rechnung als zuläßig ansehen, und so werden alle Ausdrücke, welche von Integralformeln frey sind, außer den Veränderlichen x, y, z keine andern Differenzialformeln enthalten, als jene, deren Variationen hier angezeigt worden sind.

Aufgabe 18.

§. 154. Bezeichnet z eine Function von x und y, und legt man ihr eine Variation δz bey, welche von x und y wie immer abhängen mag, und ist ferner V eine Größe, welche auf irgend eine Weise aus den drey Veränderlichen x, y, z und ihren Differenzialien irgend einer Ordnung zusammengesetzt ist, die Variation δV derselben aufzufinden.

Auflösung.

Damit wir in dem Ausdrucke V die Differenzialien wegbringen, setzen wir, wie wir es bisher gethan haben:

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right); \quad p' = \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

$q = \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$; $q' = \left(\frac{d^2 z}{d x d y}\right)$; $q'' = \left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right)$

$r = \left(\frac{d^3 z}{d x^3}\right)$; $r' = \left(\frac{d^3 z}{d x^2 d y}\right)$; $r'' = \left(\frac{d^3 z}{d x d y^2}\right)$; $r''' = \left(\frac{d^3 z}{d y^3}\right)$

ɿc.

Die von der Variation von z entstehenden Variationen dieser Formeln bestimmen wir so, daß, wenn um der Deutlichkeit willen diese Variation $\delta z = \omega$ gesetzt wird, welche man als irgend eine Function der beyden Veränderlichen x und y ansehen muß,

$\delta p = \left(\frac{d \omega}{d x}\right)$; $\delta p' = \left(\frac{d \omega}{d y}\right)$

$\delta q = \left(\frac{d^2 \omega}{d x^2}\right)$; $\delta q' = \left(\frac{d^2 \omega}{d x d y}\right)$; $\delta q'' = \left(\frac{d^2 \omega}{d y^2}\right)$

$\delta r = \left(\frac{d^3 \omega}{d x^3}\right)$; $\delta r' = \left(\frac{d^3 \omega}{d x^2 d y}\right)$; $\delta r'' = \left(\frac{d^3 \omega}{d x d y^2}\right)$; $\delta r''' = \left(\frac{d^3 \omega}{d y^3}\right)$

ɿc.

Wenn man aber diese Werthe substituirt, so wird der vorgelegte Ausdruck V als eine Function der Größen x, y, z, p, p', q, q', q'', r, r', r'', r''', ɿc. erscheinen; das Differenziale derselben wird also folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned} dV = L\,dx + M\,dy + N\,dz &+ P\,dp + Q\,dq + R\,dr \\ &+ P'\,dp' + Q'\,dq' + R'\,dr' \\ &+ Q''\,dq'' + R''\,dr'' \\ &+ R'''\,dr''' \end{aligned}$$

ɿc.

Weil nun der Ausdruck V nur in so fern eine Änderung erleidet, in wie fern die Größen, aus welchen er zusammengesetzt ist, variiren; die beyden Größen x und y aber unverändert bleiben, so wird die gesuchte Variation desselben folgende seyn:

$$\begin{aligned} \delta V = N\delta z &+ P\delta p + Q\delta q + R\delta r \\ &+ P'\delta p' + Q'\delta q' + R'\delta r' \\ &+ Q''\delta q'' + R''\delta r'' \\ &+ R'''\delta r''' \end{aligned}$$

ɿc.

und wenn wir statt der Variation δz die Größe ω schreiben, so werden wir durch Substitution der gefundenen Variationen erhalten:

$$\delta V = N\omega + P\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + Q\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) + R\left(\frac{d^3\omega}{dx^3}\right)$$
$$+ P'\left(\frac{d\omega}{dy}\right) + Q'\left(\frac{d^2\omega}{dx\,dy}\right) + R'\left(\frac{d^3\omega}{dx^2\,dy}\right)$$
$$+ Q''\left(\frac{d^2\omega}{dy^2}\right) + R''\left(\frac{d^3\omega}{dx\,dy^2}\right)$$
$$+ R'''\left(\frac{d^3\omega}{dy^3}\right)$$
$$\text{etc.}$$

Die Bildung dieses Ausdruckes, wenn auch etwa Differenzialien höherer Grade erscheinen sollten, ist für sich klar.

Zusatz 1.

§. 155. Da ω als Function der beyden Veränderlichen x und y angesehen wird, so haben die einzelnen Theile, welche die Variation δV bilden, eine bestimmte Bedeutung, und diese Variation ist als vollkommen bestimmt zu betrachten.

Zusatz 2.

§. 156. Wie aber auch der Ausdruck V aus Differenzialien zusammengesetzt seyn mag, so muß man, wenn derselbe einen bestimmten Werth andeuten soll, durch die gebrauchten Substitutionen ihn immer von den Differenzialien befreyen.

Zusatz 3.

§. 157. Wenn unsere drey Veränderlichen auf eine Fläche bezogen werden, so daß die Coordinaten derselben $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ (Fig. 6) werden, so stellt man sich vor, daß bloß die Ordinate $YZ = z$ überall um eine unendlich kleine Größe $Zz = \delta z = \omega$ wachse, so daß die Puncte z in eine andere von ihr unendlich wenig abweichende Fläche fallen.

Anmerkung.

§. 158. Ich muß hier einem Zweifel begegnen, der daher entspringt, daß wir behauptet haben, die Größe z müsse als eine Function der beyden Veränderlichen x und y angesehen werden; denn weil wir den Größen x und y keine Variationen beygelegt haben, so würde, wenn wir in dem Ausdrucke V statt z seinen durch x und y ausgedrück-

ten Werth substituiren würden, dieser Ausdruck selbst in eine bloße Function von x und y übergehen, und würde daher auch keine Variation erleiden. Allein man muß bemerken, daß, obgleich z als Function von x und y betrachtet wird, diese dennoch gewöhnlich unbekannt sey, wenn man nämlich die Natur derselben erst aus der Bedingung der Variation entwickeln muß. Wäre sie aber schon Anfangs gegeben, so muß man dennoch bey der Aufsuchung der Variation diese Function z als unbekannt betrachten, und man kann keineswegs für sie den durch x und y ausgedrückten Werth substituiren, bevor man nicht die Variation, welche nämlich bloß von z abhängt, gänzlich bestimmt hat.

Kapitel VII.

Von der Variation der Integralformeln, welche drey Veränderliche enthalten, von welchen eine als Function der beyden andern angesehen wird.

Aufgabe 19.

§. 159. Die Natur der hierher gehörigen Integralausdrücke zu entwickeln, und die Art und Weise, nach welcher ihre Variationen gefunden werden können, aus einander zu setzen.

Auflösung.

Da drey Veränderliche x, y und z vorkommen, von welchen die eine z als eine Function der beyden andern x und y anzusehen ist, obgleich man bey der Aufsuchung der Variation die Natur dieser Function noch als unbekannt betrachten muß; so sind die Integralformeln, welche bey dieser Art Rechnung vorkommen, sehr verschieden von jenen, welche dann, wenn nur von zwey Veränderlichen die Rede ist, gewöhnlich vorgelegt werden. Denn so wie ein solcher Integralausdruck $\int V\,dx$, wo man sich V bloß als Function zweyer Veränderlichen x und y vorstellt, deren eine y als abhängig von x gedacht wird, gleichsam als die Summe sämmtlicher Elemente $V\,dx$, welche man mittelst aller Werthe von x erhält, betrachtet werden kann; eben so werden, wenn drey Veränderliche x, y und z erscheinen, deren eine z von den beyden andern x und y zugleich als abhängig gedacht wird, die hierher gehörigen Integralien sämmtliche Elemente in Bezug auf alle Werthe von x sowohl, als auch von y in sich begreifen, und werden daher eine doppelte Integration erfordern; die eine nämlich durch alle Werthe von x, die andere aber als Aggregat der Elemente von y. Die Integralien dieser Art müssen daher in einem Ausdrucke von der Form $\iint V\,dx\,dy$ enthalten seyn, welche Formel nämlich eine doppelte Integration erfordert, und die man gewöhnlich so entwickelt, daß man zuerst die eine Variable y als unveränderlich ansieht, und den Werth des Ausdruckes $\int V\,dx$ von der einen Gränze der Integration bis zur andern ausgedehnt, bestimmt. Da nun x dadurch schon einen bekannten oder

von y abhängigen Werth erhält, so wird dieses Integrale $\int V\,dx$ in eine Function von y allein übergehen, und wenn man diese mit dy multiplicirt hat, so hat man weiter nichts zu thun, als das Integrale $\int dy \int V\,dx$ aufzusuchen, und daher muß die Formel $\int dy \int V\,dx$, wenn sie auf diese Art behandelt wird, als gleichgeltend mit dem obigen Ausdrucke $\int\int V\,dx\,dy$ angesehen werden. Kehrt man aber die Ordnung um, indem man zuerst die Größe x als constant betrachtet, und dehnt das Integrale $\int V\,dy$ durch die vorgeschriebenen Gränzen aus, so wird man dieses letztere als eine Function von x ansehen, und das gesuchte Integrale $\int dx \int V\,dy$ auffinden können. Es ist aber gleichgültig, nach welcher von beyden Methoden wir den Werth des doppelten Integralausdruckes $\int\int V\,dx\,dy$ bestimmen wollen.

Da also bey dieser Rechnung keine andern Integralformeln vorkommen können, als solche, welche in der Form $\int\int V\,dx\,dy$ enthalten sind, so kömmt es hier lediglich darauf an, zu zeigen, wie man die Variation eines solchen Ausdruckes zu bestimmen habe. Weil wir aber annehmen, daß die Größen x und y keine Variation erleiden, so folgert man aus dem, was Anfangs erwiesen wurde, ohne Mühe die Gleichung

$$\delta \int\int V\,dx\,dy = \int\int \delta V\,dx\,dy,$$

wo δV die Variation von V bezeichnet, und es wird hier ebenfalls eine doppelte Integration erfordert, gerade so, wie wir vorhin gefunden haben.

Zusatz 1.

§. 160. Setzen wir das Integrale $\int\int V\,dx\,dy = W$, so wird man, weil $\int dx \int V\,dy = W$ ist, durch Differenziation in Bezug auf x allein erhalten $\int V\,dy = \left(\frac{dW}{dx}\right)$, und daher ferner, wenn man in Bezug auf y differenziirt, $V = \left(\frac{d^2 W}{dx\,dy}\right)$, woraus erhellt, daß das Integrale W so beschaffen sey, daß $V = \left(\frac{d^2 W}{dx\,dy}\right)$ wird.

Zusatz 2.

§. 161. Da eine zweyfache Integration auszuführen ist, so wird durch jede derselben eine willkürliche Größe eingeführt; die eine Integration verwebt aber statt der Constanten irgend eine Function von x, welche wir mit X bezeichnen wollen, in die Rechnung, und die andere

irgend eine Function von y, welche Y heißen mag, so daß also das vollständige Integrale durch folgende Gleichung dargestellt wird:

$$\int\int V\,dx\,dy = W + X + Y.$$

Zusatz 3.

§. 162. Dieß wird auch durch die Auflösung selbst bestätiget, denn es wird erstlich

$$\int V\,dy = \left(\frac{dW}{dx}\right) + \left(\frac{dX}{dx}\right),$$

weil $\left(\frac{dY}{dy}\right) = 0$ ist, dann aber wird $V = \left(\frac{d^2W}{dx\,dy}\right)$, weil sowohl X als auch $\left(\frac{dX}{dx}\right)$ von y unabhängig sind. Wenn demnach $\left(\frac{d^2W}{dx\,dy}\right) = V$ ist, so wird das vollständige Integrale seyn:

$$\int\int V\,dx\,dy = W + X + Y.$$

Anmerkung 1.

§. 163. Es ist aber allerdings nöthig, die Beschaffenheit der doppelten Integralausdrücke von der Form $\int\int V\,dx\,dy$ einer genauern Prüfung zu unterziehen, welches am bequemsten mittelst der Theorie der Flächen wird geschehen können. Seyen also, wie bisher, x und y die beyden in der Basis angenommenen rechtwinklichten Coordinaten, nämlich $AX = x$ und $XY = y$ (Fig. 7), auf welcher im Puncte Y die dritte Coordinate $YZ = z$ senkrecht errichtet ist, und sich bis zur Fläche erstreckt. Wachsen nun jene zwey Coordinaten x und y um ihre Differenzialien $XX' = dx$ und $YY' = dy$, so entsteht dadurch in der Basis das Parallelogramm $YxyY' = dx\,dy$ als Element, welchem ein Element des Integralausdruckes entspricht. Wenn es sich demnach um den von der Fläche eingeschlossenen Körperraum handelt, so wird man das Element desselben $= z\,dx\,dy$ finden, und daher den ganzen Raumesinhalt $= \int\int z\,dx\,dy$; wenn aber die Fläche selbst gesucht wird, so wird man, wenn $dz = p\,dx + p'\,dy$ gesetzt wird, das über dem Rechtecke $dx\,dy$ liegende Element derselben

$$= dx\,dy\sqrt{1 + p^2 + p'^2},$$

und demnach die Fläche selbst

$$= \int\int dx\,dy\sqrt{1 + p^2 + p'^2}$$

finden, woraus im Allgemeinen die Beziehung des doppelten Integral-

ausdruckes $\int\int V\, dx\, dy$ erkannt wird. Wird nun der Werth eines solchen Ausdruckes gesucht, welcher einem gegebenen Raume in der Basis, z. B. ADYX entspricht, so suche man zuerst, nachdem x constant genommen wurde, das einfache Integrale $\int V\, dy$, und gebe dann dem y die Größe XY, welche sich bis zur Curve DY erstreckt, und die der Natur dieser Curve gemäß einer gewissen Function von x gleich seyn wird. So wird also $dx \int V\, dy$ das dem Rechtecke

$$XYxX' = y\, dx$$

entsprechende Element des vorgelegten Ausdruckes bezeichnen, und nimmt man von jener Formel von neuem das Integrale $\int dx \int V\, dy$, indem man bloß x als veränderlich betrachtet, so wird dieses den, dem ganzen Raume ADYX zugehörigen Werth darstellen, wenn nämlich jede der beyden Integrationen durch die Beyfügung einer constanten Größe richtig bestimmt wird.

Anmerkung 2.

§. 164. So hat man sich bey der Entwickelung solcher doppelter Integralausdrücke zu benehmen, wenn dieselbe auf eine in der Basis gegebene Figur ADYX angewendet werden soll; wollen wir aber beyde Integrationen ohne nähere Bestimmung ausführen, so daß wir zuerst, nachdem x als unveränderlich angenommen wurde, das Integrale $\int V\, dy$ suchen, welches man sich dem Elementarrechtecke

$$XYyX' = y\, dx$$

als zugehörig vorstellen muß, wenn es nämlich mit dx multiplicirt wird, dann aber bey der Integration der Formel $\int dx \int V\, dy$ die Größe $y = XY$ als unveränderlich annehmen, und bloß x als variabel betrachten, so werden wir dann den Werth erhalten, welcher dem unbestimmten Rechtecke $APYX = xy$ entspricht, wenn nämlich die durch beyde Integrationen eingeführten Constanten gehörig bestimmt werden. Wenn aber außer den Linien XY und PY die übrigen Gränzen jenes Raumes als unbestimmt betrachtet werden, so wird das Integrale $\int\int V\, dx\, dy$ die zwey unbestimmte Functionen X und Y aufnehmen, wovon die eine bloß eine Function von x, die andere aber bloß eine Function von y bezeichnet. Wollen wir also diese Bemerkungen auf die Berechnung der größten und kleinsten Werthe anwenden, so wird es gut seyn, jene doppelte Integration nach der hier erklärten unbestimmten Methode auszuführen; weil die Eigenschaft eines größten oder

kleinsten Werthes, welche irgend einem gegebenen Raume ADYX zukommen soll, zugleich auch für jeden unbestimmten Raum APYX Statt finden muß.

Aufgabe 20.

§. 165. Wenn V irgend einen, aus den drey Veränderlichen x, y, z und ihren Differenzialien zusammengesetzten Ausdruck bezeichnet, die Variation der doppelten Integralformel $\int\int V dx dy$ zu finden, indem der Größe z, welche als eine Function der beyden Veränderlichen x und y betrachtet wird, beliebige Variationen beygelegt werden.

Auflösung.

Zur Beseitigung der Form der Differenzialien setzen wir:

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right); \quad p' = \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

$$q = \left(\frac{dp}{dx}\right); \quad q' = \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dp'}{dx}\right); \quad q'' = \left(\frac{dp''}{dy}\right)$$

$$r = \left(\frac{dq}{dx}\right); \quad r' = \left(\frac{dq}{dy}\right) = \left(\frac{dq'}{dx}\right); \quad r'' = \left(\frac{dq'}{dy}\right) = \left(\frac{dq''}{dx}\right)$$

$$r''' = \left(\frac{dq''}{dy}\right);$$

u. s. w.

damit V als Function der endlichen Größen x, y, z, p, p', q, q', q'', r, r', r'', r''', u. s. f. erscheine. Ferner setze man das Differenziale jenes Ausdruckes

$$\begin{aligned} dV = L dx + M dy + N dz &+ P dp + Q dq + R dr \\ &+ P' dp' + Q' dq' + R' dr' \\ &\qquad + Q'' dq'' + R'' dr'' \\ &\qquad\qquad + R''' dr''' \end{aligned}$$

ꝛc.

und da hieraus zugleich die Variation δV erhalten wird, so findet man nach dem vorhergehenden Probleme die gesuchte Variation

$$\delta \int\int V dx dy = \int\int dx dy \left[\begin{aligned} N\delta z &+ P\delta p + Q\delta q + R\delta r \\ &+ P'\delta p' + Q'\delta q' + R'\delta r' \\ &\qquad + Q''\delta q'' + R''\delta r'' \\ &\qquad\qquad + R'''\delta r''' \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right]$$

Setzen wir nun, wie wir es §. 154 gethan haben, die Variation $\delta z = \omega$, welche man als irgend eine Function der beyden Veränderlichen x und y betrachten kann, so folgern wir daraus, daß jene Variation seyn werde:

$$\delta \int\int V\, dx\, dy = \int\int dx\, dy \left[N\omega + P\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + Q\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) + R\left(\frac{d^3\omega}{dx^3}\right) \right.$$
$$+ P'\left(\frac{d\omega}{dy}\right) + Q'\left(\frac{d^2\omega}{dx\,dy}\right) + R'\left(\frac{d^3\omega}{dx^2\,dy}\right)$$
$$+ Q''\left(\frac{d^2\omega}{dy^2}\right) + R''\left(\frac{d^3\omega}{dx\,dy^2}\right)$$
$$\left. + R'''\left(\frac{d^3\omega}{dy^3}\right) \; \ldots\ldots\ldots \right].$$

Zusatz 1.

§. 166. Wenn also die Natur der beyden Functionen z und $\delta z = \omega$, oder die Art und Weise wie dieselben aus den Veränderlichen x und y zusammengesetzt sind, bekannt wäre, so könnte man die Variation des doppelten Integralausdruckes $\int\int V\, dx\, dy$ nach den oben gelehrten Vorschriften angeben, wie auch die Größe V aus den Veränderlichen x, y, z und ihren Differenzialien immer zusammengesetzt seyn möchte.

Zusatz 2.

§. 167. Es wird nämlich lediglich auf die Entwickelung des gefundenen doppelten Integralausdruckes ankommen, und da dieser aus mehreren Theilen besteht, so wird man die einzelnen Theile nach den früher gelehrten Vorschriften zweymahl integriren müssen.

Anmerkung.

§. 168. Kennt man aber die Beziehung der Function z nicht, sondern muß man dieselbe erst aus der Bedingung der Variation ableiten, so daß die Variation $\delta z = \omega$ durchaus keine Bestimmung zuläßt, wie dieß der Fall ist, wenn der Ausdruck $\int\int V\,dx\,dy$ einen größten oder kleinsten Werth haben muß; dann ist es allerdings nöthig, die einzelnen Glieder der gefundenen Variation $\delta\int\int V\,dx\,dy$ so zu reduciren, daß durchaus nach dem doppelten Integralzeichen nicht die Differenzialwerthe der Variation $\delta z = \omega$, sondern diese Variation selbst erscheint, welcher Reduction wir uns schon oben bey den Formeln, welche nur zwey Veränderliche enthalten, bedient haben. Eine solche Reduction erfordert aber eine genauere Auseinandersetzung, weil sie für die doppelten Integralausdrücke nicht so gewöhnlich ist. Zu dem Ende bemerke ich, daß man durch eine solche Reduction geradezu auf Integralformeln komme, bey welchen nur eine der Größen x und y als veränderlich angesehen, die andere aber als constant betrachtet wird; und um dieses anzudeuten, soll, um die Zeichen nicht unnöthig zu vermehren, ein Ausdruck von der Form $\int T\,dx$ das Integrale der Differenzialformel $T\,dx$ bezeichnen, wenn die Größe y als unveränderlich angesehen wird. Auf ähnliche Art hat man sich vorzustellen, daß bey dem Ausdrucke $\int T\,dy$ die Größe y allein als veränderlich betrachtet werde, was um so klarer ist, weil, wenn man diese Bedingung außer Acht läßt, diese Ausdrücke durchaus keine Bedeutung haben würden. Es wird also in der Folge nicht mehr nöthig seyn, anzugeben, daß, wenn T die beyden Veränderlichen x und y enthält, eine derselben bey den einfachen Integralformeln $\int T\,dx$ oder $\int T\,dy$ entweder als constant oder als veränderlich betrachtet werde, da nur jene, deren Differenziale angegeben wird, als variabel angesehen werden muß. Bey den doppelten Integralausdrücken $\int\int V\,dx\,dy$ aber hat man sich immer an die Regel zu halten, daß die eine Integration sich bloß auf die Veränderlichkeit von x, die andere aber nur auf die Variabilität von y beziehe, und daß es gleichgültig sey, welche Integration zuerst ausgeführt wird.

Aufgabe 21.

§. 169. **Die in dem vorhergehenden Probleme gefundene Variation des doppelten Integralausdruckes $\int\int V\,dx\,dy$ so zu transformiren, daß nach dem dop-**

pelten Integralzeichen durchaus die Variation $\delta z = \omega$ selbst vorkommt, und die Differenzialien derselben weggeschafft werden.

Auflösung.

Um dieser Transformation mehr Allgemeinheit zu geben, seyen T und v was immer für Functionen der beyden Veränderlichen x und y, und man betrachte den doppelten Integralausdruck $\int\int T\,dx\,dy \left(\frac{dv}{dx}\right)$, sondere die verschiedenen Integrationen ab, und stelle jenen Ausdruck unter der Form $\int dy \int T\,dx \left(\frac{dv}{dx}\right)$ dar, so daß bey der Integration $\int T\,dx \left(\frac{dv}{dx}\right)$ bloß die Größe x als veränderlich angesehen wird. Dann aber wird man erhalten $dx \left(\frac{dv}{dx}\right) = dv$, weil y als constant betrachtet wird, und demnach wird

$$\int T\,dv = Tv - \int v\,dT$$

werden. Da hier in dem Differenzialausdruck dT bloß x als veränderlich angesehen wird, so kann man, um dieses anzudeuten, $dx \left(\frac{dT}{dx}\right)$ statt dT schreiben, so daß man erhält:

$$\int T\,dx \left(\frac{dv}{dx}\right) = Tv - \int v\,dx \left(\frac{dT}{dx}\right),$$

und daher unsere Formel auf folgenden Ausdruck reducirt wird:

$$\int\int T\,dx\,dy \left(\frac{dv}{dx}\right) = \int Tv\,dy - \int\int v\,dx\,dy \left(\frac{dT}{dx}\right).$$

Auf ähnliche Art werden wir durch Vertauschung der Veränderlichen erhalten:

$$\int\int T\,dx\,dy \left(\frac{dv}{dy}\right) = \int Tv\,dx - \int\int v\,dx\,dy \left(\frac{dT}{dy}\right).$$

Dieß gleichsam als Lehrsatz vorausgesetzt, wird sich die Reduction der im vorhergehenden Probleme gefundenen Variation auf folgende Art darstellen:

$$\int\int P\,dx\,dy \left(\frac{d\omega}{dx}\right) = \int P\omega\,dy - \int\int \omega\,dx\,dy \left(\frac{dP}{dx}\right)$$

$$\int\int P'\,dx\,dy \left(\frac{d\omega}{dy}\right) = \int P'\omega\,dx - \int\int \omega\,dx\,dy \left(\frac{dP'}{dy}\right).$$

Ferner sey für die folgenden Glieder erstlich $\left(\frac{d\omega}{dx}\right) = v$ und daher $\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right)$, wodurch man erhält:

$$\int\int Q\,dx\,dy\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) = \int Q\,dy\left(\frac{d\omega}{dx}\right) - \int\int dx\,dy\left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right),$$

und reducirt man auf ähnliche Art das letzte Glied, so wird

$$\int\int Q\,dx\,dy\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) = \int Q\,dy\left(\frac{d\omega}{dx}\right) - \int \omega\,dy\left(\frac{dQ}{dx}\right) + \int\int \omega\,dx\,dy\left(\frac{d^2Q}{dx^2}\right).$$

Durch dieselbe Substitution werden wir $\left(\frac{d^2\omega}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{dv}{dy}\right)$ erhalten, und daher

$$\int\int Q'\,dx\,dy\left(\frac{d^2\omega}{dx\,dy}\right) = \int Q'\,dx\left(\frac{d\omega}{dx}\right) - \int\int dx\,dy\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{dQ'}{dy}\right)$$

oder

$$\int\int Q'\,dx\,dy\left(\frac{d^2\omega}{dx\,dy}\right) = \int Q'\,dx\left(\frac{d\omega}{dx}\right) - \int \omega\,dy\left(\frac{dQ'}{dy}\right) + \\ + \int\int \omega\,dx\,dy\left(\frac{d^2Q'}{dx\,dy}\right),$$

welcher Ausdruck wegen

$$\int Q'\,dx\left(\frac{d\omega}{dx}\right) = Q'\omega - \int \omega\,dx\left(\frac{dQ'}{dx}\right)$$

übergehen wird in folgenden:

$$\int\int Q'\,dx\,dy\left(\frac{d^2\omega}{dx\,dy}\right) = Q'\omega - \int \omega\,dx\left(\frac{dQ'}{dx}\right) + \int\int \omega\,dx\,dy\left(\frac{d^2Q'}{dx\,dy}\right) \\ - \int \omega\,dy\left(\frac{dQ'}{dy}\right),$$

dann aber erhalten wir für den dritten Ausdruck dieser Ordnung:

$$\int\int Q''\,dx\,dy\left(\frac{d^2\omega}{dy^2}\right) = \int Q''\,dx\left(\frac{d\omega}{dy}\right) - \int \omega\,dx\left(\frac{dQ''}{dy}\right) + \\ + \int\int \omega\,dx\,dy\left(\frac{d^2Q''}{dy^2}\right);$$

ferner wird man wegen $\left(\frac{d^3\omega}{dx^3}\right) = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)$, wenn $v = \left(\frac{d\omega}{dx}\right)$ bleibt, finden:

$$\int\int R\,dx\,dy\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) = \int R\,dy\left(\frac{dv}{dx}\right) - \int v\,dy\left(\frac{dR}{dx}\right) + \\ + \int\int v\,dx\,dy\left(\frac{d^2R}{dx^2}\right) \text{ und}$$

$$\int\!\!\int v\,dx\,dy \left(\frac{d^2R}{dx^2}\right) = \int \omega\,dy \left(\frac{d^2R}{dx^2}\right) - \int\!\!\int \omega\,dx\,dy \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right),$$

so daß man nun hat:

$$\int\!\!\int R\,dx\,dy \left(\frac{d^3\omega}{dx^3}\right) = \int R\,dy \left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) - \int dy \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{dR}{dx}\right) + \int \omega\,dy \left(\frac{d^2R}{dx^2}\right) - \int\!\!\int \omega\,dx\,dy \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right).$$

Ferner wird man, weil $\left(\frac{d^3\omega}{dx^2dy}\right) = \left(\frac{d^2v}{dx\,dy}\right)$ ist, haben:

$$\int\!\!\int R'\,dx\,dy \left(\frac{d^2v}{dx\,dy}\right) = R'v - \int v\,dx \left(\frac{dR'}{dx}\right) + \int\!\!\int v\,dx\,dy \left(\frac{d^2R'}{dx\,dy}\right) - \int v\,dy \left(\frac{dR'}{dy}\right),$$

und weil hier

$$\int\!\!\int v\,dx\,dy \left(\frac{d^2R'}{dx\,dy}\right) = \int \omega\,dy \left(\frac{d^2R'}{dx\,dy}\right) - \int\!\!\int \omega\,dx\,dy \left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right)$$

ist, so folgern wir das Bestehen der Gleichung:

$$\int\!\!\int R'\,dx\,dy \left(\frac{d^3\omega}{dx^2dy}\right) = R'\left(\frac{d\omega}{dx}\right) - \int \left(\frac{d\omega}{dx}\right) dx \left(\frac{dR'}{dx}\right) + \int \omega\,dy \left(\frac{d^2R'}{dx\,dy}\right) - \int \left(\frac{d\omega}{dx}\right) dy \left(\frac{dR'}{dy}\right) - \int\!\!\int \omega\,dx\,dy \left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right).$$

Endlich erhalten wir hieraus durch Verwechselung der Größen x und y:

$$\int\!\!\int R''\,dx\,dy \left(\frac{d^3\omega}{dx\,dy^2}\right) = R''\left(\frac{d\omega}{dy}\right) - \int \left(\frac{d\omega}{dy}\right) dy \left(\frac{dR''}{dy}\right) + \int \omega\,dx \left(\frac{d^2R''}{dx\,dy}\right) - \int \left(\frac{d\omega}{dy}\right) dx \left(\frac{dR''}{dx}\right) - \int\!\!\int \omega\,dx\,dy \left(\frac{d^3R''}{dx\,dy^2}\right)$$

und

$$\int\!\!\int R'''\,dx\,dy \left(\frac{d^3\omega}{dy^3}\right) = \int R'''\,dx \left(\frac{d^2\omega}{dy^2}\right) - \int \left(\frac{d\omega}{dy}\right) dx \left(\frac{dR'''}{dy}\right) + \int \omega\,dx \left(\frac{d^2R'''}{dy^2}\right) - \int\!\!\int \omega\,dx\,dy \left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right).$$

Durch Substitution dieser Werthe finden wir:

$$\delta\int\!\!\int V\,dx\,dy = \int\!\!\int \omega\,dx\,dy \left[N - \left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{d^2Q}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) - \left(\frac{dP'}{dy}\right) + \left(\frac{d^2Q'}{dx\,dy}\right) - \left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) + \left(\frac{d^2Q''}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^3R''}{dx\,dy^2}\right) - \left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right) \right\}$$

$$+\int P\omega\,dy+\int Q\,dy\left(\frac{d\omega}{dx}\right)-\int\omega\,dy\left(\frac{dQ}{dx}\right)+Q'\omega$$

$$+\int P'\omega\,dx-\int\omega\,dx\left(\frac{dQ'}{dx}\right)-\int\omega\,dy\left(\frac{dQ'}{dy}\right)$$

$$+\int Q''dx\left(\frac{d\omega}{dy}\right)-\int\omega\,dx\left(\frac{dQ''}{dy}\right)$$

$$+\int R\,dy\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)+R'\left(\frac{d\omega}{dx}\right)-\int\left(\frac{d\omega}{dx}\right)dx\left(\frac{dR'}{dx}\right)$$

$$-\int\left(\frac{d\omega}{dy}\right)dy\left(\frac{dR''}{dy}\right)+\int R'''dx\left(\frac{d^2\omega}{dy^2}\right)$$

$$-\int\left(\frac{d\omega}{dx}\right)dy\left(\frac{dR}{dx}\right)+R''\left(\frac{d\omega}{dy}\right)-\int\left(\frac{d\omega}{dx}\right)dy\left(\frac{dR'}{dy}\right)$$

$$-\int\left(\frac{d\omega}{dy}\right)dx\left(\frac{dR''}{dx}\right)-\int\left(\frac{d\omega}{dy}\right)dx\left(\frac{dR'''}{dy}\right)$$

$$+\int\omega dy\left(\frac{d^2R}{dx^2}\right)+\int\omega dy\left(\frac{d^2R'}{dx\,dy}\right)+\int\omega dx\left(\frac{d^2R''}{dx\,dy}\right)+\int\omega dx\left(\frac{d^2R'''}{dy^2}\right).$$

Zusatz 1.

§. 170. Der erste Theil dieses Ausdruckes ist deutlich genug; die übrigen Theile aber lassen sich bequem so ordnen, daß ihr Verhältniß in die Augen fällt, nämlich:

$$\int\omega\,dy\left[P-\left(\frac{dQ}{dx}\right)+\left(\frac{d^2R}{dx^2}\right)-\left(\frac{dQ'}{dy}\right)+\left(\frac{d^2R'}{dx\,dy}\right)+\left(\frac{d^2R''}{dy^2}\right)\right]\text{ꝛc.}$$

$$+\int\omega\,dx\left[P'-\left(\frac{dQ''}{dy}\right)+\left(\frac{d^2R'''}{dy^2}\right)-\left(\frac{dQ'}{dx}\right)+\left(\frac{d^2R''}{dx\,dy}\right)+\left(\frac{d^2R'}{dx^2}\right)\right]\text{ꝛc.}$$

$$+\int\left(\frac{d\omega}{dx}\right)dy\left[Q-\left(\frac{dR}{dx}\right)-\left(\frac{dR'}{dy}\right)\right]\text{ꝛc.}$$

$$+\int\left(\frac{d\omega}{dy}\right)dx\left[Q''-\left(\frac{dR'''}{dy}\right)-\left(\frac{dR''}{dx}\right)\right]\text{ꝛc.}$$

$$+\int\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$$

$$+\int\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right) dy \, [R - \text{etc.}] + \int\left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right) dx \, [R''' - \text{etc.}]$$

$$+ \omega \left[Q' - \left(\frac{dR'}{dx}\right) \text{etc.} \atop - \left(\frac{dR''}{dy}\right) \right\} + \left(\frac{du}{dx}\right) [R' - \text{etc.}] \atop + \left(\frac{du}{dy}\right) [R'' - \text{etc.}].$$

Zusatz 2.

§. 171. **Bey einer geringen Aufmerksamkeit wird man hier bald einsehen, wie diese Theile weiter fortgesetzt werden müssen, wenn die Größe V etwa Differenzialien höherer Grade enthalten sollte.**

Zusatz 3.

§. 172. **Bey einigen dieser Integralausdrücke, welche das Differenziale dy als Factor enthalten, wird die Größe x als constant betrachtet, der ein, der Gränze des Integrals entsprechender Werth beygelegt wird; bey andern aber, welche mit dx multiplicirt sind, wird y als unveränderlich angesehen, und der Gränze der Integration gleich gesetzt, woraus nun hervorgeht, daß an den Gränzen der Integrationen sowohl x, als auch y einen unveränderlichen Werth erhalten.**

Anmerkung 1.

§. 173. Dieser Ausdruck für die Variation ist also für jenen Fall eingerichtet worden, wo die Gränzen beyder Integrationen sowohl der Größe x, als auch der Größe y constante Werthe beylegen. Handelt es sich z. B. um eine Fläche, so muß der Integralausdruck $\int\int V\,dx\,dy$ auf das in der Basis angenommene Rechteck APYX (Fig. 7) bezogen werden, und man muß den Werth desselben so bestimmen, daß er für $x = 0$ und $y = 0$, welches die Anfangswerthe sind, verschwindet. Hierauf muß man $x = AX$ und $y = AP$ setzen, welches die beyden Endwerthe sind, und nach demselben Gesetze muß man die gefundene Variation selbst behandeln. Sucht man nun eine solche Fläche, in welcher der Werth des auf diese Art bestimmten Ausdruckes $\int\int V\,dx\,dy$ ein Größtes oder ein Kleinstes wird, so wird vor Allem erfordert, den ersten Theil der Variation, welcher eine doppelte Integration enthält, der Nulle gleich zu setzen, wie auch die Variation $\delta z = \omega$ genommen werden mag, wodurch man folgende Gleichung erhalten wird:

$$0 = N - \left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{d^2 Q}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^3 R}{dx^3}\right) + \ldots$$
$$- \left(\frac{dP'}{dy}\right) + \left(\frac{d^2 Q'}{dx\,dy}\right) - \left(\frac{d^3 R'}{dx^2\,dy}\right) + \ldots$$
$$+ \left(\frac{d^2 Q''}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^3 R''}{dx\,dy^2}\right) + \ldots$$
$$- \left(\frac{d^3 R'''}{dy^3}\right) + \ldots$$

durch welche die Natur der mit dieser Eigenschaft begabten Fläche ausgedrückt werden wird. Die durch die doppelte Integration eingeführten Constanten muß man aber so bestimmen, daß den übrigen Theilen der Variation Genüge geschieht.

Anmerkung 2.

§. 174. Um diese an sich sehr verwickelte Untersuchung durch ein Beyspiel aufzuhellen, setzen wir, es sey eine Fläche von der Beschaffenheit aufzufinden, welche unter allen übrigen Flächen, die denselben Raum einschließen, die kleinste wird. Zu diesem Ende hat man zu bewirken, daß der doppelte Integralausdruck

$$\int\int dx\,dy\,[z + a\sqrt{1 + p^2 + p'^2}]$$

ein Maximum oder ein Minimum werde. Da nun also

$$V = z + a\sqrt{1 + p^2 + p'^2}$$

ist, so wird man haben:

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 1,$$

$$P = \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2 + p'^2}} \quad \text{und} \quad P' = \frac{ap'}{\sqrt{1 + p^2 + p'^2}},$$

und daher

$$dV = N\,dz + P\,dp + P'\,dp',$$

wobey die Gleichung Statt findet:

$$dz = p\,dx + p'\,dy.$$

Die Natur der gesuchten Fläche wird demnach durch folgende Gleichung dargestellt werden:

$$N - \left(\frac{dP}{dx}\right) - \left(\frac{dP'}{dy}\right) = 0, \quad \text{oder} \quad 1 = \left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dP'}{dy}\right).$$

Es ist aber

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) = \frac{a}{(1 + p^2 + p'^2)^{\frac{3}{2}}}\left[(1 + p'^2)\left(\frac{dp}{dx}\right) - p'p\left(\frac{dp'}{dx}\right)\right],$$

$$\left(\frac{dp'}{dy}\right) = \frac{a}{(1+p^2+p'^2)^{\frac{3}{2}}}\left[(1+p^2)\left(\frac{dp'}{dy}\right) - pp'\left(\frac{dp}{dy}\right)\right],$$

wobey zu bemerken ist, daß $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dp'}{dx}\right)$ ist. Man erhält demnach folgende Gleichung:

$$\frac{(1+p^2+p'^2)^{\frac{3}{2}}}{a} = (1+p'^2)\left(\frac{dp}{dx}\right) - 2pp'\left(\frac{dp}{dy}\right) + (1+p'^2)\left(\frac{dp'}{dy}\right).$$

Wie man aber diese Gleichung behandeln müsse, sieht man nicht ein, obgleich man leicht erkennt, daß in derselben die Gleichung für die Kugelfläche, nämlich $z^2 = c^2 - x^2 - y^2$, ja auch die Gleichung für die cylindrische Fläche, nämlich $z^2 = c^2 - y^2$ enthalten sey.

Supplement,

welches

die Entwickelung besonderer Fälle

rücksichtlich

der Integration der Differenzialgleichungen enthält.

Entwickelung ganz besonderer Fälle rücksichtlich der Integration der Differenzialgleichungen.

§. 1. Da bereits sehr viele, und von einander außerordentlich abweichende Methoden, die Differenzialgleichungen zu integriren, gebraucht worden sind, so entsteht die allerdings höchst wichtige Frage, ob es nicht eine einzige, durchaus gleichförmige Methode gebe, nach welcher alle jene verschiedene Differenzialgleichungen, welche man bisher auflösen konnte, integrirt werden können; denn es ist wohl nicht zu zweifeln, daß durch die Auffindung einer solchen Methode die ganze Analysis die größten Erweiterungen erhalten würde. Zwar glaubten mehrere Geometer, in der Absonderung der beyden Veränderlichen eine solche Methode zu finden, indem alle Integrationen der Differenzialgleichungen entweder auf diese Art ausgeführt worden sind, oder doch leicht darauf zurückgeführt werden können. Weil aber diese Methode auf Substitutionen beruhet, welche meistens nicht weniger Scharfsinn erfordern, als das Gesuchte selbst, und bisweilen dennoch nur einem einzigen Falle zuzugehören scheinen, so läßt sich auch diese Methode keineswegs auf die Differenzialgleichungen des zweyten oder der höhern Grade ausdehnen; und diejenigen, welche solche Gleichungen behandelten, sahen sich gezwungen, ganz andere Kunstgriffe zu Hülfe zu nehmen. Man kann daher auch die Absonderung der Veränderlichen nicht als eine gleichförmige und ganz allgemeine Methode betrachten, welche alle bisher gelungenen Integrationen in sich begreift.

§. 2. Ich glaube schon längst eine solche allgemeine Methode angedeutet zu haben, indem ich gezeigt habe, daß, wenn irgend eine Differenzialgleichung des ersten oder eines höhern Grades vorgelegt wird, es immer eine solche Größe gebe, durch welche jene Gleichung multiplicirt, integrabel wird, so daß man niemahls nöthig hat, auf eine andere Weise ängstlich eine Substitution aufzusuchen. Ich zweifle daher keineswegs, daß diese Methode die Differenzialgleichungen mit Hülfe der Multiplication auf die Integrabilität zurückzuführen, als die

allgemeinste, und der Natur der Sache am meisten angemessen genannt werden könne, indem bisher noch keine Integration ausgeführt wurde, die nicht auch auf diese Weise ohne Schwierigkeit durchgeführt werden kann. Denn da jede Differenzialgleichung des ersten Grades in der Form $P dx + Q dy = o$ enthalten ist, wobey die Buchstaben P und Q was immer für Functionen der beyden Veränderlichen x und y bezeichnen, so gibt es immer einen solchen Multiplicator M, welcher ebenfalls irgend eine Function der beyden Variablen x und y ist, daß der Ausdruck $MP dx + MQ dy$ nach gehöriger Multiplication integrabel wird, und setzt man das Integrale desselben einer willkürlichen unveränderlichen Größe gleich, so wird man die Integralgleichung der vorgelegten Differenzialgleichung $P dx + Q dy = o$ erhalten, und eben so verhält es sich auch bey den Differenzialgleichungen höherer Grade. Allein ich bin nicht gesonnen, diesen Gegenstand hier ausführlicher aus einander zu setzen, sondern ich will vielmehr den Vorzug dieser Methode vor der Absonderung der Veränderlichen auch in jenen Fällen, in welchen man dieß am wenigsten vermuthet, nachweisen, und zugleich den außerordentlichen Nutzen derselben erörtern.

§. 3. So oft nämlich in einer Differenzialgleichung die Veränderlichen x und y schon abgesondert sind, pflegt man gewöhnlich die ganze Rechnung schon als vollendet zu betrachten, wenn man von der Gleichung

$$X dx + Y dy = o,$$

wobey X eine Function von x allein, und Y eine Function von y allein bezeichnet, das Integrale

$$\int X dx + \int Y dy = \text{Const.}$$

in seiner Macht hat. Indessen kann es sich sehr oft ereignen, daß auf diese Art der Integralausdruck keineswegs in der einfachsten Gestalt erscheint, oder daß man denselben erst auf mehreren Umwegen daraus ableiten muß. So erhält man z. B. aus der Gleichung

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = o$$

zuerst das logarithmische Integrale

$$lx + ly = la,$$

woraus sich zwar das algebraische $xy = a$ auf der Stelle ergibt; ist aber die Gleichung

$$\frac{dx}{a^2 + x^2} + \frac{dy}{a^2 + y^2} = 0$$

gegeben, so findet man durch die gewöhnliche Integration:

$$\text{arc. tang.} \frac{x}{a} + \text{arc. tang.} \frac{y}{a} = \text{Const.},$$

woraus sich das algebraische Integrale $\frac{x + y}{a^2 - xy} = C$ nicht so leicht ergibt. Ist endlich die Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{\alpha + \beta y + \gamma y^2}} = 0$$

vorgelegt, so weiß man im Allgemeinen nicht einmahl, ob jeder Theil des Integrals durch einen Kreisbogen oder durch einen Logarithmus ausgedrückt wird. Indessen läßt sich dennoch das Integrale jener Gleichung durch folgenden algebraischen Ausdruck darstellen:

$$C^2 (x - y)^2 + 2\gamma C x y + \beta C (x + y) + 2\alpha C + \tfrac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma = 0,$$

und dieser Ausdruck, welcher gewiß der einfachste ist, wird aus dem transcendenten Integrale nur durch mehrere Umwege erhalten.

§. 4. In diesen Fällen sieht man zwar, wie man die Reduction auf eine algebraische Form bewerkstelligen müsse, allein vor wenigen Jahren habe ich solche Integrationen vorgetragen, bey welchen man nicht einmahl diesen Zweck auf irgend eine Weise erreichen kann. Wäre z. B. die Gleichung gegeben:

$$\frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1 + y^4}} = 0,$$

so kann man die Integration weder durch Logarithmen noch durch Kreisbogen ausführen, so daß man dann hieraus auf ähnliche Art die algebraische Gleichung daraus ableiten könnte. Indessen habe ich dennoch gezeigt, daß dieses Integrale, und zwar sogar das vollständige, auf folgende Weise algebraisch dargestellt werde:

$$0 = 2C + (C^2 - 1)(x^2 + y^2) - 2(1 + C^2) xy + 2Cx^2y^2,$$

wobey C die durch die Integration eingeführte Constante bezeichnet. Der weit allgemeineren Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2 + 2\delta x^3 + \varepsilon x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{\alpha + 2\beta y + \gamma y^2 + 2\delta y^3 + \varepsilon y^4}} = 0$$

entspricht nachstehendes vollständige Integrale:

$$\begin{aligned} 0 = 2\alpha C + \beta^2 - \alpha\gamma + 2(\beta C - \alpha\delta)(x + y) + (C^2 - \alpha\varepsilon)(x^2 + y^2) \\ + 2(\gamma C - C^2 - \alpha\varepsilon - \beta\delta) xy + 2(\delta C - \beta\varepsilon) xy(x + y) \\ + (2\varepsilon C + \delta^2 - \gamma\varepsilon) x^2y^2, \end{aligned}$$

wobey C ebenfalls die durch die Integration gefundene willkürliche constante Größe bezeichnet. Diese Fälle zeigen also, daß die Absonderung der Variablen, welche bey den Differenzialgleichungen Statt findet, zur Auffindung der Integralien derselben in einer algebraischen Form gar nichts beytrage, und daher verlangt man mit Recht eine solche Methode, nach welcher diese Integralien sogleich aus den Differenzialgleichungen bestimmt werden können, und man wird sichs nicht reuen lassen, an diesem Gegenstande alle seine Geisteskräfte zu versuchen.

§. 5. Ich habe also bemerkt, daß man diesen Zweck mit Hülfe schicklicher Multiplicatoren erreichen könne, durch welche die Differenzialgleichungen multiplicirt so integrabel werden, daß die Integralien sogleich in einer algebraischen Form zum Vorschein kommen. Um dieß noch deutlicher zu zeigen, will ich von der Gleichung

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

ausgehen; wird diese mit xy multiplicirt, so erhält man sogleich

$$y\,dx + x\,dy = 0,$$

und das Integrale hiervon ist $xy = C$. Auf diese Art wird also durch Aufhebung der Absonderung die Gleichung in eine andere transformirt, welche die Integration gestattet, und hieraus sieht man, daß die Methode, mittelst Multiplicatoren zu integriren, das leiste, was sich von der Absonderung nicht unmittelbar erwarten läßt. Dasselbe findet Statt bey der Gleichung

$$\frac{m\,dx}{x} + \frac{n\,dy}{y} = 0,$$

multiplicirt man diese mit $x^m y^n$, so erhält man das Integrale $x^m y^n = C$, während man von der vorgelegten Gleichung selbst sogleich auf Logarithmen geleitet worden wäre. Wenn die abgesonderte Gleichung

$$\frac{dx}{1 + x^2} + \frac{dy}{1 + y^2} = 0$$

mit $\frac{(1 + x^2)(1 + y^2)}{(x + y)^2}$ multiplicirt wird, so gestattet die resultirende Gleichung

$$\frac{dx\,(1 + y^2) + dy\,(1 + x^2)}{(x + y)^2} = 0$$

die Integration auf ähnliche Art schon von selbst, und man erhält durch

Integration

$$\frac{-1+xy}{x+y} = \text{Const.} \quad \text{oder} \quad \frac{x+y}{1-xy} = a.$$

Allein die Gleichung

$$\frac{2dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0$$

muß man mit $\frac{(x^2+1)^2(1+y^2)}{(2xy+x^2-1)^2}$ multipliciren, damit man erhalte:

$$\frac{2dx(1+x^2)(1+y^2)+dy(x^2+1)^2}{(2xy+x^2-1)^2} = 0,$$

und das Integrale hiervon ist:

$$\frac{x^2y-2x-y}{2xy+x^2-1} = \text{Const.} \quad \text{oder}$$

$$\frac{2x+y-x^2y}{2xy+x^2-1} = a.$$

§. 6. Gegen diese Beyspiele, bey welchen die algebraischen Integralien ohne Hülfe der Absonderung entwickelt wurden, wird man einwenden, daß die Multiplicatoren, durch welche man diesen Zweck erreicht, aus jenen transcendenten Integralien, auf welche die Absonderung der Veränderlichen unmittelbar führt, erschlossen worden seyen, und daß dadurch der Vorzug der Methode, durch Multiplicatoren zu integriren, vor der vorhergehenden keineswegs bewiesen werde. Auf diesen Einwurf antworte ich zuerst, daß die ersteren Beyspiele nach den gefundenen Principien der Integration sogleich auf eine ähnliche Weise berechnet worden seyen, bevor noch die Integration mittelst Logarithmen gefunden worden war, und diese kann also auch zu unserem Zwecke nichts beygetragen haben. Obgleich ich aber ferner zugebe, daß in den letztern Beyspielen die Integration mittelst Kreisbogen jene schicklichen Multiplicatoren bequem gegeben habe, so sieht man dieß denn doch weniger bey der Entwickelung selbst, und man hätte ohne Zweifel dieselbe Integration finden können, bevor man noch wußte daß das Integrale des Ausdruckes $\frac{dx}{1+x^2}$ ein Kreisbogen sey, welcher der Tangente x zugehört. Allein die oben angeführte Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1+y^4}} = 0,$$

deren vollständiges Integrale sich in einer algebraischen Form darstellen läßt, beseitigt wohl jeden weiteren Zweifel; denn da das Integrale

jedes Theiles derselben weder durch Logarithmen noch Kreisbogen, wenn sie auch zugestanden werden, dargestellt werden kann, und der Ausdruck für dasselbe zu einer noch unbekannten Gattung transcendenter Größen zu rechnen ist, so kann man gewiß auch nicht der Meinung seyn, daß derselbe zur Auffindung des algebraischen Integrales etwas beygetragen habe. Eben dieß gilt um so mehr von jener allgemeinern Gleichung, welche im §. 4 vorgelegt wurde, und deren Integrale ich auf eine allerdings eigenthümliche Weise nach ganz verschiedenen Principien abgeleitet habe.

§. 7. Die Methode, deren ich mich damahls bediente, ist so verwickelt, daß kaum ein anderer Weg, zu denselben Integralien zu gelangen, offen zu stehen scheint, und da hierbey die Absonderung der Veränderlichen ganz und gar keinen Einfluß hatte, so hielt ich dafür, daß man auch schwerlich von einer andern, an die Multiplicatoren geknüpften, Methode irgend etwas hoffen könne, besonders da ich damahls selbst noch der Meinung war, daß die Multiplicatoren nichts leisten könnten, wenn nicht die Absonderung der Veränderlichen zu demselben Ziele führe, wenn die Frage bloß Differenzialien des ersten Grades enthielt. Nachdem ich aber später diesen Gegenstand einer ernstern Betrachtung unterzogen hatte, habe ich gesehen, daß, so oft sich das vollständige Integrale irgend einer Differenzialgleichung bestimmen läßt, aus diesem umgekehrt immer ein solcher Multiplicator aufgefunden werden könne, durch welchen die Differenzialgleichung, wenn sie mit demselben multiplicirt wird, nicht allein integrabel wird, sondern auch, wenn sie integrirt wird, eben dieses Integrale, welches schon bekannt war, wieder geben muß. Hierzu ist aber allerdings erforderlich, daß man das vollständige Integrale erforscht hat, indem sich aus den particulären Integralien für diesen Zweck durchaus nichts folgern läßt. Denn hat man die Differenzialgleichung

$$P dx + Q dy = 0,$$

deren vollständiges Integrale man irgend woher kennt, so wird dieses durch eine Gleichung dargestellt werden, welche außer den Veränderlichen x und y und die in der gegebenen Differenzialgleichung vorkommenden constanten Größen auch noch eine neue, ganz von unserer Willkür abhängige Constante enthalten wird. Bezeichnet man diese durch den Buchstaben C, bestimmt ihren Werth aus der Integralgleichung, und findet man $C = V$; so wird V irgend eine bestimmte Function von x und y seyn. Differenziirt man aber diese Gleichung, so

findet man $o = dV$, und das Differenziale dV muß den Differenzialausdruck $P dx + Q dy$ nothwendig so enthalten, daß man die Gleichung hat:

$$dV = M (P dx + Q dy),$$

woraus sich der Multiplicator M, der auf das Integrale $C = V$ leitet, von selbst darbietet.

§. 8. Um nun diese Operation durch einige Beyspiele zu verdeutlichen, nehme man zuerst die Gleichung

$$\frac{m dx}{x} + \frac{n dy}{y} = o;$$

da nun das Integrale derselben $x^m y^n = C$ ist, so erhält man durch Differenziation

$$o = m x^{m-1} y^n dx + n x^m y^{n-1} dy, \quad \text{oder}$$

$$o = x^m y^n \left(\frac{m dx}{x} + \frac{n dy}{y}\right),$$

woraus nun erhellet, daß $x^m y^n$ der auf dieses Integrale führende Multiplicator sey.

Da ferner der Gleichung

$$\frac{dx}{1 + x^2} + \frac{dy}{1 + y^2} = o$$

das vollständige Integrale

$$1 - xy = C (x + y)$$

entspricht, so ergibt sich hieraus für die Constanten der Werth

$$C = \frac{1 - xy}{x + y},$$

und durch Differenziation dieses Ausdruckes erhält man:

$$o = \frac{- dx (1 + y^2) - dy (1 + x^2)}{(x + y)^2}, \quad \text{oder}$$

$$o = \frac{(1 + x^2)(1 + y^2)}{(x + y)^2} \left(\frac{dx}{1 + x^2} + \frac{dy}{1 + y^2}\right),$$

und daher ist der gesuchte Multiplicator $= \frac{(1 + x^2)(1 + y^2)}{(x + y)^2}$.

Ferner sey die Gleichung gegeben:

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{\alpha + 2\beta y + \gamma y^2}} = o,$$

deren vollständiges Integrale

$$C^2(x-y)^2 - 2C(\alpha+\beta x+\beta y+\gamma xy)+\beta^2-\alpha\gamma=0$$

zuerst den Werth gibt:

$$C=\frac{+\alpha+\beta(x+y)+\gamma xy \atop +\sqrt{[\alpha^2+2\alpha\beta(x+y)+\alpha\gamma(x^2+y^2)+4\beta\gamma xy(x+y)+4\beta^2 xy+\gamma^2x^2y^2]}}{(x-y)^2}$$

oder

$$C=\frac{+\alpha+\beta(x+y)+\gamma xy+\sqrt{(\alpha+2\beta x+\gamma x^2)(\alpha+2\beta y+\gamma y^2)}}{(x-y)^2}$$

oder in einer bessern Form:

$$\frac{\beta^2-\alpha\gamma}{C}=+\alpha+\beta(x+y)+\gamma xy+\sqrt{(\alpha+2\beta x+\gamma x^2)(\alpha+2\beta y+\gamma y^2)},$$

und hieraus ergibt sich durch Differenziation:

$$0=+dx(\beta+\gamma y)+dy(\beta+\gamma x)+\frac{dx(\beta+\gamma x)\sqrt{\alpha+2\beta y+\gamma y^2}}{\sqrt{\alpha+2\beta x+\gamma x^2}}$$
$$+\frac{dy(\beta+\gamma y)\sqrt{\alpha+2\beta x+\gamma x^2}}{\sqrt{\alpha+2\beta y+\gamma y^2}},$$

woraus man den gesuchten Multiplicator findet:

$$M=(\beta+\gamma x)\sqrt{\alpha+2\beta y+\gamma y^2}+(\beta+\gamma y)\sqrt{\alpha+2\beta x+\gamma x^2}.$$

§. 9. Auf ähnliche Art verfährt man bey folgender zusammengesetzteren Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{(\alpha+2\beta x+\gamma x^2+2\delta x^3+\varepsilon x^4)}}+\frac{dy}{\sqrt{(\alpha+2\beta y+\gamma y^2+2\delta y^3+\varepsilon y^4)}}=0.$$

Aus dem vollständigen Integrale dieser Gleichung, welches wir oben dargestellt haben, wird sich ein schicklicher Multiplicator M auffinden lassen, mit Hülfe dessen man eben dieses Integrale hätte finden können, wenn er sogleich bekannt gewesen wäre. Allein hier hat man weit mehr Hindernisse zu überwinden, und man wird keineswegs gleich beym ersten Versuche zum Ziele gelangen; ich werde demnach genug geleistet haben, wenn ich bloß die ersten Grundzüge dieser neuen höchst wünschenswerthen Methode entwerfe, durch deren Hülfe man in den Stand gesetzt wird, für eine solche vorgelegte Differenzialgleichung einen schicklichen Multiplicator, der sie integrabel macht, aufzufinden. Für diese Untersuchung wird es sehr nützlich seyn, zuerst zu bemerken, daß, wenn ein einziger solcher Multiplicator einmahl bekannt ist, aus diesem unzählige andere Factoren entwickelt werden können, welche denselben Dienst leisten. Denn wenn der Multiplicator M die Differenzialgleichung

$$P\,dx + Q\,dy = o$$

integrabel macht, so daß man erhält:

$$\int M\,(P\,dx + Q\,dy) = V,$$

und daher die Integralgleichung $V = C$ ist, weil die Formel

$$dV = M\,(P\,dx + Q\,dy)$$

mit jeder beliebigen Function der Größe V multiplicirt, ebenfalls noch integrabel bleibt, so sieht man wohl ein, daß der Ausdruck $Mf(V)$, welche Function von V für $f(V)$ auch genommen werden mag, immer ein schicklicher Multiplicator sey, indem man hat

$$(P\,dx + Q\,dy)\,Mf(V) = dV\,f(V),$$

welche Gleichung integrabel ist. Es wird demnach zweckmäßig seyn, unter diesen zahllosen schicklichen Multiplicatoren in jedem gegebenen Falle jenen zu wählen, durch welchen man die Rechnung am leichtesten vollenden, und das Integrale, wenn es algebraisch ist, in der einfachsten Gestalt darstellen kann. Denn wenn auch das Integrale wirklich algebraisch ist, so kann es sich dennoch ereignen, daß man dieses nicht einmahl vermuthen kann, wenn man nicht einen schicklichen Multiplicator zu Hülfe nimmt, wie dieses die obigen Beyspiele deutlich genug zeigen.

§. 10. Sey also gegeben eine Differenzialgleichung von der Form:

$$\frac{dx}{X} + \frac{dy}{Y} = o,$$

in welcher X bloß eine Function von x, und Y bloß eine Function von y bezeichnet; man soll einen solchen Multiplicator M aufsuchen, durch welchen jene Gleichung in einer algebraischen Form integrabel gemacht wird, wenn es anders möglich ist. Da aber dieses nur selten der Fall ist, so wird es gut seyn, umgekehrt die Functionen X und Y zu bestimmen, wenn man die Form des Multiplicators M angenommen hat. Sey erstens der Multiplicator

$$M = \frac{XY}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^2},$$

damit nachstehender Ausdruck integrabel werde:

$$\frac{Y\,dx + X\,dy}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^2} = o.$$

Wird nun y constant genommen, so ergibt sich hieraus das Integrale

$$\frac{-Y}{\beta(\alpha+\beta x+\gamma y)}+\Gamma(y);$$

wird aber x als constant betrachtet, so ergibt sich:

$$\frac{-X}{\gamma(\alpha+\beta x+\gamma y)}+\Delta(x),$$

welche beyden Ausdrücke einander gleich seyn müssen; man erhält demnach

$$-\gamma Y+\beta\gamma(\alpha+\beta x+\gamma y)\,\Gamma(y)=-\beta X+\beta\gamma(\alpha+\beta x+\gamma y)\,\Delta(x),$$

oder

$$\beta X-\gamma Y=\beta\gamma(\alpha+\beta x+\gamma y)\,(\Delta(x)-\Gamma(y)),$$

so sieht man nun ein, daß die Functionen $\Delta(x)$ und $\Gamma(y)$ so beschaffen seyn müssen, daß nach der Entwickelung des letzten Gliedes jene Theile, welche x und y zugleich enthalten sollten, sich gegenseitig tilgen. Hieraus erhellet, daß

$$\Delta(x)=m\beta x+\text{Const.} \quad \text{und}$$
$$\Gamma(y)=m\gamma y+\text{Const.}$$

seyn werde; setzen wir also

$$\Delta(x)-\Gamma(y)=m\beta x-m\gamma y+n,$$

so werden wir finden:

$$\beta X-\gamma Y=\beta\gamma\left(\begin{matrix}m\beta^2x^2-m\gamma^2y^2+n\beta x+n\gamma y+n\alpha\\ +m\alpha\beta x-m\alpha\gamma y+f\\ -f\end{matrix}\right),$$

woraus man erhält:

$$X=\gamma\,[m\beta^2x^2+\beta(m\alpha+n)\,x+f+\tfrac{1}{2}n\alpha]$$
$$Y=\beta\,[m\gamma^2y^2+\gamma(m\alpha-n)\,y+f-\tfrac{1}{2}n\alpha],$$

und nun wird die algebraische Integralgleichung seyn:

$$m\gamma y-\frac{m\gamma^2y^2-\gamma(m\alpha-n)\,y-f+\frac{1}{2}n\alpha}{\alpha+\beta x+\gamma y}=\text{Const.},$$

oder

$$m\beta\gamma xy+n\gamma y-f+\tfrac{1}{2}n\alpha=C(\alpha+\beta x+\gamma y),$$

oder, wenn $C+\frac{1}{2}n$ statt C geschrieben wird, in der bessern Form:

$$m\beta\gamma xy-\tfrac{1}{2}n\beta x+\tfrac{1}{2}n\gamma y-f=C(\alpha+\beta x+\gamma y).$$

§. 11. Wir wollen nun sehen, unter welchen Bedingungen die Form der allgemeinen Gleichung

$$\frac{h\,dx}{Ax^2+Bx+C}+\frac{k\,dy}{Dy^2+Ey+F}=0$$

nach der obigen Methode integrabel werde. Stellen wir also die Vergleichung mit den gefundenen Werthen an, so finden wir:

$$A = hm\beta^2\gamma, \qquad D = km\beta\gamma^2$$
$$B = h\beta\gamma(m\alpha + n), \qquad E = k\beta\gamma(m\alpha - n)$$
$$C = h\gamma(f + \tfrac{1}{2}n\alpha), \qquad F = k\beta(f - \tfrac{1}{2}n\alpha).$$

Weil hier die ganze Rechnung auf die Verhältnisse dieser Buchstaben zurückgeführt wird, so ergeben sich, wenn für die ersten Gleichungen

$$\beta = Ak \quad \text{und} \quad \gamma = Dh$$

genommen wird, die übrigen:

$$m = \frac{1}{ADh^2k^2}, \quad \alpha = \frac{Bk + Eh}{2}, \quad n = \frac{Bk - Eh}{2ADh^2k^2} \quad \text{und}$$

$$f = \frac{ACk^2 + DFh^2}{2ADh^2k^2},$$

überdieß aber wird noch die Bedingung erfordert, daß die Gleichung

$$\frac{4AC - B^2}{h^2} = \frac{4DF - E^2}{k^2}$$

Statt findet, und wenn diese Gleichung besteht, so wird der schickliche Multiplicator seyn:

$$M = \frac{(Ax^2 + Bx + C)(Dy^2 + Ey + F)}{hk[\frac{1}{2}(Bk + Eh) + Akx + Dhy]^2},$$

und die hieraus resultirende Integralgleichung wird seyn, wenn man mit hk multiplicirt:

$$xy - \frac{(Bk - Eh)x}{4Dh} + \frac{(Bk - Eh)y}{4Ak} - \frac{ACk^2 - DFh^2}{2ADhk} =$$
$$= G[\tfrac{1}{2}(Bk + Eh) + Akx + Dhy],$$

welche Gleichung nach Änderung der willkürlichen Constante G auf folgende Form gebracht wird:

$$\left(x + \frac{B}{2A} - GDh\right)\left(y + \frac{E}{2D} - GAk\right) =$$
$$= G^2ADhk + \frac{(4AC - B^2)k^2 + (4DF - E^2)h^2}{8ADhk},$$

oder

$$\left[\frac{2Ax + B}{h} + G\right]\left[\frac{2Dy + E}{k} + G\right] = G^2 + \frac{4AC - B^2}{2h^2} + \frac{4DF - E^2}{2k^2}.$$

§. 12. Hier haben wir also ein sehr schätzbares Theorem, wiewohl die Wahrheit desselben auch aus anderen Principien einleuchten kann.

Wenn die Differenzialgleichung

$$\frac{h\,dx}{Ax^2+Bx+C} + \frac{k\,dy}{Dy^2+Ey+F} = 0$$

so beschaffen ist, daß

$$\frac{4AC-B^2}{h^2} = \frac{4DF-E^2}{k^2}$$

wird, dann wird das vollständige Integrale derselben algebraisch seyn, und durch folgende Gleichung dargestellt werden:

$$\left(\frac{2Ax+B}{h}\right)\left(\frac{2Dy+E}{k}\right) + G\left(\frac{2Ax+B}{h} + \frac{2Dy+E}{k}\right) = \frac{4AC-B^2}{2h^2} + \frac{4DF-E^2}{2k^2},$$

wo G die durch die Differenziation eingeführte willkürliche Constante bezeichnet. Dieses Integrale findet man aber, wenn die vorgesetzte Gleichung mit dem Multiplicator

$$\frac{(Ax^2+Bx+C)(Dy^2+Ey+F)}{\left(\frac{2Ax+B}{h}+\frac{2Dy+E}{k}\right)^2}$$

multiplicirt wird.

§. 13. So wie wir dem Multiplicator M die Form

$$\frac{XY}{(\alpha+\beta x+\gamma y)^2}$$

gegeben haben, eben so werden wir auch noch zusammengesetztere Ausdrücke gebrauchen können; allein im Allgemeinen kann dieß nicht geschehen. Entwickeln wir aber den Multiplicator

$$M = \frac{XY}{(\alpha+\beta x+\gamma y+\delta xy)^2},$$

damit die Gleichung

$$\frac{Y\,dx + X\,dy}{(\alpha+\beta x+\gamma y+\delta xy)^2} = 0$$

integrabel gemacht werde, so leitet die Integration derselben auf folgende Gleichung:

$$\frac{-Y}{(\beta+\delta y)(\alpha+\beta x+\gamma y+\delta xy)} + \Gamma(y) = \frac{-X}{(\gamma+\delta x)(\alpha+\beta x+\gamma y+\delta xy)} + \Delta(x),$$

welche sich in nachstehende umwandeln läßt:

$$\frac{X}{\gamma+\delta x} - \frac{Y}{\beta+\delta y} = (\alpha+\beta x+\gamma y+\delta xy)\,(\Delta(x) - \Gamma(y)),$$

woraus man deutlich sieht, daß man

$$\Delta(x) = \frac{\zeta x + \eta}{\gamma + \delta x} \quad \text{und} \quad \Gamma(y) = \frac{\zeta y + \theta}{\beta + \delta y}$$

setzen müsse, damit keine Glieder erscheinen, welche beyde Veränderliche zugleich enthalten. Man wird also erhalten:

$$\frac{X}{\gamma + \delta x} - \frac{Y}{\beta + \delta y} = \underset{+\,f}{\eta y} + \frac{(\alpha + \beta x)(\zeta x + \eta)}{\gamma + \delta x} - \underset{-\,f}{\theta x} - \frac{(\alpha + \gamma y)(\zeta y + \theta)}{\beta + \delta y},$$

und hieraus ergibt sich:

$$X = (\alpha + \beta x)(\zeta x + \eta) - (\gamma + \delta x)(\theta x + f)$$
$$Y = (\alpha + \gamma y)(\zeta y + \theta) - (\beta + \delta y)(\eta y + f),$$

oder, wenn man entwickelt:

$$X = (\beta\zeta - \delta\theta)\,x^2 + (\alpha\zeta + \beta\eta - \gamma\theta - \delta f)\,x + \alpha\eta - \gamma f$$
$$Y = (\gamma\zeta - \delta\eta)\,y^2 + (\alpha\zeta + \gamma\theta - \beta\eta - \delta f)\,y + \alpha\theta - \beta f,$$

und die Integralgleichung wird seyn:

$$\frac{\zeta x + \eta}{\gamma + \delta x} - \frac{X}{(\gamma + \delta x)(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x y)} = \text{Const.},$$

welche, wenn man für X den gefundenen Werth substituirt, in folgende übergeht:

$$\frac{\zeta x y + \eta y + \theta x + f}{\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x y} = \text{Const.}$$

§. 14. Bringen wir diese Gleichung wieder auf die Form:

$$\frac{h\,dx}{A x^2 + B x + C} + \frac{k\,dy}{D y^2 + E y + F} = 0,$$

so muß man setzen:

$$A = h(\beta\zeta - \delta\theta), \qquad D = k(\gamma\zeta - \delta\eta)$$
$$B = h(\alpha\zeta + \beta\eta - \gamma\theta - \delta f), \qquad E = k(\alpha\zeta + \gamma\theta - \beta\eta - \delta f)$$
$$C = h(\alpha\eta - \gamma f), \qquad F = k(\alpha\theta - \beta f).$$

Die ersten Gleichungen geben:

$$\theta = \frac{\beta\zeta}{\delta} - \frac{A}{\delta h}; \quad \eta = \frac{\gamma\zeta}{\delta} - \frac{D}{\delta k},$$

die zweyten aber

$$f = \frac{\alpha\zeta}{\delta} - \frac{Bk - Eh}{2\delta h k} \quad \text{und} \quad \delta = \frac{2A\gamma k - 2D\beta h}{Bk - Eh};$$

und daher findet man aus dem dritten Paare von Gleichungen:

$$\frac{2Ck(A\gamma k-D\beta h)}{Bk-Eh}=\frac{\gamma}{2}(Bk+Eh)-D\alpha h$$

$$\frac{2Fh(A\gamma k-D\beta h)}{Bk-Eh}=\frac{\beta}{2}(Bk+Eh)-A\alpha k.$$

Eliminirt man hieraus α, so findet man:

$$\frac{2(ACk^2-DFh^2)(Ak\gamma-Dh\beta)}{Bk-Eh}=\frac{1}{2}(Ak\gamma-Dh\beta)(Bk+Eh),$$

und da hier die Gleichung

$$Ak\gamma-Dh\beta=0$$

nicht bestehen kann, weil sonst $\delta=0$ und die Größen θ, η, f unendlich groß werden würden, dann aber, was wohl bemerkt werden muß, die Integralgleichung Const. = Const. zum Vorschein kommen würde, welche Gleichung nichts sagt, so muß nothwendig die Gleichung

$$4(ACk^2-DFh^2)=B^2k^2-E^2h^2, \text{ oder}$$

$$\frac{4AC-B^2}{h^2}=\frac{4DF-E^2}{k^2},$$

wie früher, bestehen.

Allein es verdient hier vorzüglich bemerkt zu werden, daß, obgleich die drey Buchstaben β, γ und ε unbestimmt bleiben, diese Integralgleichung sich von der vorhergehenden dennoch bloß durch die constante Größe unterscheiden, denn man erhält:

$$\frac{2\zeta hk}{Bk-Eh}+\frac{k(2Ax+B)+h(2Dy+E)}{2(Ak\gamma-Dh\beta)xy+(Bk-Eh)(\beta x+\gamma y)+2(Ck\beta-Fh\gamma)}=\text{Const.},$$

oder

$$\frac{\gamma ky(2Ax+B)+\beta k(Bx+2C)-\beta hx(2Dy+E)-\gamma h(Ey+2F)}{k(2Ax+B)+h(2Dy+E)}=\text{Const.},$$

welcher Ausdruck immer die wahre Integralgleichung darstellt, wie auch die Buchstaben β und γ genommen werden mögen. Da dieß nicht so ganz klar in die Augen fällt, so wird es hinreichend seyn, zu zeigen, daß die beyden Theile, welche β und γ enthalten, für sich genommen, eine und dieselbe Relation zwischen x und y bestimmen. Denn nimmt man die beyden Gleichungen:

$$\frac{2Akxy+Bky-Ehy-2Fh}{2Akx+2Dhy+Bk+Eh}=\text{Const},$$

$$\frac{-2Dhxy-Ehx+Bkx+2Ck}{2Akx+2Dhy+Bk+Eh}=\text{Const.},$$

und multiplicirt man die erstere durch Dh, die letztere aber durch Ak,

so wird man zur Summe erhalten:

$$\frac{Ak(Bk-Eh)x + Dh(Bk-Eh)y + 2ACk^2 - 2DFh^2}{2Akx + 2Dhy + Bk + Eh},$$

und der Werth hiervon ist auch constant, nämlich $= \frac{Bk-Eh}{2}$, weil überdieß

$$\frac{2ACk^2 - 2DFh^2}{Bk+Eh} = \frac{Bk-Eh}{2},$$

woraus der vorgelegte Satz erhellet.

§. 16. Ich gehe nun über auf eine schwierigere Form von Gleichungen, welche

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$$

seyn mag, und der dieselbe integrabel machende Multiplicator sey

$$M = P\sqrt{X} + Q\sqrt{Y},$$

so daß die Gleichung

$$Pdx + Qdy + \frac{Qdx\sqrt{Y}}{\sqrt{X}} + \frac{Pdy\sqrt{X}}{\sqrt{Y}} = 0$$

die Integration zuläßt, und zwar muß jedes Glied dieser Gleichung für sich genommen integrabel seyn. Für das erstere wird man also $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ haben, das Integrale des letztern aber sey $2V\sqrt{XY}$, woraus sich ergibt:

$$Q = 2X\left(\frac{dV}{dx}\right) + V \cdot \frac{dX}{dx} \quad \text{und}$$

$$P = 2Y\left(\frac{dV}{dy}\right) + V \cdot \frac{dY}{dy},$$

und wegen der ersteren Bedingung:

$$2Y\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right) + \frac{3dY}{dy}\left(\frac{dV}{dy}\right) + V\frac{d^2Y}{dy^2} = 2X\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right) + \frac{3dX}{dx}\left(\frac{dV}{dx}\right) + V\frac{d^2X}{dx^2};$$

wenn wir Statt V irgend eine bestimmte Function von x und y setzen, so können wir aus dieser Gleichung erkennen, wie schickliche Werthe für die Functionen X und Y erhalten werden.

§. 16. Geben wir zuerst der Größe V einen constanten Werth, nämlich $V = 1$, so kommen wir auf die Bedingungsgleichung

$$\frac{d^2Y}{dy^2} = \frac{d^2X}{dx^2},$$

$$\frac{2Ck(A\gamma k - D\beta h)}{Bk - Eh} = \frac{\gamma}{2}(Bk + Eh) - D\alpha h$$

$$\frac{2Fh(A\gamma k - D\beta h)}{Bk - Eh} = \frac{\beta}{2}(Bk + Eh) - A\alpha k.$$

Eliminirt man hieraus α, so findet man:

$$\frac{2(ACk^2 - DFh^2)(Ak\gamma - Dh\beta)}{Bk - Eh} = \tfrac{1}{2}(Ak\gamma - Dh\beta)(Bk + Eh),$$

und da hier die Gleichung

$$Ak\gamma - Dh\beta = o$$

nicht bestehen kann, weil sonst $\delta = o$ und die Größen θ, η, f unendlich groß werden würden, dann aber, was wohl bemerkt werden muß, die Integralgleichung Const. = Const. zum Vorschein kommen würde, welche Gleichung nichts sagt, so muß nothwendig die Gleichung

$$4(ACk^2 - DFh^2) = B^2k^2 - E^2h^2, \quad \text{oder}$$

$$\frac{4AC - B^2}{h^2} = \frac{4DF - E^2}{k^2},$$

wie früher, bestehen.

Allein es verdient hier vorzüglich bemerkt zu werden, daß, obgleich die drey Buchstaben β, γ und ζ unbestimmt bleiben, diese Integralgleichung sich von der vorhergehenden dennoch bloß durch die constante Größe unterscheiden, denn man erhält:

$$\frac{2\zeta hk}{Bk - Eh} + \frac{k(2Ax + B) + h(2Dy + E)}{2(Ak\gamma - Dh\beta)xy + (Bk - Eh)(\beta x + \gamma y) + 2(Ck\beta - Fh\gamma)} = \text{Const.},$$

oder

$$\frac{\gamma ky(2Ax + B) + \beta k(Bx + 2C) - \beta hx(2Dy + E) - \gamma h(Ey + 2F)}{k(2Ax + B) + h(2Dy + E)} = \text{Const.},$$

welcher Ausdruck immer die wahre Integralgleichung darstellt, wie auch die Buchstaben β und γ genommen werden mögen. Da dieß nicht so ganz klar in die Augen fällt, so wird es hinreichend seyn, zu zeigen, daß die beyden Theile, welche β und γ enthalten, für sich genommen, eine und dieselbe Relation zwischen x und y bestimmen. Denn nimmt man die beyden Gleichungen:

$$\frac{2Akxy + Bky - Ehy - 2Fh}{2Akx + 2Dhy + Bk + Eh} = \text{Const.}$$

$$\frac{-2Dhxy - Ehx + Bkx + 2Ck}{2Akx + 2Dhy + Bk + Eh} = \text{Const.},$$

und multiplicirt man die erstere durch Dh, die letztere aber durch Ak,

so wird man zur Summe erhalten:

$$\frac{Ak(Bk-Eh)x + Dh(Bk-Eh)y + 2ACk^2 - 2DFh^2}{2Akx + 2Dhy + Bk + Eh},$$

und der Werth hiervon ist auch constant, nämlich $= \frac{Bk-Eh}{2}$, weil überdieß

$$\frac{2ACk^2 - 2DFh^2}{Bk+Eh} = \frac{Bk-Eh}{2},$$

woraus der vorgelegte Satz erhellet.

§. 15. Ich gehe nun über auf eine schwierigere Form von Gleichungen, welche

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = o$$

seyn mag, und der dieselbe integrabel machende Multiplicator sey

$$M = P\sqrt{X} + Q\sqrt{Y},$$

so daß die Gleichung

$$Pdx + Qdy + \frac{Q\,dx\sqrt{Y}}{\sqrt{X}} + \frac{P\,dy\sqrt{X}}{\sqrt{Y}} = o$$

die Integration zuläßt, und zwar muß jedes Glied dieser Gleichung für sich genommen integrabel seyn. Für das erstere wird man also $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ haben, das Integrale des letztern aber sey $2V\sqrt{XY}$, woraus sich ergibt:

$$Q = 2X\left(\frac{dV}{dx}\right) + V\cdot\frac{dX}{dx} \quad \text{und}$$

$$P = 2Y\left(\frac{dV}{dy}\right) + V\cdot\frac{dY}{dy},$$

und wegen der ersteren Bedingung:

$$2Y\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right) + \frac{3dY}{dy}\left(\frac{dV}{dy}\right) + V\frac{d^2Y}{dy^2} = 2X\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right) + \frac{3dX}{dx}\left(\frac{dV}{dx}\right) + V\frac{d^2X}{dx^2};$$

wenn wir Statt V irgend eine bestimmte Function von x und y setzen, so können wir aus dieser Gleichung erkennen, wie schickliche Werthe für die Functionen X und Y erhalten werden.

§. 16. Geben wir zuerst der Größe V einen constanten Werth, nämlich $V = 1$, so kommen wir auf die Bedingungsgleichung

$$\frac{d^2Y}{dy^2} = \frac{d^2X}{dx^2},$$

welche Gleichung nur dann bestehen kann, wenn jedes Glied derselben für sich genommen einer constanten Größe gleich ist. Setzen wir nun diese $= 2\alpha$, so werden wir erhalten:

$$X = ax^2 + bx + c \quad \text{und}$$
$$Y = ay^2 + gy + e,$$

und hieraus ferner

$$P = \frac{dY}{dy} = 2ay + g \quad \text{und}$$
$$Q = \frac{dX}{dx} = 2ax + b,$$

folglich ist die vollständige Integralgleichung:

$$2axy + gx + by + 2\sqrt{XY} = \text{Const.}$$

Es wird demnach die Differenzialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + gy + e}} = 0$$

mit Hülfe des Multiplicators

$$M = (2ay + g)\sqrt{ax^2 + bx + c} + (2ax + b)\sqrt{ay^2 + gy + e}$$

integrabel gemacht, und man wird als vollständiges Integrale finden:

$$2axy + gx + by + 2\sqrt{(ax^2 + bx + c)(ay^2 + gy + e)} = C,$$

oder wenn man die Irrationalität beseitiget:

$$C^2 - 2C(2axy + gx + by) = (4ae - g^2)x^2 + (4ac - b^2)y^2 + 4bex + 4cgy + 4ce;$$

diese Differenzialgleichung aber ist weit allgemeiner als jene, welche ich zu Anfange des §. 3 angeführt habe.

§. 17. Geben wir nun der Größe V den Werth

$$V = \frac{1}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^2},$$

denn hätte ich statt des Exponenten 2 einen unbestimmten genommen, so hätte man bald gesehen, daß diese Potenz genommen werden müsse. Man wird also erhalten:

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = \frac{-2\beta}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^3}; \quad \left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{-2\gamma}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^3},$$
$$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right) = \frac{6\beta^2}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^4}; \quad \left(\frac{d^2V}{dy^2}\right) = \frac{6\gamma^2}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^4};$$

durch die Substitution dieser Werthe aber entstehen folgende zwey

Ausdrücke:

$$12\beta^2 X - \frac{6\beta d.X}{dx}(\alpha+\beta x+\gamma y) + \frac{d^2X}{dx^2}(\alpha+\beta x+\gamma y)^2$$

$$12\gamma^2 Y - \frac{6\gamma d.Y}{dy}(\alpha+\beta x+\gamma y) + \frac{d^2Y}{dy^2}(\alpha+\beta x+\gamma y)^2,$$

weil also in dem erstern Ausdrucke y, in dem andern aber x den zweyten Grad nicht überschreitet, so ist einleuchtend, daß in den Ausdrücken

$$\frac{d^2X}{dx^2} \text{ und } \frac{d^2Y}{dy^2}$$

die Veränderlichen x und y eben so viele Dimensionen haben müssen, weil sonst die Glieder, welche x und y zugleich enthalten, auf beyden Seiten nicht gleich werden könnten; da also die Functionen X und Y sich bis zu dem vierten Grade erheben werden, so setzen wir

$$X = Ax^4 + 2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx + E \text{ und}$$
$$Y = \mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E},$$

substituirt man nun diese Werthe, so erhält man für den ersten Theil

$$\begin{array}{lllll}
\quad 12\beta^2 Ax^4 & + 24\beta^2 Bx^3 & + 12\beta^2 Cx^2 & + 24\beta^2 Dx & + 12\beta^2 E \\
- 24\beta^2 A & - 36\beta^2 B & - 12\beta^2 C & - 12\beta^2 D & - 12\alpha\beta D \\
+ 12\beta^2 A & - 24\alpha\beta A & - 36\alpha\beta B & - 12\alpha\beta C & + 2\alpha^2 C \\
 & + 12\beta^2 B & + 2\beta^2 C & + 4\alpha\beta C & \\
 & + 24\alpha\beta A & + 24\alpha\beta B & + 12\alpha^2 B & \\
 & & + 12\alpha^2 A & & \\
- 24\beta\gamma Ax^3y & - 36\beta\gamma Bx^2y & - 12\beta\gamma Cxy & - 12\beta\gamma Dy & \\
+ 24\beta\gamma A & + 24\beta\gamma B & + 4\beta\gamma C & + 4\alpha\gamma C & \\
 & + 24\alpha\gamma A & + 24\alpha\gamma B & & \\
+ 12\gamma^2 Ax^2y^2 & + 12\gamma^2 Bxy^2 & + 2\gamma^2 Cy^2, & &
\end{array}$$

und diese Glieder reihe man in folgender Ordnung an einander:

$$12\gamma^2 Ax^2y^2 + 12\gamma^2 Bxy^2 + 12\gamma(2\alpha A - \beta B)x^2y$$
$$+ 2\gamma^2 Cy^2 + 8\gamma(3\alpha B - \beta C)xy + 2(6\alpha^2 A - 6\alpha\beta B + \beta^2 C)x^2$$
$$+ 4\gamma(\alpha C - 3\beta D)y + 4(3\alpha^2 B - 2\alpha\beta C + 3\beta^2 D)x$$
$$+ 2(\alpha^2 C - 6\alpha\beta D + 6\beta^2 E).$$

Auf ähnliche Art aber wird der zweyte Theil seyn:

$$12\beta^2\mathfrak{A}x^2y^2 + 12\beta^2\mathfrak{B}x^2y + 12\beta(2\alpha\mathfrak{A} - \gamma\mathfrak{B})xy^2 + 2\beta^2\mathfrak{C}x^2$$
$$+ 8\beta(3\alpha\mathfrak{B} - \gamma\mathfrak{C})xy + 2(6\alpha^2\mathfrak{A} - 6\alpha\gamma\mathfrak{B} + \gamma^2\mathfrak{C})y^2$$
$$+ 4\beta(\alpha\mathfrak{C} - 3\gamma\mathfrak{D})x + 4(3\alpha^2\mathfrak{B} - 2\alpha\gamma\mathfrak{C} + 3\gamma^2\mathfrak{D})y$$
$$+ 2(\alpha^2\mathfrak{C} - 6\alpha\gamma\mathfrak{D} + 6\gamma^2\mathfrak{E}).$$

§. 18. Nun setze man die gleichnahmigen Glieder beyder Ausdrücke einander gleich, so wird man folgenden Gleichungen Genüge leisten müssen:

x^2y^2	$\gamma^2 A = \beta^2 \mathfrak{A}$
x^2y	$2\alpha\gamma A - \beta\gamma B = \beta^2 \mathfrak{B}$
xy^2	$\gamma^2 B = 2\alpha\beta\mathfrak{A} - \beta\gamma\mathfrak{B}$
x^2	$6\alpha^2 A - 6\alpha\beta B + \beta^2 C = \beta^2 \mathfrak{C}$
y^2	$\gamma^2 C = 6\alpha^2\mathfrak{A} - 6\alpha\gamma\mathfrak{B} + \gamma^2\mathfrak{C}$
xy	$3\alpha\gamma B - \beta\gamma C = 3\alpha\beta\mathfrak{B} - \beta\gamma\mathfrak{C}$
x	$3\alpha^2 B - 2\alpha\beta C + 3\beta^2 D = \alpha\beta\mathfrak{C} - 3\beta\gamma\mathfrak{D}$
y	$\alpha\gamma C - 3\beta\gamma D = 3\alpha^2\mathfrak{B} - 2\alpha\gamma\mathfrak{C} + 3\gamma^2\mathfrak{D}$
1	$\alpha^2 C - 6\alpha\beta D + 6\beta^2 E = \alpha^2\mathfrak{C} - 6\alpha\gamma\mathfrak{D} + 6\gamma^2\mathfrak{E}$.

Die drey ersten Gleichungen aber geben bloß die zwey Bestimmungen:

$$\beta = \frac{2\alpha A\sqrt{\mathfrak{A}}}{B\sqrt{\mathfrak{A}} + \mathfrak{B}\sqrt{A}} \text{ und } \gamma = \frac{2\alpha\mathfrak{A}\sqrt{A}}{B\sqrt{\mathfrak{A}} + \mathfrak{B}\sqrt{A}},$$

die vierte und fünfte geben eben so die einzige Bestimmung

$$C - \mathfrak{C} = \frac{3(\mathfrak{A}B^2 - A\mathfrak{B}^2)}{2A\mathfrak{A}} = \frac{3}{2}\left(\frac{B^2}{A} - \frac{\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{A}}\right),$$

und eben diese Gleichung ergibt sich auch aus der sechsten. Man setze also:

$$C = \frac{3B^2}{2A} + n \quad \text{und} \quad \mathfrak{C} = \frac{3\mathfrak{B}^2}{2\mathfrak{A}} + n.$$

Die siebente und achte Gleichung enthalten ebenfalls die einzige Bestimmung:

$$\frac{D\sqrt{A} + \mathfrak{D}\sqrt{\mathfrak{A}}}{B\sqrt{\mathfrak{A}} + \mathfrak{B}\sqrt{A}} = \frac{A\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{A}B^2 - B\mathfrak{B}\sqrt{A\mathfrak{A}} + 2nA\mathfrak{A}}{4A\mathfrak{A}\sqrt{A\mathfrak{A}}} \quad \text{oder}$$

$$D\sqrt{A} + \mathfrak{D}\sqrt{\mathfrak{A}} = \frac{B^3}{4A\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{B}^3}{4\mathfrak{A}\sqrt{\mathfrak{A}}} + \frac{nB}{2\sqrt{A}} + \frac{n\mathfrak{B}}{2\sqrt{\mathfrak{A}}},$$

man setze also:

$$D = \frac{B^3}{4A^2} + \frac{nB}{2A} + \frac{m}{2\sqrt{A}} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{B}^3}{4\mathfrak{A}^2} + \frac{n\mathfrak{B}}{2\mathfrak{A}} - \frac{m}{2\sqrt{\mathfrak{A}}}.$$

Werden diese Werthe in der letztern Gleichung substituirt, so findet man:

$$24(AE - \mathfrak{A}\mathfrak{E}) = \frac{3B^4}{2A^2} + \frac{6nB^2}{A} - \frac{12mB}{\sqrt{A}}$$
$$- \frac{3\mathfrak{B}^4}{2\mathfrak{A}^2} - \frac{6n\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{A}} + \frac{12m\mathfrak{B}}{\sqrt{\mathfrak{A}}},$$

und daher wird man bequem setzen können:

$$E = \frac{B^4}{16 A^3} + \frac{n B^2}{4 A^2} + \frac{m B}{2 A \sqrt{A}} + \frac{1}{A}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{B}^4}{16 \mathfrak{A}^3} + \frac{n \mathfrak{B}^2}{4 \mathfrak{A}^2} - \frac{m \mathfrak{B}}{2 \mathfrak{A} \sqrt{\mathfrak{A}}} + \frac{1}{\mathfrak{A}}.$$

§. 19. Da wir aber $V = \frac{1}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^2}$ genommen haben, so werden wir erhalten:

$$Q = \frac{-4\beta(Ax^4 + 2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx + E)}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^3} + \frac{2(2Ax^3 + 3Bx^2 + Cx + D)}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^2}$$

$$P = \frac{-4\gamma(\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E})}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^3} + \frac{2(2\mathfrak{A}y^3 + 3\mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}y + \mathfrak{D})}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^2}$$

oder

$$Q = \frac{\left\{\begin{array}{l} 2\gamma y(2Ax^3 + 3Bx^2 + Cx + D) + 2(2\alpha A - \beta B)x^3 \\ + 2(3\alpha B - \beta C)x^2 + 2(\alpha C - 3\beta D)x + 2(\alpha D - 2\beta E) \end{array}\right\}}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^3}$$

$$P = \frac{\left\{\begin{array}{l} 2\beta x(2\mathfrak{A}y^3 + 3\mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}y + \mathfrak{D}) + 2(2\alpha\mathfrak{A} - \gamma\mathfrak{B})y^3 \\ + 2(3\alpha\mathfrak{B} - \gamma\mathfrak{C})y^2 + 2(\alpha\mathfrak{C} - 3\gamma\mathfrak{D})y + 2(\alpha\mathfrak{D} - 2\gamma\mathfrak{E}) \end{array}\right\}}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^3}$$

woraus das Integrale der Formel $P\,dx + Q\,dy$ gesucht werden muß. Addirt man zu diesem ferner $\frac{2\sqrt{XY}}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^2}$, und setzt die Summe gleich einer constanten Größe, so stellt diese das vollständige Integrale der Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$$

dar. Um aber jenes Integrale zu finden, so bemerke man, daß nach den erstern für P und Q dargestellten Werthen abgesondert die Gleichungen Statt finden:

$$\int Q\,dy = \frac{2\beta(Ax^4 + 2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx + E)}{\gamma(\alpha + \beta x + \gamma y)^2} - \frac{2(2Ax^3 + 3Bx^2 + Cx + D)}{\gamma(\alpha + \beta x + \gamma y)} + \Gamma(x),$$

$$\int P\,dx = \frac{2\gamma(\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E})}{\beta(\alpha + \beta x + \gamma y)^2} - \frac{2(2\mathfrak{A}y^3 + 3\mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}y + \mathfrak{D})}{\beta(\alpha + \beta x + \gamma y)} + \Delta(y),$$

welche zwey Ausdrücke einander gleich seyn müssen: zu diesem Ende setze man

$$\Gamma(x) = \frac{2(Ax^2 + Bx + N)}{\beta\gamma} \quad \text{und} \quad \Delta(y) = \frac{2(\mathfrak{A}y^2 + \mathfrak{B}y + \mathfrak{N})}{\beta\gamma}.$$

und man wird erhalten:

$\frac{1}{6}\beta\gamma(\alpha+\beta x+\gamma y)^2\int Q\,dy$	$\frac{1}{6}\beta\gamma(\alpha+\beta x+\gamma y)^2\int P\,dx$
$+ A\gamma^2x^2y^2$	$+ \mathfrak{A}\beta^2x^2y^2$
$+ B\gamma^2xy^2$	$+ \beta(2\mathfrak{A}\alpha - \mathfrak{B}\gamma)xy^2$
$+ \gamma(2A\alpha - B\beta)x^2y$	$+ \mathfrak{B}\beta^2x^2y$
$+ N\gamma^2y^2$	$+ (\mathfrak{A}\alpha^2 - \mathfrak{B}\alpha\gamma + \mathfrak{N}\gamma^2)y^2$
$+ (A\alpha^2 - B\alpha\beta + N\beta^2)x^2$	$+ \mathfrak{N}\beta^2x^2$
$+ \gamma(2B\alpha - C\beta + 2N\beta)xy$	$+ \beta(2\mathfrak{B}\alpha - \mathfrak{C}\gamma + 2\mathfrak{N}\gamma)xy$
$+ \gamma(2N\alpha - D\beta)y$	$+ (\mathfrak{B}\alpha^2 - \mathfrak{C}\alpha\gamma + \mathfrak{D}\gamma^2 + 2\mathfrak{N}\alpha\gamma)y$
$+ (B\alpha^2 - C\alpha\beta + D\beta^2 + 2N\alpha\beta)x$	$+ \beta(2\mathfrak{N}\alpha - \mathfrak{D}\gamma)x$
$+ E\beta^2 - D\alpha\beta + N\alpha^2$	$+ \mathfrak{C}\gamma^2 - \mathfrak{D}\alpha\gamma + \mathfrak{N}\alpha^2.$

§. 20. Diese Bedingungen stimmen mit den vorhergehenden (§. 18) vollkommen überein, wenn man

$$N = \tfrac{1}{6}C \quad \text{und} \quad \mathfrak{N} = \tfrac{1}{6}\mathfrak{C}$$

setzt. Dividiren wir die einzelnen Glieder durch 6γ, damit der Werth des Ausdruckes

$$\tfrac{1}{6}(\alpha + \beta x + \gamma y)^2 \int Q\,dy$$

zum Vorschein komme, für welchen man durch Substitution der vorhin gefundenen Werthe finden wird:

$$x^2y^2\sqrt{A\mathfrak{A}} + Bxy^2\sqrt{\frac{\mathfrak{A}}{A}} + \mathfrak{B}x^2y\sqrt{\frac{A}{\mathfrak{A}}} + \tfrac{1}{6}Cy^2\sqrt{\frac{\mathfrak{A}}{A}}$$
$$+ \tfrac{1}{6}\mathfrak{C}x^2\sqrt{\frac{A}{\mathfrak{A}}}$$
$$+ \left(\frac{B\mathfrak{B}}{\sqrt{A\mathfrak{A}}} - \tfrac{2}{3}n\right)xy + \left(\frac{B^2\mathfrak{B}}{4A\sqrt{A\mathfrak{A}}} - \frac{nB}{3A} + \frac{n\mathfrak{B}}{6\sqrt{A\mathfrak{A}}} - \frac{m}{2\sqrt{A}}\right)y$$
$$+ \left(\frac{B\mathfrak{B}^2}{4\mathfrak{A}\sqrt{A\mathfrak{A}}} - \frac{n\mathfrak{B}}{3\mathfrak{A}} + \frac{nB}{6\sqrt{A\mathfrak{A}}} + \frac{m}{2\sqrt{\mathfrak{A}}}\right)x$$
$$+ \frac{B^2\mathfrak{B}^2}{16A\mathfrak{A}\sqrt{A\mathfrak{A}}} + \frac{n(B\sqrt{\mathfrak{A}} + \mathfrak{B}\sqrt{A})^2}{24A\mathfrak{A}\sqrt{A\mathfrak{A}}} - \frac{nB\mathfrak{B}}{4A\mathfrak{A}} + \frac{m(B\sqrt{\mathfrak{A}} - \mathfrak{B}\sqrt{A})}{4A\mathfrak{A}} + \frac{1}{\sqrt{A\mathfrak{A}}}$$

Man setze Kürze halber diesen Ausdruck $= S$, so wird das vollständige Integrale seyn:

$$\frac{S + \sqrt{XY}}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^2} = \text{Const.} \quad \text{oder}$$

$$S + \sqrt{XY} = \text{Const.}\,(B\sqrt{\mathfrak{A}} + \mathfrak{B}\sqrt{A} + 2Ax\sqrt{\mathfrak{A}} + 2\mathfrak{A}y\sqrt{A})^2,$$

welches auch in folgender schöneren Form dargestellt werden kann:

$$S + \sqrt{XY} = \text{Const.}\left(\frac{B}{\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{\mathfrak{A}}} + 2x\sqrt{A} + 2y\sqrt{\mathfrak{A}}\right)^2.$$

Wenn die Functionen X und Y den früher bestimmten Bedingungen entsprechen, so erhält man also auf diese Weise das vollständige Integrale der Differenzialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0.$$

§. 21. Diese Untersuchung kann noch etwas allgemeiner angestellt werden, wenn man der Größe V den Werth $\frac{1}{(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^2}$ beylegt. Um aber die Schwierigkeiten der Rechnung leichter überwinden zu können, bemerke ich, daß derselbe auf die Form $\frac{1}{(a + xy)^2}$ zurückgeführt werden könne, wenn nur die Veränderlichen x und y um eine constante Größe vermehrt oder vermindert werden; nach Beendigung der Rechnung aber kann jene Form leicht wieder hergestellt werden. Ich werde also folgende Form der Differenzialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$$

betrachten, und nehme an, daß dieselbe mit Hülfe des Multiplicators $P\sqrt{X} + Q\sqrt{Y}$ integrabel gemacht werde, so daß man die Formel

$$Pdx + Qdy + \frac{Qdx\sqrt{Y}}{\sqrt{X}} + \frac{Pdy\sqrt{X}}{\sqrt{Y}} = 0$$

zu integriren hat. Man setze, das Integrale des letztern Theiles sey $= 2V\sqrt{XY}$, und man wird, wie wir gesehen haben, erhalten:

$$Q = 2X\left(\frac{dV}{dx}\right) + V \cdot \frac{dX}{dx} \quad \text{und}$$
$$P = 2Y\left(\frac{dV}{dy}\right) + V \cdot \frac{dY}{dy}.$$

Sey also $V = \frac{1}{(a + xy)^2}$, und daher

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = \frac{-2y}{(a + xy)^3} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{-2x}{(a + xy)^3},$$

so, daß wir erhalten:

$$Q = \frac{-4Xy}{(a + xy)^3} + \frac{dX}{dx} \cdot \frac{1}{(a + xy)^2} \quad \text{und}$$
$$P = \frac{-4Yx}{(a + xy)^3} + \frac{dY}{dy} \cdot \frac{1}{(a + xy)^2}.$$

Nun muß man aber zu bewirken suchen, daß die Formel

$$Pdx + Qdy$$

die Integration gestattet; zu diesem Ende nehme man das Integrale derselben auf doppelte Art, indem man entweder y oder x als constant betrachtet, und so werden wir erhalten:

$$\int P\,dx = \frac{4Y}{y^2(a+xy)} - \frac{2aY}{y^2(a+xy)^2} - \frac{dY}{y\,dy}\cdot\frac{1}{a+xy} + \frac{\Gamma(y)}{y^2}$$

$$\int Q\,dy = \frac{4X}{x^2(a+xy)} - \frac{2aX}{x^2(a+xy)^2} - \frac{dX}{x\,dx}\cdot\frac{1}{a+xy} + \frac{\Delta(x)}{x^2},$$

welche beyden Ausdrücke einander gleich gemacht werden müssen. Durch die Multiplication mit $x^2y^2(a+xy)^2$ werden wir demnach finden:

$$4x^2Y(a+xy) - 2ax^2Y - \frac{x^2y\,dY}{dy}(a+xy) + x^2\Gamma(y).(a+xy)^2 =$$

$$4y^2X(a+xy) - 2ay^2X - \frac{xy^2\,dX}{dx}(a+xy) + y^2\Delta(x).(a+xy)^2.$$

Nehmen wir also an, es sey:

$$X = Ax^4 + 2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx + E;\ \Delta(x) = Lx^2 + Mx + N$$

$$Y = \mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E};\ \Gamma(y) = \mathfrak{L}y^2 + \mathfrak{M}y + \mathfrak{N}$$

$$\frac{dX}{dx} = 4Ax^3 + 6Bx^2 + 2Cx + 2D \quad \text{und}$$

$$\frac{dY}{dy} = 4\mathfrak{A}y^3 + 6\mathfrak{B}y^2 + 2\mathfrak{C}y + 2\mathfrak{D}.$$

Unsere Ausdrücke werden daher folgende Formen annehmen:

$x^2y^2(a+xy)^2\int Q\,dy$	$x^2y^2(a+xy)^2\int P\,dx$
$+ Lx^4y^4$	$+ \mathfrak{L}x^4y^4$
$+ Mx^3y^4$	$+ 2\mathfrak{B}x^3y^4$
$+ 2Bx^4y^3$	$+ \mathfrak{M}x^4y^3$
$+ Nx^2y^4$	$- 2a\mathfrak{A}x^2y^4$
$+ 2(C+aL)x^3y^3$	$+ 2(\mathfrak{C}+a\mathfrak{L})x^3y^3$
$- 2aAx^4y^2$	$+ \mathfrak{N}x^4y^2$
$+ 2(3D+aM)x^2y^3$	$- 2a\mathfrak{B}x^2y^3$
$- 2aBx^3y^2$	$+ 2(3\mathfrak{D}+a\mathfrak{M})x^3y^2$
$+ a^2Lx^2y^2$	$+ a^2\mathfrak{L}x^2y^2$
$+ 2(2E+aN)xy^3$	$+ 0xy^3$
$+ 0x^3y$	$+ 2(2\mathfrak{E}+a\mathfrak{N})x^3y$
$+ (2aD+a^2M)xy^2$	$+ 0xy^2$
$+ 0x^2y$	$+ (2a\mathfrak{D}+a^2\mathfrak{M})x^2y$
$+ (2aE+a^2N)y^2$	$+ 0y^2$
$+ 0x^2$	$+ (2a\mathfrak{E}+a^2\mathfrak{N})x^2$

§. 22. Die Gleichstellung dieser Ausdrücke gibt nachfolgende Bestimmungen:

$\mathfrak{L} = L$; $M = 2\mathfrak{B}$; $\mathfrak{M} = 2B$; $N = -2a\mathfrak{A}$; $\mathfrak{N} = -2aA$
$\mathfrak{C} = C$; $D = -a\mathfrak{B}$; $\mathfrak{D} = -aB$; $E = a^2\mathfrak{A}$; $\mathfrak{E} = a^2 A$,

so daß man folgende Differenzialgleichung erhält:

$$\frac{dx}{\sqrt{Ax^4+2Bx^3+Cx^2+2Dx+E}} + \frac{dy}{\sqrt{\frac{E}{a^2}y^4 - \frac{2D}{a}y^3 + Cy^2 - 2aBy + a^2A}} = 0;$$

das vollständige Integrale derselben ist:

$$\frac{2Bx^2y - \frac{2D}{a}xy^2 - 2aAx^2 - \frac{2E}{a}y^2 + 2Cxy - 2aBx + 2Dy + 2\sqrt{XY}}{(a + xy)^2} = \text{Const.}$$

Ich bemerke hier, daß, wenn $y = \frac{-a}{z}$ gesetzt wird, die anfangs angeführte Gleichung zum Vorschein komme:

$$\frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + 2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx + E}} + \frac{dz}{\sqrt{Az^4 + 2Bz^3 + Cz^2 + 2Dz + E}} = 0.$$

Das Integrale dieser Gleichung kann nun auch nach den höchst einfachen Principien der Integration angegeben werden, da ich vorher durch eine ganz indirecte Methode darauf geleitet wurde; das Integrale ist nämlich:

$$Ax^2z^2 + Bxz(x+z) + Cxz + D(x+z) + E + G(x-z)^2 =$$
$$\sqrt{(Ax^4 + 2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx + E)(Az^4 + 2Bz^3 + Cz^2 + 2Dz + E)},$$

welche Gleichung nach Beseitigung der Irrationalität folgende Form annimmt:

$$G^2(x-z)^2 + 2G[Ax^2z^2 + Bxz(x+z) + Cxz + D(x+z) + E]$$
$$+ (B^2 - AC)x^2z^2 - 2ADxz(x+z) - AE(x+z)^2 - 2BDxz$$
$$- 2BE(x+z) + D^2 - CE = 0;$$

die auf diese Form gebrachte Gleichung stimmt mit der obigen überein:

$$(2AG + B^2 - AC)x^2z^2 + 2(BG - AD)xz(x+z)$$
$$+ (G^2 - AE)(x+z)^2 - 2(2G^2 + BD - CG)xz$$
$$+ 2(DG - BE)(x+z) + 2EG + D^2 - CE = 0.$$

§. 23. Wenn wir nun untersuchen wollen, unter welchen Bedingungen die Differenzialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + 2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx + E}} + \frac{dy}{\sqrt{\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E}}} = 0$$

die Integration gestattet, so stellen wir uns vor, daß diese aus jener entstehe, wenn man $z = \frac{fy + g}{hy + k}$ setzt, so daß die Integralgleichung seyn wird:

$$(2AG + B^2 - AC)x^2(fy+g)^2 + 2(BG - AD)x(fy+g)(hxy+kx+fy+g)$$
$$+ (G^2 - AE)(hxy+kx+fy+g)^2 - 2(2G^2 - CG + BD)x(fy+g)(hy+k)$$
$$+ 2(DG - BE)(hy+k)(hxy+kx+fy+g) + (2EG + D^2 - CE)(hy+k)^2 = 0$$

Allein die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ werden aus den Größen f, g, h, k so bestimmt, daß man erhält:

$$\mathfrak{A}(fk - gh)^2 = Af^4 + 2Bf^3h + Cf^2h^2 + 2Dfh^3 + Eh^4$$
$$\mathfrak{B}(fk - gh)^2 = 2Af^3g + Bf^2(3gh + fk) + Cfh(fk + gh)$$
$$+ Dh^2(3fk + gh) + 2Eh^3k$$
$$\mathfrak{C}(fk - gh)^2 = 6Af^2g^2 + 6Bfg(fk + gh) + C(fk + gh)^2$$
$$+ 6Dhk(fk + gh) + 6Eh^2k^2 + 2Cfghk$$
$$\mathfrak{D}(fk - gh)^2 = 2Afg^3 + Bg^2(gh + 3fk) + Cgk(fk + gh)$$
$$+ Dk^2(fk + 3gh) + 2Ehk^3$$
$$\mathfrak{E}(fk - gh)^2 = Ag^4 + 2Bg^3k + Cg^2k^2 + 2Dgk^3 + Ek^4.$$

§. 24. Untersuchen wir nun, in wie weit wir die Rechnung ausführen können, da wir das Problem im Allgemeinen aufgefaßt haben. Sey also die vorgelegte Gleichung $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$, welche durch Multiplication mit $P\sqrt{X} + Q\sqrt{Y}$ integrabel werden soll, und das Integrale sey:

$$\int(P\,dx + Q\,dy) + \frac{2\sqrt{XY}}{(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^2} = \text{Const.},$$

so werden wir, wie wir bereits gesehen haben, finden:

$$Q = \frac{-4X(\beta + \delta y)}{(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^3} + \frac{dX}{dx\,(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^2}$$

$$P = \frac{-4Y(\gamma + \delta x)}{(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^3} + \frac{dY}{dy\,(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^2},$$

und hieraus folgern wir:

$$(\gamma + \delta x)^2(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^2 \int Q\,dy = 2(\beta\gamma - \alpha\delta)X$$
$$+ \left(4\delta X - (\gamma + \delta x)\frac{dX}{dx}\right)(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)$$
$$+ (\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^2 \Delta(x),$$

und auf ähnliche Art:

$$(\beta + \delta y)^2 (\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x y)^2 \int P dx = 2(\beta\gamma - \alpha\delta) Y$$
$$+ \left(4\delta Y - (\beta + \delta y)\frac{dY}{dy}\right)(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x y)$$
$$+ (\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x y)^2 \Gamma(y),$$

welche zwey Ausdrücke übereinstimmend gemacht werden müssen, so daß der erste durch $(\gamma + \delta x)^2$, der andere aber durch $(\beta + \delta y)^2$ dividirt dieselbe Function gibt. Es ist also nöthig, daß der erstere durch $(\gamma + \delta x)^2$, der letztere aber durch $(\beta + \delta y)^2$ theilbar sey, und diesem Erforderniſſe muß demnach vor allem Genüge geleistet werden

§. 25. Entwickeln wir den ersteren Werth, indem wir die von y abhängigen Theile unterscheiden; nämlich

$$\text{I.}\ 2(\beta\gamma - \alpha\delta) X + 4\delta(\alpha + \beta x) X - (\alpha + \beta x)(\gamma + \delta x)\frac{dX}{dx} + (\alpha + \beta x)^2 \Delta(x)$$

$$\text{II.}\ - y(\gamma + \delta x)\left(4\delta X - (\gamma + \delta x)\frac{dX}{dx} + 2(\alpha + \beta x)\Delta(x)\right)$$

$$\text{III.}\ + y^2 (\gamma + \delta x)^2 \Delta(x),$$

welcher Ausdruck durch $(\gamma + \delta x)^2$ theilbar seyn muß; da also der dritte Theil für sich theilbar ist, so setzen wir für den zweyten:

$$(\alpha + \beta x)\Delta(x) + 2\delta X = (\gamma + \delta x) R,$$

und der erste Theil wird seyn:

$$2(\beta\gamma - \alpha\delta)X + 2\delta(\alpha + \beta x)X + (\alpha + \beta x)(\gamma + \delta x)R - (\alpha + \beta x)(\gamma + \delta x)\frac{dX}{dx}$$

und dieser nimmt folgende Form an:

$$(\gamma + \delta x)\left(2\beta X + (\alpha + \beta x) R - (\alpha + \beta x)\frac{dX}{dx}\right),$$

so daß

$$2\beta X + (\alpha + \beta x)\left(R - \frac{dX}{dx}\right)$$

durch $\gamma + \delta x$ noch theilbar seyn muß. Dieser Bedingung wird entsprochen, wenn man

$$R = \frac{\beta}{\delta}\Delta(x) - \frac{\alpha + \beta x}{\delta}\Delta'(x) + (\gamma + \delta x) S$$

setzt, und daher wird

$$X = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{2\delta^2}\Delta(x) - \frac{(\alpha + \beta x)(\gamma + \delta x)}{2\delta^2}\Delta'(x) + \frac{(\gamma + \delta x)^2}{2\delta} S.$$

Der erste Theil wird also seyn:

$$(\gamma + \delta x)^2 \left(\frac{\beta}{\delta} R - \frac{(\alpha + \beta x)\, dR}{2\delta\, dx}\right) + \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta x)(\gamma + \delta x)^2 S,$$

$$+ \left(\frac{\beta^2}{\delta^2} \Delta(x) - \frac{\beta(\alpha+\beta x)}{\delta^2} \Delta'(x) + \frac{(\alpha+\beta x)^2}{2\delta^2} \Delta''(x) + \frac{\beta(\gamma+\delta x)}{\delta} S - \frac{(\alpha+\beta x)(\gamma+\delta x)}{2\delta} \cdot \frac{dS}{dx} \right);$$

...te Theil:

$$+ \left\{ \ldots \Delta(x) - \frac{(\alpha+\beta x)}{\delta} \Delta'(x) + \frac{(\alpha+\beta x)(\gamma+\delta x)}{2\delta^2} \Delta''(x) + (\gamma+\delta x) S - \frac{(\gamma+\delta x)^2}{2\delta} \cdot \frac{dS}{dx} \right\}$$

Theil:

$$y^2 (\gamma + \delta x)^2 \Delta(x).$$

Deßhalb wird die Formel:

$$(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x y)^2 \int Q \, dy$$

... Werth erhalten:

$$\Delta(x) + \frac{2\beta}{\delta} y \Delta(x) + y^2 \Delta(x) - \frac{\beta(\alpha+\beta x)}{\delta^2} \Delta'(x) - \frac{(\alpha+\beta x)}{\delta} y \Delta'(x)$$
$$+ \frac{(\alpha+\beta x)^2}{2\delta^2} \Delta''(x) + \frac{(\alpha+\beta x)(\gamma+\delta x)}{2\delta^2} y \Delta''(x)$$
$$+ \frac{\beta}{\delta}(\gamma+\delta x) S + (\gamma+\delta x) y S - \frac{(\alpha+\beta x)(\gamma+\delta x)}{2\delta} \cdot \frac{dS}{dx}$$
$$- \frac{(\gamma+\delta x)^2}{2\delta} y \cdot \frac{dS}{dx},$$

oder bündiger ausgedrückt:

$$\frac{(\beta+\delta y)^2}{\delta^2} \Delta(x) - \frac{(\alpha+\beta x)(\beta+\delta y)}{\delta^2} \Delta'(x) + \frac{(\alpha+\beta x)(\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x y)}{2\delta^2} \Delta''(x)$$
$$+ \frac{(\gamma+\delta x)(\beta+\delta y)}{\delta} S - \frac{(\gamma+\delta x)(\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x y)}{2\delta} \cdot \frac{dS}{dx},$$

welchem Ausdrucke der andere:

$$\frac{(\gamma+\delta x)^2}{\delta^2} \Gamma(y) - \frac{(\alpha+\gamma y)(\gamma+\delta x)}{\delta^2} \Gamma'(y) + \frac{(\alpha+\gamma y)(\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x y)}{2\delta^2} \Gamma''(y)$$
$$+ \frac{(\beta+\delta y)(\gamma+\delta x)}{\delta} \mathfrak{S} - \frac{(\beta+\delta y)(\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x y)}{2\delta} \cdot \frac{d\mathfrak{S}}{dy}$$

gleich werden muß.

§. 26. Wenn wir nun

$\Delta(x) = \delta^2 (A x^2 + 2 B x + C)$ und $S = \delta(D x + 2 E x + F)$

und eben so

$\Gamma(y) = \delta^2 (\mathfrak{A} y^2 + 2 \mathfrak{B} y + \mathfrak{C})$ und $\mathfrak{S} = \delta(\mathfrak{D} y^2 + 2 \mathfrak{E} y + \mathfrak{F})$

setzen, so werden unsere Ausdrücke entwickelt sich auf folgende Art darstellen:

$(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x y)^2 \int Q\, dy$	$(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x y)^2 \int P\, dx$
$+ \delta^2 A x^2 y^2$	$+ \delta^2 \mathfrak{A} x^2 y^2$
$+ 2\delta^2 B x y^2$	$+ \delta(\gamma\mathfrak{A} - \beta\mathfrak{D} + \delta\mathfrak{E})\, x y^2$
$+ \delta(\beta A - \gamma D + \delta E)\, x^2 y$	$+ 2\delta^2 \mathfrak{B} x^2 y$
$+ \delta^2 C y^2$	$+ \delta(\gamma\mathfrak{E} - \alpha\mathfrak{D})\, y^2$
$+ \delta(\beta E - \alpha D)\, x^2$	$+ \delta^2 \mathfrak{C} x^2$
$+ [2\beta\delta B + (\beta\gamma - \alpha\delta) A - \gamma^2 D + \delta^2 F]\, x y$	$+ [2\gamma\delta\mathfrak{B} + (\beta\gamma - \alpha\delta)\mathfrak{A} - \beta^2\mathfrak{D} + \delta^2\mathfrak{F}]\, x y$
$+ (\alpha\gamma A - 2\alpha\delta B + 2\beta\delta C - \gamma^2 E + \gamma\delta F)\, y$	$+ (\gamma\delta\mathfrak{F} + (\beta\gamma - \alpha\delta)\mathfrak{E} - \alpha\beta\mathfrak{D})\, y$
$+ (\beta\delta F + (\beta\gamma - \alpha\delta) E - \alpha\gamma D)\, x$	$+ (\alpha\beta\mathfrak{A} - 2\alpha\delta\mathfrak{B} + 2\gamma\delta\mathfrak{C} - \beta^2\mathfrak{E} + \beta\delta\mathfrak{F})\, x$
$+ \alpha^2 A - 2\alpha\beta B + \beta^2 C - \alpha\gamma E + \beta\gamma F$	$+ \alpha^2\mathfrak{A} - 2\alpha\gamma\mathfrak{B} + \gamma^2\mathfrak{C} - \alpha\beta\mathfrak{E} + \beta\gamma\mathfrak{F}$,

woraus sich nur folgende sechs Bestimmungen ergeben:

$$\mathfrak{A} = A$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\beta A - \gamma D}{2\delta} + \tfrac{1}{2} E$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\beta E - \alpha D}{\delta}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{2\gamma\delta B - \gamma^2 A - \delta^2 C}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{2\alpha\delta B - \alpha\gamma A - \beta\delta C}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

$$\mathfrak{F} = F - \frac{\gamma E}{\delta} - \frac{\alpha\beta\gamma A + 2\alpha\beta\delta B - \beta^2\delta C}{\delta(\alpha\delta - \beta\gamma)},$$

denn durch diese Bestimmungen wird allen jenen Bedingungen Genüge geleistet. So bleiben also alle Größen A, B, C, D, E, F, und eben so α, β, γ, δ unserer Willkür überlassen, und aus diesem ergibt sich ferner die Function:

$$\begin{aligned} 2X = {} & \delta^2 D x^4 + 2\delta(\delta E + \gamma D - \beta A)\, x^3 \\ & + [\delta^2 F + 4\gamma\delta E + \gamma^2 D - 2\beta\delta B - (\beta\gamma + 3\alpha\delta) A]\, x^2 \\ & + 2(\gamma\delta F + \gamma^2 E - \alpha\gamma A - 2\alpha\delta B)\, x \\ & + \gamma^2 F - 2\alpha\gamma B + (\beta\gamma - \alpha\delta)\, C. \end{aligned}$$

§. 27. Die Rechnung will ich nicht weiter verfolgen, indem es

hinreichend ist, eine directe und der Natur der Sache angemessene Methode aufgefunden zu haben, welche auf dieselben, allerdings besondern Integrationen leitet, die ich längst aus ganz andern Principien entwickelt habe. Es wird also zur Erweiterung dieser Wissenschaft sehr gut seyn, diese Methode mit allem Fleiße genauer zu untersuchen; zu diesem Zwecke bemerke ich noch, daß eine andere Form des Multiplicators gebraucht werden könne, mit Hülfe dessen eine Gleichung von der Form

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = o$$

integrabel gemacht werden kann. Man setze nämlich den Multiplicator $M = P + Q\sqrt{XY}$, damit die Gleichung

$$\frac{Pdx}{\sqrt{X}} + Qdy\sqrt{X} + \frac{Pdy}{\sqrt{Y}} + Qdx\sqrt{Y} = o$$

integrabel werde. Man nehme an, das Integrale des ersten Theiles sey $= 2R\sqrt{X}$, das des letztern aber $= 2S\sqrt{Y}$, so daß das vollständige Integrale wird:

$$R\sqrt{X} + S\sqrt{Y} = \text{Const.};$$

nach gehöriger Entwickelung findet man:

$$P = \frac{RdX}{dx} + 2X\left(\frac{dR}{dx}\right); \quad P = \frac{SdY}{dy} + 2Y\left(\frac{dS}{dy}\right)$$

$$Q = 2\left(\frac{dR}{dy}\right); \qquad Q = 2\left(\frac{dS}{dx}\right).$$

da also $\left(\frac{dR}{dy}\right) = \left(\frac{dS}{dx}\right)$ seyn muß, so leuchtet auch ein, daß der Ausdruck $Rdx + Sdy$ die Integration gestatten müsse. Allein es ist nicht nöthig, daß derselbe ein algebraisches Integrale habe, sondern es ist hinreichend, daß er den Charakter der Integrabilität besitzt.

§. 28. Nimmt man

$$R = \frac{y}{\alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2} \quad \text{und} \quad S = \frac{x}{\alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2},$$

so wird man erhalten:

$$Q = \frac{2\alpha - 2\gamma x^2 y^2}{(\alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2)^2} \quad \text{und}$$

$$P = \frac{ydX}{dx\,(\alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2)} - \frac{2Xy^2\,(\beta + 2\gamma xy)}{(\alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2)^2},$$

und zugleich ist:

$$P = \frac{x\,dY}{dy\,(\alpha + \beta xy + \gamma x^2y^2)} - \frac{2Yx^2(\beta + 2\gamma xy)}{(\alpha + \beta xy + \gamma x^2y^2)^2},$$

so daß man erhält:

$$(\alpha + \beta xy + \gamma x^2y^2)^2\, P =$$

$$\frac{y\,dX}{dx}(\alpha + \beta xy + \gamma x^2y^2) - 2y^2X(\beta + 2\gamma xy) =$$

$$\frac{x\,dY}{dy}(\alpha + \beta xy + \gamma x^2y^2) - 2x^2Y(\beta + 2\gamma xy).$$

Man setze:

$$X = Ax^4 + 2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx + E \text{ und eben so}$$
$$Y = \mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E},$$

und diese zwey Werthe, welche einander gleich gesetzt werden müssen, erfordern, wie man sieht, daß

$$\beta = 0;\quad B = 0;\quad \mathfrak{B} = 0;\quad D = 0 \text{ und } \mathfrak{D} = 0$$

werde, dann aber werden dieselben seyn:

$$\text{I.} = -2\gamma Cx^3y^3 + 4\alpha Ax^3y - 4\gamma Exy^3 + 2\alpha Cxy$$
$$\text{II.} = -2\gamma\mathfrak{C}x^3y^3 + 4\alpha\mathfrak{A}xy^3 - 4\gamma\mathfrak{E}x^3y + 2\alpha\mathfrak{C}xy,$$

woraus sich ergibt:

$$\mathfrak{C} = C;\quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{-\mathfrak{E}}{A} = \frac{-E}{\mathfrak{A}} \text{ oder } \mathfrak{A}\mathfrak{E} = AE.$$

Es wird also seyn:

$$X = Ax^4 + Cx^2 - \frac{\alpha}{\gamma}\mathfrak{A};\quad Y = \mathfrak{A}y^4 + Cy^2 - \frac{\alpha}{\gamma}A,$$

und der Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + Cx^2 - \frac{\alpha}{\gamma}\mathfrak{A}}} + \frac{dy}{\sqrt{\mathfrak{A}y^4 + Cy^2 - \frac{\alpha}{\gamma}A}} = 0$$

entspricht das vollständige Integrale:

$$y\sqrt{Ax^4 + Cx^2 - \frac{\alpha}{\gamma}\mathfrak{A}} + x\sqrt{\mathfrak{A}y^4 + Cy^2 - \frac{\alpha}{\gamma}A} =$$
$$= \text{Const.}\,(\alpha + \gamma x^2y^2).$$

§. 29. Aus diesen Beyspielen erkennt man leicht, daß beynahe eine ganz neue Art Rechnung noch zu wünschen sey, durch welche derley Operationen nach einer bestimmten Ordnung vorgenommen und weiter ausgedehnt werden können, von welchem Ziele wir übrigens noch sehr weit entfernt sind; indessen scheint das, was ich bisher vorgetra-

gen habe, dennoch von größter Wichtigkeit zu seyn, um die Allgemeinheit des anfangs erwähnten Princips für die Integrationen festzustellen, indem mit Hülfe derselben, mittelst schicklicher Multiplicatoren, sogar jene Integrationen, welche äußerst schwierig und die bekannten Principien zu überschreiten schienen, ausgeführt werden können. Als ich zuerst auf jene Integrationen stieß, schien mir kein anderer Weg dahin zu führen, als jener, den ich damahls eingeschlagen habe; denn ich hatte noch nicht bemerkt, daß, so oft das vollständige Integrale irgend einer Differenzialgleichung bekannt ist, aus demselben immer ein Multiplicator, durch welche dieselbe integrabel gemacht wird, gefolgert werden könne, welcher Schluß keineswegs hätte gelten können, wenn das Integrale bloß ein particuläres gewesen wäre. Es ist daher die Natur jener particulären Integrationen, auf welche ich einst nach demselben fremdartigen Principe gekommen war, ganz anders beschaffen, und es läßt sich noch nicht absehen, wie man auf einem directen und natürlichen Wege zu demselben gelangen könne.

§. 30. Es wird sich also um so mehr der Mühe lohnen, die Natur dieser particulären Integrationen um so genauer zu untersuchen, und dieß wird durch die Betrachtung des einfachsten Falles geschehen. Ich hatte für die Differenzialgleichung

$$dx\sqrt{1+x^2}+dy\sqrt{1+y^2}+nydx+nxdy=0$$

das particuläre Integrale gefunden:

$$x^2+y^2+2xy\sqrt{1+n^2}=n^2,$$

und ähnliche unzählige Integralien habe ich auch für solche Differenzialgleichungen gefunden, welche weder von Logarithmen noch von der Quadratur des Kreises abhängen. Man betrachte daher diese Gleichung so, als könnte sie nicht durch Logarithmen integrirt werden. Es fragt sich also hier zuerst, auf welchem directen Wege dieses particuläre Integrale aus dem Differenzialausdrucke gefolgert werden könne? ferner, wie die Differenzialgleichung beschaffen seyn müsse, damit sich ein solches particuläres Integrale darstellen lasse? Rücksichtlich dieser Fragen bemerke ich zuerst, daß eine algebraische Gleichung das vollständige Integrale der Differenzialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=0$$

sey, daß dann aber aus derselben folge

$$x + y\sqrt{1+n^2} = n\sqrt{1+y^2} \text{ und}$$

$$y + x\sqrt{1+n^2} = n\sqrt{1+x^2},$$

so daß sowohl $\sqrt{1+x^2}$ als auch $\sqrt{1+y^2}$ durch x und y in rationaler Form dargestellt werden kann. Da man nun durch Differenziation erhält:

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{dy + dx\sqrt{(1+n^2)}}{n} \text{ und}$$

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{dx + dy\sqrt{1+n^2}}{n},$$

so kömmt, wenn man was immer für Vielfache dieser Ausdrücke zu der Formel:

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = 0$$

addirt, immer eine Differenzialgleichung zum Vorschein, welcher eine algebraische Gleichung, wenigstens als particuläre Auflösung, Genüge leistet. Der Differenzialgleichung

$$\frac{dx + Px\,dx}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{dy + Qy\,dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{P\,dy + Q\,dx + (P\,dx + Q\,dy)\sqrt{1+n^2}}{n}$$

wird also immer das particuläre Integrale entsprechen:

$$x^2 + y^2 + 2xy\sqrt{1+n^2} = n^2.$$

Sey nun $P = x$ und $Q = y$, so wird der Gleichung

$$dx\sqrt{1+x^2} + dy\sqrt{1+y^2} = \frac{x\,dy + y\,dx + (x\,dx + y\,dy)\sqrt{1+n^2}}{n}$$

Genüge geschehen, aus dem Integrale aber wird

$$x\,dx + y\,dy = -(x\,dy + y\,dx)\sqrt{1+n^2},$$

so daß man die Differenzialgleichung erhält:

$$dx\sqrt{1+x^2} + dy\sqrt{1+y^2} + nx\,dy + ny\,dx = 0,$$

und dieser Gleichung kömmt das oben angegebene Integrale als particuläre Auflösung zu.

§. 31. Übertragen wir nun dieses auf allgemeinere Fälle, und, nachdem man für die Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$$

das vollständige Integrale gefunden hat, welches wir durch W = Const.

bezeichnen wollen, so bemerke man, daß hieraus immer beyde Wurzelwerthe $\sqrt{X}$ und $\sqrt{Y}$ durch rationale Functionen von x und y bestimmt werden. Sey also

$$\sqrt{X} = R \quad \text{und} \quad \sqrt{Y} = S, \quad \text{und eben so}$$

$$\frac{dX}{\sqrt{X}} = 2\,dR \quad \text{und} \quad \frac{dY}{\sqrt{Y}} = 2\,dS.$$

Sey nun P eine Function von x, und Q von y, so entsteht hieraus die Gleichung

$$\frac{dx + P\,dX}{\sqrt{X}} + \frac{dy + Q\,dY}{\sqrt{Y}} - 2P\,dR - 2Q\,dS = 0,$$

welcher die algebraische Gleichung $W = \text{Const.}$ gewiß als particuläre Auflösung Genüge leistet. Werden daher P und Q so genommen, daß der Ausdruck $P\,dR + Q\,dS$ die Integration gestattet, und dessen Integrale $= V$ seyn mag, so wird man die transcendente Gleichung erhalten:

$$\int \frac{dx + P\,dX}{\sqrt{X}} + \int \frac{dy + Q\,dY}{\sqrt{Y}} - 2V = \text{Const.},$$

welcher Gleichung $W = \text{Const.}$ oder den daraus abgeleiteten Werthen $\sqrt{X} = R$ oder $\sqrt{Y} = S$ particulär Genüge leistet. Ein solcher Schluß scheint also den Weg zu derley particulären Integrationen, die auf eine andere Weise sehr schwer aufzufinden sind, zu bahnen.

Fig. 2.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 7.

Bd.







$$\ldots^2\left(\frac{\beta^2}{\delta^2}\Delta(x) - \frac{\beta(\alpha+\beta x)}{\delta^2}\Delta'(x) + \frac{(\alpha+\beta x)^2}{2\delta^2}\Delta''(x) + \frac{\beta(\gamma+\delta x)}{\delta} S - \frac{(\alpha+\beta x)(\gamma+\delta x)}{2\delta}\cdot\frac{dS}{dx}\right);$$

...te Theil:

$$+\left\{\ldots\Delta(x) - \frac{(\alpha+\beta x)}{\delta}\Delta'(x) + \frac{(\alpha+\beta x)(\gamma+\delta x)}{2\delta^2}\Delta''(x) + (\gamma+\delta x) S - \frac{(\gamma+\delta x)^2}{2\delta}\cdot\frac{dS}{dx}\right\}$$

...Theil:

$$y^2(\gamma+\delta x)^2\,\Delta(x).$$

Deßhalb wird die Formel:

$$(\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x y)^2 \int Q\,dy$$

...rth erhalten:

$$\ldots + \frac{2\beta}{\delta} y\Delta(x) + y^2\Delta(x) - \frac{\beta(\alpha+\beta x)}{\delta^2}\Delta'(x) - \frac{(\alpha+\beta x)}{\delta} y\Delta'(x) + \frac{(\alpha+\beta x)^2}{2\delta^2}\Delta''(x) + \frac{(\alpha+\beta x)(\gamma+\delta x)}{2\delta^2} y\Delta''(x) + \frac{\beta}{\delta}(\gamma+\delta x) S + (\gamma+\delta x) y S - \frac{(\alpha+\beta x)(\gamma+\delta x)}{2\delta}\cdot\frac{dS}{dx} - \frac{(\gamma+\delta x)^2}{2\delta} y\cdot\frac{dS}{dx},$$

oder bündiger ausgedrückt:

$$\frac{(\beta+\delta y)^2}{\delta^2}\Delta(x) - \frac{(\alpha+\beta x)(\beta+\delta y)}{\delta^2}\Delta'(x) + \frac{(\alpha+\beta x)(\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x y)}{2\delta^2}\Delta''(x) + \frac{(\gamma+\delta x)(\beta+\delta y)}{\delta} S - \frac{(\gamma+\delta x)(\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x y)}{2\delta}\cdot\frac{dS}{dx},$$

welchem Ausdrucke der andere:

$$\frac{(\gamma+\delta x)^2}{\delta^2}\Gamma(y) - \frac{(\alpha+\gamma y)(\gamma+\delta x)}{\delta^2}\Gamma'(y) + \frac{(\alpha+\gamma y)(\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x y)}{2\delta^2}\Gamma''(y) + \frac{(\beta+\delta y)(\gamma+\delta x)}{\delta}\mathfrak{S} - \frac{(\beta+\delta y)(\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x y)}{2\delta}\cdot\frac{d\mathfrak{S}}{dy}$$

gleich werden muß.

§. 26. Wenn wir nun

$\Delta(x) = \delta^2(A x^2 + 2 B x + C)$ und $S = \delta(D x + 2 E x + F)$

und eben so

$\Gamma(y) = \delta^2(\mathfrak{A} y^2 + 2\mathfrak{B} y + \mathfrak{C})$ und $\mathfrak{S} = \delta(\mathfrak{D} y^2 + 2\mathfrak{E} y + \mathfrak{F})$

setzen, so werden unsere Ausdrücke entwickelt sich auf folgende Art darstellen:

$(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x y)^2 \int Q\,dy$	$(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x y)^2 \int P\,dx$
$+ \delta^2 A x^2 y^2$	$+ \delta^2 \mathfrak{A} x^2 y^2$
$+ 2\delta^2 B x y^2$	$+ \delta(\gamma\mathfrak{A} - \beta\mathfrak{D} + \delta\mathfrak{E})\, x y^2$
$+ \delta(\beta A - \gamma D + \delta E)\, x^2 y$	$+ 2\delta^2 \mathfrak{B} x^2 y$
$+ \delta^2 C y^2$	$+ \delta(\gamma\mathfrak{E} - \alpha\mathfrak{D})\, y^2$
$+ \delta(\beta E - \alpha D)\, x^2$	$+ \delta^2 \mathfrak{C} x^2$
$+ [2\beta\delta B + (\beta\gamma - \alpha\delta) A - \gamma^2 D + \delta^2 F]\, xy$	$+ [2\gamma\delta\mathfrak{B} + (\beta\gamma - \alpha\delta)\mathfrak{A} - \beta^2\mathfrak{D} + \delta^2\mathfrak{F}]\, xy$
$+ (\alpha\gamma A - 2\alpha\delta B + 2\beta\delta C - \gamma^2 E + \gamma\delta F)\, y$	$+ (\gamma\delta\mathfrak{F} + (\beta\gamma - \alpha\delta)\mathfrak{E} - \alpha\beta\mathfrak{D})\, y$
$+ (\beta\delta F + (\beta\gamma - \alpha\delta) E - \alpha\gamma D)\, x$	$+ (\alpha\beta\mathfrak{A} - 2\alpha\delta\mathfrak{B} + 2\gamma\delta\mathfrak{C} - \beta^2\mathfrak{E} + \beta\delta\mathfrak{F})\, x$
$+ \alpha^2 A - 2\alpha\beta B + \beta^2 C - \alpha\gamma E + \beta\gamma F$	$+ \alpha^2\mathfrak{A} - 2\alpha\gamma\mathfrak{B} + \gamma^2\mathfrak{C} - \alpha\beta\mathfrak{E} + \beta\gamma\mathfrak{F},$

woraus sich nur folgende sechs Bestimmungen ergeben:

$$\mathfrak{A} = A$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\beta A - \gamma D}{2\delta} + \tfrac{1}{2} E$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\beta E - \alpha D}{\delta}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{2\gamma\delta B - \gamma^2 A - \delta^2 C}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{2\alpha\delta B - \alpha\gamma A - \beta\delta C}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

$$\mathfrak{F} = F - \frac{\gamma E}{\delta} - \frac{\alpha\beta\gamma A + 2\alpha\beta\delta B - \beta^2\delta C}{\delta(\alpha\delta - \beta\gamma)},$$

denn durch diese Bestimmungen wird allen jenen Bedingungen Genüge geleistet. So bleiben also alle Größen A, B, C, D, E, F, und eben so α, β, γ, δ unserer Willkür überlassen, und aus diesem ergibt sich ferner die Function:

$$\begin{aligned} 2X = {} & \delta^2 D x^4 + 2\delta(\delta E + \gamma D - \beta A)\, x^3 \\ & + [\delta^2 F + 4\gamma\delta E + \gamma^2 D - 2\beta\delta B - (\beta\gamma + 3\alpha\delta) A]\, x^2 \\ & + 2(\gamma\delta F + \gamma^2 E - \alpha\gamma A - 2\alpha\delta B)\, x \\ & + \gamma^2 F - 2\alpha\gamma B + (\beta\gamma - \alpha\delta)\, C. \end{aligned}$$

§. 27. Die Rechnung will ich nicht weiter verfolgen, indem es

hinreichend ist, eine directe und der Natur der Sache angemessene Methode aufgefunden zu haben, welche auf dieselben, allerdings besondern Integrationen leitet, die ich längst aus ganz andern Principien entwickelt habe. Es wird also zur Erweiterung dieser Wissenschaft sehr gut seyn, diese Methode mit allem Fleiße genauer zu untersuchen; zu diesem Zwecke bemerke ich noch, daß eine andere Form des Multiplicators gebraucht werden könne, mit Hülfe dessen eine Gleichung von der Form

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$$

integrabel gemacht werden kann. Man setze nämlich den Multiplicator $M = P + Q\sqrt{XY}$, damit die Gleichung

$$\frac{P\,dx}{\sqrt{X}} + Q\,dy\sqrt{X} + \frac{P\,dy}{\sqrt{Y}} + Q\,dx\sqrt{Y} = 0$$

integrabel werde. Man nehme an, das Integrale des ersten Theiles sey $= 2R\sqrt{X}$, das des letztern aber $= 2S\sqrt{Y}$, so daß das vollständige Integrale wird:

$$R\sqrt{X} + S\sqrt{Y} = \text{Const.};$$

nach gehöriger Entwickelung findet man:

$$P = \frac{R\,dX}{dx} + 2X\left(\frac{dR}{dx}\right); \quad P = \frac{S\,dY}{dy} + 2Y\left(\frac{dS}{dy}\right)$$

$$Q = 2\left(\frac{dR}{dy}\right); \quad Q = 2\left(\frac{dS}{dx}\right).$$

da also $\left(\frac{dR}{dy}\right) = \left(\frac{dS}{dx}\right)$ seyn muß, so leuchtet auch ein, daß der Ausdruck $R\,dx + S\,dy$ die Integration gestatten müsse. Allein es ist nicht nöthig, daß derselbe ein algebraisches Integrale habe, sondern es ist hinreichend, daß er den Charakter der Integrabilität besitzt.

§. 28. Nimmt man

$$R = \frac{y}{\alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2} \quad \text{und} \quad S = \frac{x}{\alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2},$$

so wird man erhalten:

$$Q = \frac{2\alpha - 2\gamma x^2 y^2}{(\alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2)^2} \quad \text{und}$$

$$P = \frac{y\,dX}{dx\,(\alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2)} - \frac{2Xy^2(\beta + 2\gamma xy)}{(\alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2)^2},$$

und zugleich ist:

$$P = \frac{x\,dY}{dy\,(\alpha + \beta xy + \gamma x^2y^2)} - \frac{2Yx^2(\beta + 2\gamma xy)}{(\alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2)^2},$$

so daß man erhält:

$$(\alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2)^2 \, P =$$

$$\frac{y\,dX}{dx}(\alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2) - 2y^2 X(\beta + 2\gamma xy) =$$

$$\frac{x\,dY}{dy}(\alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2) - 2x^2 Y(\beta + 2\gamma xy).$$

Man setze:

$$X = Ax^4 + 2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx + E \text{ und eben so}$$
$$Y = \mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E},$$

und diese zwey Werthe, welche einander gleich gesetzt werden müssen, erfordern, wie man sieht, daß

$$\beta = 0; \quad B = 0; \quad \mathfrak{B} = 0; \quad D = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{D} = 0$$

werde, dann aber werden dieselben seyn:

$$\text{I.} = -2\gamma Cx^3y^3 + 4\alpha Ax^3y - 4\gamma Exy^3 + 2\alpha Cxy$$
$$\text{II.} = -2\gamma\mathfrak{C}x^3y^3 + 4\alpha\mathfrak{A}xy^3 - 4\gamma\mathfrak{E}x^3y + 2\alpha\mathfrak{C}xy,$$

woraus sich ergibt:

$$\mathfrak{C} = C; \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{-\mathfrak{E}}{A} = \frac{-E}{\mathfrak{A}} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{A}\mathfrak{E} = AE.$$

Es wird also seyn:

$$X = Ax^4 + Cx^2 - \frac{\alpha}{\gamma}\mathfrak{A}; \quad Y = \mathfrak{A}y^4 + Cy^2 - \frac{\alpha}{\gamma}A,$$

und der Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + Cx^2 - \frac{\alpha}{\gamma}\mathfrak{A}}} + \frac{dy}{\sqrt{\mathfrak{A}y^4 + Cy^2 - \frac{\alpha}{\gamma}A}} = 0$$

entspricht das vollständige Integrale:

$$y\sqrt{Ax^4 + Cx^2 - \frac{\alpha}{\gamma}\mathfrak{A}} + x\sqrt{\mathfrak{A}y^4 + Cy^2 - \frac{\alpha}{\gamma}A} =$$
$$= \text{Const.}\,(\alpha + \gamma x^2 y^2).$$

§. 29. Aus diesen Beyspielen erkennt man leicht, daß beynahe eine ganz neue Art Rechnung noch zu wünschen sey, durch welche derley Operationen nach einer bestimmten Ordnung vorgenommen und weiter ausgedehnt werden können, von welchem Ziele wir übrigens noch sehr weit entfernt sind; indessen scheint das, was ich bisher vorgetra-

